ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XV, № 6, 1980 Математика

К. А. ЯГДЖЯН

О КОРРЕКТНОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СЛАБО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Пусть $x=(x_0, x_1, \cdots, x_n)\in R^{n+1}$, $x_0\equiv t$, $D_j=-i\dfrac{\partial}{\partial x_j}$, $\alpha=(\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ — мультииндекс и

$$P(x, D)=\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) D^\alpha, \tag{1}$$

а $P_s(x;\xi)=\sum\limits_{|\alpha|=s} a_\alpha(x)\xi^\alpha$, $\xi\in R^{n+1}$. Рассмотрим задачу Коши

$$Pu=f \text{ в } G_T=[0, T]\times R^n, \tag{2}$$

$$D_0^j u=g_j,\ j=0,\cdots, m-1,\ t=0,\ x\in R^n. \tag{3}$$

Будем считать, что $a_{(m,0,\cdots,0)}=-1$. Известно, что для корректности задачи Коши в очень слабом смысле необходимым условием является вещественность всех характеристических корней $\xi_0=\lambda_j(x, \xi')$ уравнения

$$P_m(x;\xi_0, \xi')=0,\ \xi'\in R^n\setminus 0 \tag{4}$$

(см. [1]). Если они различны, то выполнена L_2-оценка, и наоборот. Поэтому, если мы потребуем всего лишь, чтобы для любых достаточно гладких правых частей f и начальных данных g_j задача Коши имела бы единственное классическое решение, то, вообще говоря, для подобной корректности необходимо будет накладывать некоторые условия на $P_s(x;\xi)$, $s<m$. В работах [2]—[5] были описаны достаточные условия корректности задачи Коши для операторов, строго гиперболических при $t>0$. Необходимость этих условий была доказана (см. [6]) только в предположении степенной скорости слипания характеристических корней λ_j и их бесконечной гладкости. Это исключало из рассмотрения, например, оператор

$$P=-D_t^2+A^2\exp(-2t^{-n})D_x^2+iBt^{-n-1-l}\exp(-t^{-n})D_x, \tag{5}$$

A, B, n, l — постоянные. Задача (2), (3) для (5) была изучена в работе [7], где, в частности, доказано, что если A, B вещественны, а $l>0$, то задача не корректна в указанном выше смысле. Если же $l\leq 0$, то задача корректна. Несмотря на то, что этот результат работы [7] нов и интересен, он, безусловно, носит характер отдельного примера и не отвечает даже на вопрос, является ли корректной задача Коши для оператора

$$P = -D_t^2 + A^2 \exp(-2t^{-n}) D_x^2 + iB(-\ln t)^l t^{-n-1} \exp(-t^{-n}) D_x, \quad (6)$$

не говоря уже об общем уравнении второго порядка.

Целью настоящей заметки является ответ на этот вопрос для довольно общих классов уравнений второго порядка. Оказывается что в этих классах достаточные условия, указанные А. Б. Нерсесяном в [2]—[5], являются также и необходимыми. Очевидно, что доказательство этого сводится к описанию класса операторов, для которых задача Коши не является корректно поставленной.

Мы не останавливаемся здесь на уравнении высокого порядка, хотя излагаемый метод позволяет сформулировать и доказать соответствующий результат.

§ 1. Формулировки теорем

Задачу (2), (3) будем называть C^∞-корректной, если выполнены следующие два условия:

(E) Для любых $g_j \in C_0^\infty(R^n)$ и для $f=0$ существует решение $u \in C^\infty(G_T)$ задачи (2), (3);

(U_Γ) Для задачи (2), (3) скорость распространения конечна, т. е. существует конус зависимости Γ.

Если задача C^∞-корректна, то с помощью теоремы о замкнутом графике легко устанавливается энергетическое неравенство: при $f=0$ для любого компакта $K \subset G_T$ существует постоянная C, такая что

$$\sum_{|\alpha|<m-1} \sup_K |D^\alpha u| \leqslant C\Big(\sum_{\substack{l<m-1\\ |\alpha|<C}} \sup_{\Gamma_K \cap \{t=0\}} |D^\alpha g_l|\Big), \quad (7)$$

где Γ_K есть объединение конусов зависимости всех точек K.

Поскольку мы будем рассматривать операторы, строго гиперболические при $t>0$, можно считать T достаточно малым. Положим также, что уравнение записано в самосопряженном виде, т. е. $a_\alpha=0$, если $\alpha_0=1$, $|\alpha|=2$.

Перейдем теперь к описанию класса операторов, для которых задача Коши не является корректной.

Теорема 1. *Предположим, что вектор* $\zeta \in R^n$, $|\zeta|=1$, *таков, что*

$$P_2(x;\, 0,\, \zeta) = \mu^2(t) A^2(t), \quad (8)$$

$$P_1(x;\, 0,\, \zeta) = iB(t) \frac{\dot\mu(t)}{\nu(t)}, \quad \dot\mu = \frac{d\mu}{dt}, \quad (8')$$

где непрерывные функции A, B, μ, ν *удовлетворяют условиям* $A(0) \neq 0$, $A(t) > 0$, $\operatorname{Re} B(0) \neq 0$, $\mu(0)=0$, $\mu(t>0)>0$ *и*

1°. $\dfrac{\dot\mu(t)}{\nu(t)} \geqslant 0$, $\dfrac{\dot\mu(t)}{\nu(t)}$ — *неубывающая на* $[0, T]$ *функция,*

$$\left|\frac{\ddot{\mu}(t)}{\dot{\mu}(t)}\right| \leqslant \frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)}, \quad \frac{\dot{\nu}(t)}{\nu(t)} \leqslant \frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)} \frac{1}{(-\ln \mu(t))},$$

$$|\dot{A}(t)| \leqslant c \frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)}, \quad |\dot{B}(t)| \leqslant c \frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)}, \quad t > 0, \ c > 0;$$

2'. *Функция* $\nu \frac{\mu^2}{\dot{\mu}}$ *монотонно возрастает.*

Тогда если $\nu(0) = 0$, *то задача Коши* (2), (3) *не является* C^∞*-корректной.*

Замечание. Условие 2° для монотонно неубывающих функций $\dot{\mu}$ и ν всегда выполнено. Нетрудно также увидеть, что 1° выполняются тем скорее, чем медленнее стремится к нулю функция ν, т. е. чем слабее нарушается достаточное условие корректности $\nu(0) \neq 0$.

Случай более сильного нарушения условия корректности, т. е. большей скорости стремления к нулю функции ν, описывается следующей теоремой.

Теорема 2. *Предположим, что вектор* $\zeta \in R^n$, $|\zeta| = 1$, *таков, что имеет место* (8), *и*

$$P_1(x; 0, \zeta) = iB(t) \frac{\dot{\mu}(t) \ln \mu(t)}{\nu(t)}, \tag{8''}$$

где непрерывные функции A, B, μ, ν *удовлетворяют условиям*

$A(0) \neq 0$, $A(t) > 0$, $B(0) \neq 0$, $\mu(0) = 0$, $\mu(t > 0) > 0$, *и*

1°. $\left|\frac{\dot{\mu}(t)}{\nu(t)} \frac{\ln \mu(t)}{\mu(t)}\right| \leqslant c$, $\left|\frac{\sqrt{\mu(t)}}{\nu(t)}\right| \leqslant c$, $t > 0$, $c = \text{const} > 0$;

2°. $\frac{\ddot{\mu}}{\dot{\mu}} + \frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{\nu}}{\nu} + \frac{\dot{\mu}}{\mu} \frac{1}{\ln \mu} \geqslant 0$, $t > 0$;

3°. $\frac{d}{dt}(\ln(-\ln \mu)) \leqslant 0$, $\left(\frac{\dot{\mu}}{\mu} \circ \mu^{-1}\right)(z) \geqslant c_1 \left(\frac{\dot{\mu}}{\mu} \circ \mu^{-1}\right)(z^2)$, $c_1 > 0$,

$z \downarrow 0$, *где* μ^{-1} — *функция, обратная к* μ;

4°. $-\frac{\nu \mu^2}{\mu \ln \mu}$ — *монотонно возрастающая.*

Тогда если $\nu(0) = 0$, *то задача Коши* (2), (3) *не является* C^∞*-корректной.*

Следующая теорема дает достаточные условия корректности задачи Коши, отличающиеся от условий работ [2]—[5]. Эти условия в классе операторов, описанных в теореме 2, являются и необходимыми.

Обозначим через $C_t^m(T; H^s)$ класс функций, осуществляющих непрерывное отображение $[0, T]$ в $H^s(R^n)$, вместе со своими произ-

водными по t порядка $\leqslant m$, а через $\|\cdot\|_s$ обозначим обычную норму соболевского пространства $H^s(R^n)$.

Теорема 3. *Пусть $a_\alpha(x)$ — непрерывные функции, зависящие только от t, и пусть для любого $\zeta \in R^n$*

$$P_2(x;\ 0,\ \zeta) = \mu^2(t) \sum_{i,\ j=1}^{n} A^{ij}(t)\, \zeta_i \zeta_j, \tag{8a}$$

$$P_1(x;\ 0,\ \zeta) = \dot{\mu}(t) \ln \mu(t) \sum_{j=1}^{n} B^j(t)\, \zeta_j, \tag{8'''}$$

где вещественнозначные непрерывные функции μ, A^{ij}, B^j, $\dot{\mu}$ удовлетворяют условиям $\mu(0)=0$, $\mu(t>0)>0$, $\sum A^{ij}(t)\zeta_i\zeta_j \geqslant \delta|\zeta|^2$, $\delta>0$, $\left|\frac{\ddot{\mu}}{\dot{\mu}}\right| \leqslant \frac{\dot{\mu}}{\mu}$, $-\dot{\mu}\ln\mu$ — неубывающая,

$$|\dot{A}^{ij}(t)| \leqslant \text{const}\, \frac{\dot{\mu}}{\mu},\ |\dot{B}^j(t)| \leqslant \text{const}\, \frac{\dot{\mu}}{\mu},\ t \in (0,\ T],\ 0 \leqslant i,\ j \leqslant n.$$

Тогда существуют постоянные C и k, такие что для любого $s \geqslant 2$ и любых $f \in C_t^0(T;\ H^s)$, $g_j \in H^{s+k-j}$ задача Коши (2), (3) имеет единственное решение $u \in \bigcap_{0<l<2} C_t^l(T;\ H^{s-l})$ и для него имеет место оценка

$$\|u(t)\|_s^2 + \left\|\frac{du}{dt}(t)\right\|_{s-1}^2 \leqslant C\left(\|g_0\|_{s+k}^2 + \|g_1\|_{s+k-1}^2 + \int_0^t \|f(\tau)\|_{s+k}^2\, d\tau\right). \tag{7'}$$

§ 2. Доказательство теоремы 1

Мы следуем методу, впервые, по-видимому, предложенному С. Мизохатой [8] и использованному С. Тарамой [7].

Очевидно, что можно считать $P_1(t;\ 1,\ 0)=0$. Обозначим $P_0(t)$ через $D(t)$, а

$$\hat{L} = -D_t^2 + A^2(t)\,\mu^2(t)\,\xi^2 + iB(t)\frac{\dot{\mu}(t)}{\nu(t)}\,\xi + D(t). \tag{9}$$

Предложение 1. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и t_ξ — решение уравнения*

$$\nu(t_\xi)\frac{\mu^2(t_\xi)}{\dot{\mu}(t_\xi)} = \frac{1}{|\xi|}. \tag{10}$$

Тогда существует положительное число M, такое что для всех $|\xi|>M$ и для всех s_1, s_2 из интервала $[0,\ t_\xi]$ решение уравнения

$$\hat{L}u = 0 \tag{11}$$

удовлетворяет неравенству

$$|u(s_1,\ \xi)|^2 + \left|\frac{du}{dt}(s_1,\ \xi)\right|^2 \leqslant c\,(1+|\xi|)^k \left(|u(s_2,\ \xi)|^2 + \left|\frac{du}{dt}(s_2,\ \xi)\right|^2\right) \tag{12}$$

с постоянными c и k, не зависящими от ξ, s_1, s_2 и.

Доказательство. Рассмотрим (9) сначала в промежутке $[0, t_1]$, где t_1 — решение уравнения

$$\mu(t_1) = \frac{1}{|\xi|^2}. \tag{13}$$

Обозначим $u = v_1$, $\frac{du}{dt} = v_2 + iA(0)\mu(t)\xi u$, $\Delta A^2(t) = A^2(0) - A^2(t)$, а через $E_1(t, \xi)$ — квадрат нормы вектора $^t(v_1, v_2)$. Тогда

$$\frac{dE_1}{dt} = 2\,\mathrm{Re}\{v_1\bar{v}_2 + \bar{v}_1 v_2 (-iA(0)\dot{\mu}(t)\xi + iB(t)\frac{\dot{\mu}(t)}{\nu(t)}\xi + \\ + D(t)) + \bar{v}_1 v_2 \mu^2(t)\xi^2 \Delta A^2(t)\}, \tag{14}$$

поэтому

$$\pm \ln \frac{E_1(s_1, \xi)}{E_1(s_2, \xi)} \leqslant c\left(1 + \int_0^{t_1} \frac{\dot{\mu}(t)}{\nu(t)}\, dt\, |\xi|\right). \tag{15}$$

Из 1° получаем, что с некоторой положительной постоянной c и при $\delta > 0$

$$\int_0^t \frac{\dot{\mu}(t)}{\nu(t)}\, dt \leqslant -c\sqrt{\mu(t)}\ln\mu(t),\ t \in [0, \delta]. \tag{16}$$

Поэтому с некоторыми постоянными $k \geqslant 0$ и $c > 0$

$$E_1(s_2, \xi) \leqslant c\,(1 + |\xi|)^k E_1(s_1, \xi),\ s_1, s_2 \in [0, t_1]. \tag{17}$$

Но

$$|u|^2 + \left|\frac{du}{dt}\right|^2 \leqslant 3E_1(t, \xi) \leqslant c\left(|u|^2 + \left|\frac{du}{dt}\right|^2\right), \tag{18}$$

что доказывает неравенство (12) в $[0, t_1]$.

Рассмотрим теперь (11) в $[t_1, t_\xi]$. Обозначим

$$E_2(t, \xi) = \frac{\dot{\mu}(t)}{\nu(t)}|\xi|\,|v_1|^2 + |v_2|^2, \tag{19}$$

тогда

$$\left|\frac{dE_2}{dt}\right| \leqslant \left\{c_1\frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)} + c_2\sqrt{\frac{\dot{\mu}(t)}{\nu(t)}}\,|\xi|^{1/2}\right\}E_2. \tag{20}$$

Далее, в силу 1°, при достаточно малых t,

$$\int_0^t \sqrt{\frac{\dot{\mu}(s)}{\nu(s)}}\,ds \leqslant c\mu(t)\sqrt{\frac{\nu(t)}{\dot{\mu}(t)}}\ln\frac{\dot{\mu}(t)}{\nu(t)\mu^2(t)}, \tag{21}$$

поэтому

$$\left|\frac{E_2(s_1, \xi)}{E_2(s_2, \xi)}\right|^{\pm 1} < c\,(1 + |\xi|)^k \tag{22}$$

для любых $s_1, s_2 \in [t_1, t_\xi]$. С другой стороны

$$E_2(t, \xi) = \frac{\dot{\mu}}{\nu} |\xi| \, |u|^2 + \left|\frac{du}{dt}\right|^2 + A(0) \, \mu^2 \xi^2 |u|^2 +$$

$$+ 2 A(0) \mu \xi \operatorname{Im} \left(i \bar{u} \frac{du}{dt}\right), \tag{23}$$

поэтому

$$E_2(t, \xi) \leqslant c (1 + |\xi|)^5 E_2(t, \xi). \tag{24}$$

Последнее неравенство вместе с (22) и доказывает предложение 1.

Предложение 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1, а t_ξ определяется из* (10). *Тогда решение задачи*

$$\begin{cases} \hat{L}u = 0, \ t \in [t_\xi, T], & (25) \\ u(t_\xi, \xi) = \dfrac{du}{dt}(t_\xi, \xi) = 1, & (26) \end{cases}$$

при всех $t \in [t_\xi, T]$ удовлетворяет неравенству

$$|u(t, \xi)|^2 + \left|\frac{du}{dt}(t, \xi)\right|^2 \geqslant c[\mu(t)]^{\delta/\nu(t)} (1 + |\xi|)^{\gamma/\nu(t_\xi)}, \tag{27}$$

где положительные постоянные c, δ, γ не зависят от ξ, t.

Доказательство. Пусть λ — комплексное число, $\operatorname{Re}\lambda > 0$ и

$$\lambda^2 = -A^2(t) \mu^2(t) \xi^2 + \alpha(t) \frac{\dot{\mu}(t)}{\nu(t)} \xi + i\beta(t) \xi \frac{\dot{\mu}(t)}{\nu(t)}, \tag{28}$$

$B(t) = -\beta(t) + i\alpha(t)$, $\beta(0) \neq 0$. Можно считать, что $\frac{1}{2} A^2(t) > |B(t)|$. Тогда

$$|\lambda|^2 \geqslant \frac{A^2(t)}{2} \mu^2(t) \xi^2, \quad t \in [t_\xi, T]. \tag{29}$$

Очевидно также, что при тех же t

$$|\lambda|^2 \leqslant \text{const} (1 + |\xi|)^2. \tag{30}$$

Оценим теперь $\operatorname{Re}\lambda$. Если $\lambda^2 = r \exp(i\theta)$, то $\operatorname{Re}\lambda \geqslant r^{-\frac{1}{2}} \frac{r}{2} |\sin\theta|$. Но $r|\sin\theta| = |\beta(t)| \frac{\dot{\mu}(t)}{\nu(t)} |\xi|$ и

$$r^{1/2} \leqslant \frac{3}{2} A(t) \mu(t) |\xi|. \tag{31}$$

Поэтому

$$\operatorname{Re}\lambda \geqslant k \frac{\dot{\mu}(t)}{\nu(t) \mu(t)}. \tag{32}$$

В силу условий теоремы получаем

$$\left|\frac{\dot\lambda}{\lambda}\right| \leqslant c\left(1+\frac{\dot\mu}{\mu}\right) \leqslant c\frac{\dot\mu}{\mu}. \tag{33}$$

Вводя новые неизвестные функции $v_1=\lambda u+u_t$, $v_2=\lambda u-u_t$, имеем для $S(t,\ \xi)=|v_1|^2-|v_2|^2$

$$\frac{dS}{dt} \geqslant (\operatorname{Re}\lambda)\,S. \tag{34}$$

Но $S(t_\xi,\ \xi)=4\operatorname{Re}\lambda(t_\xi,\ \xi)>0$, поэтому

$$S(t,\ \xi) \geqslant \exp\left(\int\limits_{t_\xi}^{t} \operatorname{Re}\lambda\, d\tau\right) S(t_\xi,\ \xi). \tag{35}$$

Из 1° нетрудно вывести, что с некоторой положительной постоянной c, для всех $t_1,\ t_2 \in [0,\ T]$ при достаточно малых T

$$\int\limits_{t_2}^{t_1} \frac{\dot\mu(s)}{\nu(s)\,\mu(s)}\,ds \geqslant c^{-1}\,\frac{\ln\mu(s)}{\nu(s)}\Big|_{t_1}^{t_2},\quad t_1>t_2. \tag{36}$$

Поэтому

$$\exp\left(\int\limits_{t_\xi}^{t} \operatorname{Re}\lambda\, d\tau\right) \geqslant \exp\left(\frac{k}{c}\,\frac{\ln\mu(t)}{\nu(t)}\right)\exp\left(-\frac{k}{c}\,\frac{\ln\mu(t_\xi)}{\nu(t_\xi)}\right). \tag{37}$$

С другой стороны, для любого $\alpha>2$ при достаточно малых T

$$-\ln\mu(t) \geqslant \frac{1}{\alpha}\ln\frac{\dot\mu(t)}{\nu(t)\,\mu^2(t)}. \tag{38}$$

Окончательно

$$S(t,\ \xi) \geqslant \exp\left(\frac{k}{c\nu(t)}\ln\mu(t)\right)\exp\left(\frac{k}{c\alpha}\,\frac{1}{\nu(t_\xi)}\ln\frac{\dot\mu(t_\xi)}{\nu(t_\xi)\,\mu^2(t_\xi)}\right)S(t_\xi,\ \xi) \geqslant$$

$$\geqslant 4k\,[\mu(t)]^{\frac{k}{c\nu(t)}}\,|\xi|^{\frac{k}{c\alpha}\frac{1}{\nu(t_\xi)}}. \tag{39}$$

Имеем также

$$S(t,\ \xi) \leqslant 2|\lambda|\,(|u|^2+|u_t|^2). \tag{40}$$

Вместе с (39) и (29) это приводит к оценке (28).

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим решение задачи (2), (3) вида

$$U(t,\ x)=u(t,\ \xi)\,e^{i\xi\langle\zeta,\ x\rangle},\quad \xi\in R^1, \tag{41}$$

где $\langle\zeta,\ x\rangle=\sum\limits_{i=1}^{n}\zeta_i x_i$. Тогда $u(t,\ \xi)$ будет решением уравнения $\hat{L}u=0$ при всех t, и поэтому для $u(t,\ \xi)$ справедливы утверждения предложений 1 и 2. Но при достаточно больших $|\xi|$ они приводят к нарушению оценки (7), что и доказывает теорему.

§ 3. Доказательства теорем 2 и 3

Предварительно сформулируем и докажем

Предложение 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2, и пусть t_1 определяется из уравнения $\mu(t_1)=|\xi|^{-2}$, а t_ξ — из*

$$-\frac{\mu^2(t_\xi)\,\nu(t_\xi)}{\dot\mu(t_\xi)\ln\mu(t_\xi)}=\frac{1}{N|\xi|}. \tag{42}$$

Тогда существуют положительные числа M, N, C_1, C_2, α, β, такие что решение задачи

$$\begin{cases}\left(-D_t^2-\mu^2(t)A^2(t)\xi^2+iB(t)\dfrac{\dot\mu(t)}{\nu(t)\ln\mu(t)}\xi+D(t)\right)u=0, & (43)\\ u(t_1,\xi)=\dfrac{du}{dt}(t_1,\xi)=1, & (44)\end{cases}$$

удовлетворяет неравенствам

$$|u(0,\xi)|^2+\left|\frac{du}{dt}(0,\xi)\right|^2\leqslant C_1, \tag{45}$$

$$|u(t_\xi,\xi)|^2+\left|\frac{du}{dt}(t_\xi,\xi)\right|^2\geqslant C_2(1+|\xi|)^{\frac{\alpha}{\nu(t_\xi)}}, \tag{46}$$

для любых ξ, $|\xi|>M$, и $\operatorname{Re}(iB(0)\xi)\leqslant 0$.

Доказательство Из 1° следует, что при $t\leqslant t_1$ коэффициенты уравнения (43) ограничены равномерно по ξ, $|\xi|>M$. Отсюда получаем (45). Далее, пусть $v_1=u$, $v_2=u_t$, а

$$N=\begin{bmatrix}|\xi|^{1/2}\lambda\sqrt{-\dfrac{\dot\mu\ln\mu}{\nu}}, & 1\\ |\xi|^{1/2}\lambda\sqrt{-\dfrac{\dot\mu\ln\mu}{\nu}}, & -1\end{bmatrix}, \tag{47}$$

где $\lambda=\sqrt{-iB(t)\dfrac{\xi}{|\xi|}}$, $\operatorname{Re}\lambda>0$, $\operatorname{Re}iB(0)\xi\leqslant 0$. Обозначим через $w={}^t(w_1,w_2)$ вектор Nv, где $v={}^t(v_1,v_2)$, тогда для $S=|w_1|^2-|w_2|^2$ нетрудно получить неравенство

$$\frac{dS}{dt}\geqslant 2\operatorname{Re}\lambda\sqrt{-\frac{\dot\mu\ln\mu}{\nu}}|\xi|^{1/2}(|w_1|^2+|w_2|^2)-$$

$$-\frac{2A^2}{|\lambda|^2}\mu^2|\xi|\sqrt{-\frac{\nu}{\dot\mu\ln\mu}}|\xi|^{1/2}(|w_1|^2+|w_2|^2)+\left(\operatorname{Re}\frac{\dot\lambda}{\lambda}-\frac{1}{2}\frac{\dot\nu}{\nu}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\frac{\ddot\mu}{\dot\mu}+\frac{1}{2}\frac{\dot\mu}{\mu}\frac{1}{\ln\mu}\right)(|w_1|^2-|w_2|^2)+2\operatorname{Im}(w_1\overline{w_2})\operatorname{Im}\frac{1}{2}\frac{\dot B}{B}. \tag{48}$$

Но при достаточно больших M и N

$$\frac{1}{|\xi|} \leqslant \mu(t_\xi) \leqslant \frac{1}{|\xi|^{1/2}}, \quad |\xi| > M, \tag{49}$$

а $0 < t_1 < t_\xi$. Далее, при достаточно большом N

$$\operatorname{Re}\lambda + \frac{2A^2}{|\lambda|}|\xi| \cdot \frac{\nu\mu^2}{\mu \ln \mu} > 0, \quad t \in [0, t_\xi]. \tag{50}$$

Следовательно

$$\frac{dS}{dt} > \left[\operatorname{Re}\lambda \sqrt{-\frac{\dot\mu \ln \mu}{\nu}}|\xi|^{1/2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\ddot\mu}{\dot\mu} + \frac{\dot B}{B} + \frac{\dot\mu}{\mu}\frac{1}{\ln\mu} - \frac{\dot\nu}{\nu}\right)\right] S. \tag{51}$$

С другой стороны

$$S(t, \xi) = 4|\xi|^{1/2}\sqrt{-\frac{\dot\mu \ln \mu}{\nu}}\operatorname{Re}(\lambda v_1 \bar v_2). \tag{52}$$

В частности, $S(t_1, \xi) > 0$. Учитывая еще и 2°, из (52) выводим

$$\ln\frac{S(t_\xi, \xi)}{S(t_1, \xi)} > \int_{t_1}^{t_\xi}\left[\operatorname{Re}\lambda\sqrt{-\frac{\dot\mu \ln \mu}{\nu}}\right] dt\,|\xi|^{1/2} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\dot\mu B}{\nu}\ln\mu\right|_{t_1}^{t_\xi}. \tag{53}$$

Таким образом

$$S(t_\xi, \xi) \geqslant \exp\left\{\operatorname{Re}\int_{t_1}^{t_\xi}\lambda\sqrt{-\frac{\dot\mu \ln \mu}{\nu}}\,dt\,|\xi|^{1/2}\right\}\times$$
$$\times\sqrt{-\frac{\dot\mu(t_\xi)\,|B(t_\xi)|\ln\mu(t_\xi)}{\nu(t_\xi)}}\left[\sqrt{-\frac{\dot\mu(t_1)\,|B(t_1)|\ln\mu(t_1)}{\nu(t_1)}}\right]^{-1} S(t_1, \xi). \tag{54}$$

Далее

$$\operatorname{Re}\int_{t_1}^{t_\xi}\lambda\sqrt{-\frac{\dot\mu \ln \mu}{\nu}}\,dt \geqslant \left(\min_{t_1<t<t_\xi}\operatorname{Re}\lambda(t)\right)\int_{t_1}^{t_\xi}\sqrt{-\frac{\dot\mu \ln \mu}{\nu}}\,dt. \tag{55}$$

Поэтому достаточно оценить интеграл, стоящий справа в (55). Очевидно, что он не меньше чем

$$\sqrt{-\frac{\ln\mu(t_1)}{(\ln\mu(t_1))_t}}\int_{t_1}^{t_\xi}\sqrt{\frac{\dot\mu(\ln\mu)_t}{\nu}}\,dt, \tag{56}$$

а интеграл в (56), в свою очередь, не меньше, чем $\sqrt{\frac{\mu(t_\xi)}{\nu(t_\xi)}}$. Таким образом

$$S(t_\xi, \xi) > \exp\left\{k|\xi|^{1/2}\sqrt{-\frac{\mu(t_1)\ln\mu(t_1)}{\dot\mu(t_1)}}\sqrt{\frac{\mu(t_\xi)}{\nu(t_\xi)}}\right\}\times$$

$$\times \sqrt{-\frac{\dot\mu(t_\xi)\ln\mu(t_\xi)}{\nu(t_\xi)}}\sqrt{-\frac{\nu(t_1)}{\dot\mu(t_1)\ln\mu(t_1)}}\left|\frac{B(t_\xi)}{B(t_1)}\right|^{1/2} S(t_1,\xi), \tag{57}$$

и, следовательно

$$|v_1(t_\xi,\xi)|^2+|v_2(t_\xi,\xi)|^2 \geqslant c\exp\left\{k_1\sqrt{-\frac{\mu(t_1)\ln\mu(t_1)}{\dot\mu(t_1)}}\times\right.$$

$$\left.\times\sqrt{-\frac{\dot\mu(t_\xi)\ln\mu(t_\xi)}{\mu(t_\xi)}}\frac{1}{\nu(t_\xi)}\right\}. \tag{58}$$

Но

$$\sqrt{-\frac{\mu(t_1)\ln\mu(t_1)}{\dot\mu(t_1)}}\sqrt{-\frac{\dot\mu(t_\xi)}{\mu(t_\xi)}\ln\mu(t_\xi)} \geqslant c\ln|\xi|,\ c>0, \tag{59}$$

откуда и следует (46). Предложение доказано.

Доказательство теоремы 2. Снова рассматриваем решение задачи (2), (3) вида (41) и применяем предложение 2. Но при достаточно больших $|\xi|$ оно приводит к нарушению оценки (7), что и доказывает теорему.

Предложение 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 3 *и пусть* t_ξ *определяется из* (42), *где* $\nu(t)\equiv 1$ *и* $|\xi|=|\zeta|$. *Тогда решение уравнения*

$$u_{tt}+\left[\mu^2(t)\sum_{i,j=1}^{n}A^{ij}(t)\zeta_i\zeta_j+\dot\mu(t)\ln\mu(t)\sum_{j=1}^{n}B^j(t)\zeta_j+D(t)\right]u=f \tag{60}$$

при достаточно большом M *и при* $t\in[t_\xi, T]$, $|\zeta|>M$ *удовлетворяет неравенству*

$$|u(t,\zeta)|^2+\left|\frac{du}{dt}(t,\zeta)\right|^2 < c(1+|\zeta|)^k\left(|u(t_\xi,\zeta)|^2+\left|\frac{du}{dt}(t_\xi,\zeta)\right|^2+\right.$$

$$\left.+\int_{t_\xi}^{t}|f(s,\zeta)|^2\,ds\right) \tag{61}$$

с постоянными c *и* k, *не зависящими от* ζ, t.

Доказательство. Очевидно, можно считать, что

$$\delta > \frac{3}{n}\max_t|B^j|+3\max|D|,$$

и пусть

$$\lambda^2(t,\zeta)=-\mu^2(t)\sum A^{ij}(t)\zeta_i\zeta_j-\dot\mu(t)\ln\mu(t)\sum B^j(t)\zeta_j-D(t).$$

Тогда при достаточно большом M и при $t\in[t_\xi, T]$

$$\operatorname{Re}\lambda=0,\ |\lambda|^2\geqslant\frac{1}{3}\delta\mu^2(t)|\zeta|^2\geqslant\frac{1}{3}\delta,$$

$$|\lambda|^2\leqslant c(1+|\zeta|)^2,\ \left|\frac{\lambda_t}{\lambda}\right|\leqslant c\frac{\dot\mu(t)}{\mu(t)}.$$

Для $E(t, \zeta) = |\lambda u + u_t|^2 + |\lambda u - u_t|^2$ нетрудно получить неравенство

$$\left|\frac{dE}{dt}\right| \leqslant c\,\frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)}\,E(t, \zeta) + |f(t, \zeta)|^2, \quad t \geqslant t_\varepsilon,$$

откуда и следует утверждение предложения.

Предложение 5. *Пусть выполнены условия предложения* 4. *Тогда решение уравнения* (60) *при достаточно большом* M *и при* $t \in [0, t_\varepsilon]$, $|\zeta| > M$ *удовлетворяет неравенству*

$$|u(t, \zeta)|^2 + \left|\frac{du}{dt}(t, \zeta)\right|^2 \leqslant c\,(1+|\zeta|)^k \left(|u(0, \zeta)|^2 + \left|\frac{du}{dt}(0, \zeta)\right|^2 + \right.$$

$$\left. + \int_0^t |f(s, \zeta)|^2\, ds\right) \tag{62}$$

с постоянными c *и* k, *не зависящими от* ζ, l.

Доказательство почти дословно совпадает с доказательством предложения 1, где надо только положить $\nu(t) = -\dfrac{1}{\ln \mu(t)}$.

Доказательство теоремы 3. Из ограниченности при $|\zeta| \leqslant M$ коэффициентов обыкновенного дифференциального уравнения (60) следует справедливость (62) при всех $t \in [0, T]$. В силу предложений 4 и 5 заключаем, что (62), таким образом, имеет место для любых $\zeta \in R^n$, $t \in [0, T]$. Чтобы завершить доказательство достаточно теперь воспользоваться преобразованием Фурье по x.

§ 4. Примеры

С целью проиллюстрировать теоремы 1, 2, 3 приведем несколько примеров, к которым по тем или иным причинам неприменимы результаты работ [2]—[9].

Пример 1.

$$u_{tt} - A^2 \exp(-2t^{-n})\, u_{xx} + B(-\ln t)^l \exp(-t^{-n})\, u_x = f. \tag{63}$$

Согласно теореме 1 (см. также введение) задача (2), (3) для (63) при $\operatorname{Re} B \neq 0$ является C^∞-корректной тогда и только тогда, когда $l = 0$. При $\operatorname{Re} B = 0$ она корректна в смысле теоремы 3 при любом $l \in R^1$.

Пример 2.

$$u_{tt} - A^2 \exp(-2t^{-n})\, u_{xx} + Bt^{-n-1} \exp(-(1-\alpha)\, t^{-n})\, u_x = f, \tag{64}$$

$0 \leqslant \alpha < \dfrac{1}{2}$. Теорема 1 в этом случае неприменима, а согласно теореме 2 если задача (2), (3) для (64) C^∞-корректна, то $\alpha = 0$. При $\alpha \leqslant 0$ задача C^∞-корректна, согласно [2], а при $\alpha \geqslant 1$ коэффициент оператора имеет в $t = 0$ особенность. Случай $\dfrac{1}{2} \leqslant \alpha < 1$ остается открытым.

Пример 3.

$$u_{tt} - A^2 t^{2k} u_{xx} + B(-\ln t)^l t^{k-1} u_x = f, \tag{65}$$

где $k > 1$ — необязательно целое число. Так как коэффициенты оператора не являются бесконечно гладкими функциями результаты работ [6], [9] к (65) неприменимы. Для $l \leqslant 1$ согласно теореме 1 задача (2), (3) для (65) при $\operatorname{Re} B \neq 0$ является C^∞-корректной тогда и только тогда, когда $l \leqslant 0$. При $\operatorname{Re} B = 0$, $l \leqslant 1$, задача корректна согласно теореме 3.

Пример 4.

$$u_{tt} - A^2(t)\mu^2(t) u_{xx} + B(t)\dot{\mu}(t) t^{-l} u_x = f, \tag{66}$$

где $A(t) > 0$, $B(0) \neq 0$, $l \in R^1$, $\mu(t) = \underbrace{\exp(-\exp(\exp(\cdots(\exp}_{k} t^{-n})\cdots))$,

$n > 0$,

$$|\dot{A}|, |\dot{B}| \leqslant \text{const} \cdot t^{-1} \underbrace{(-\ln \mu)(\ln(-\ln \mu))\cdots(\ln\ln\cdots\ln(-\ln \mu))}_{k}.$$

Согласно теореме 1 (см. также введение) задача (2), (3) для (66) при $\operatorname{Re} B(0) \neq 0$ является C^∞-корректной тогда и только тогда, когда $l \leqslant 0$. При $\operatorname{Re} B(t) \equiv 0$ она корректна в смысле теоремы 3 при любом l. Случай, когда $\operatorname{Re} B(0) = 0$, но $\operatorname{Re} B(t) \not\equiv 0$ остается открытым.

Пример 5.

$$u_{tt} - A^2 \exp(-2t^{-n}) u_{xx} + Bt^{-l-n-1} \underbrace{(\ln(\ln\cdots\ln t))}_{m} \exp(-t^{-n}) u_x = f, \tag{67}$$

где $n > 0$, $l \in R^1$. Согласно теореме 1 задача (2), (3) для (67) при $\operatorname{Re} B \neq 0$ является C^∞-корректной тогда и только тогда, когда $l \leqslant 0$, $m = 0$. При $\operatorname{Re} B = 0$ согласно теоремам 2, 3 задача корректна тогда и только тогда, когда $l \leqslant n$, $m = 0$, либо $l < n$, $m > 0$.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 8.V.1980

Կ. Հ. ՅԱՂՋՅԱՆ. Թույլ հիպերբոլական հավասարումների համար Կոշու խնդրի կորեկտություն մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում ուսումնասիրվում է փոփոխական պատիկությամբ խարակտերիստիկ արմատներով երկրորդ կարգի հիպերբոլիկ հավասարման համար Կոշու խնդրի C^∞-կորեկտությունը։ Խարակտերիստիկ արմատները կարող են համընկնել միայն սկզբնական հիպերհարթության վրա։ Բավականին ընդհանուր դասերի հավասարումների համար ապացուցված է, որ Հ. Բ. Ներսիսյանի կողմից նախկինում նշված բավարար պայմանները հանդիսանում են C^∞-կորեկտության համար նաև անհրաժեշտ պայմաններ։ Կամայելքս գործակիցների դեպքում բերված է նոր բավարար պայման և ապացուցված է նրա անհրաժեշտությունը։

K. H. YAGDJIAN. *On correctness of the Cauchy problem for non-strictly hyperbolic equations* (summary)

The paper deals with the Cauchy problem for equations with characteristic roots of variable multiplicity. For a wide class of such operators it is proved that the sufficient condition of [2] — [5] is also necessary for the problem to be C^∞ well-posed. In particular, a new necessary and sufficient condition for equations with a complex coefficients is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *P. D. Lax*. Asymtotic solutions of oscillatory initial value problems, Duke Math. J., 24, № 4, 1957, 627—646.
2. *А. Б. Нерсесян*. О корректности задачи Коши для вырождающихся гиперболических уравнений второго порядка, ДАН СССР, 166, № 6, 1966, 1288—1291.
3. *А. Б. Нерсесян*. О задаче Коши для вырождающихся гиперболических уравнений второго порядка, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», 3, № 2, 1968, 79—100.
4. *А. Б. Нерсесян, А. О. Оганесян*. О задаче Коши для слабо гиперболических уравнений, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», VIII, № 3, 1973, 255—273.
5. *А. Б. Нерсесян, Г. Р. Оганесян*. О задаче Коши для слабо гиперболических уравнений, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», IX, № 2, 1974, 149—165.
6. *В. Я. Иврий, Б. М. Петков*. Необходимые условия корректности задачи Коши для нестрого гиперболических уравнений, УМН, 29, вып. 5, 1974, 3—70.
7. *S. Tarama*. Un exemple dans le probleme de Cauchy pour les equations faiblement hyperboliques. Publ. RIMS, Kyoto Univ., 15, № 2, 1979, 455—468.
8. *S. Mizohata*. Une remrque sur le probleme de Cauchy hyperbolique bien pose (non publie).
9. *S. Alinhac*. Parametrix et propagation des singularites pour un probleme de Cauchy a multipliciti variable, Asterisque, 34—35, 3—26.