ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XV, № 6, 1980 Математика

А. М. ДЖРБАШЯН, Г. В. МИКАЕЛЯН

ПОСТРОЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ОДНОГО СЕМЕЙСТВА ФУНКЦИЙ ТИПА БЛЯШКЕ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Введение

1°. В своей давней работе [1] (см. также [2]) М. М. Джрбашян открыл весьма общий класс формул типа Иенсена-Неванлинна, зависящих от непрерывного параметра α $(0<\alpha<+\infty)$ и совпадающих с классической формулой Иенсена-Неванлинна при $\alpha=0$. Эти формулы, связывая значения мероморфной в единичном круге $D=\{z;\ |z|<1\}$ функции $f(z)$ с ее нулями $\{a_\mu\}$ и полюсами $\{b_\nu\}$, как и в классическом случае порождали некие факторы — аналоги известных факторов Бляшке, зависящие от параметра α $(0<\alpha<+\infty)$.

Факторы, введенные в работе [1], имеют вид

$$A_\alpha(z;\zeta)=\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)\exp\{-U_\alpha(z;\zeta)\},\tag{1}$$

где функция

$$U_\alpha(z;\zeta)=\int\limits_{|\zeta|^2}^{1}\frac{(1-t)^\alpha}{t}\,dt-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+n)}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^n\int\limits_0^{|\zeta|^2}(1-t)^\alpha\,t^{n-1}\,dt\tag{2}$$

при любых α $(0<\alpha<+\infty)$ и $\zeta\in D$ аналитична в единичном круге D.

Там же было установлено, что в единичном круге D, кроме отрезка $l(\zeta)=\{z;\ |\zeta|\leqslant|z|<1,\ \arg z=\arg\zeta\}$ фактор $A_\alpha(z;\zeta)$ допускает также представление

$$A_\alpha(z;\zeta)=\exp\left\{-\int\limits_{|\zeta|^2}^{1}\frac{(1-t)^\alpha}{\left(1-\dfrac{z}{\zeta}\,t\right)^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\right\}\ (0<\alpha<+\infty).\tag{3}$$

Далее, было доказано, что для сходимости бесконечного произведения

$$\pi_\alpha(z)=\prod_{k=1}^{\infty}A_\alpha(z;\ z_k);\ 0<\alpha<+\infty\tag{4}$$

необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{z_k\}_1^\infty\subset D$ удовлетворяла условию

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)^{1+\varepsilon}<+\infty. \tag{5}$$

В частности, когда $\varepsilon\to 0$, предел произведения $\pi_\varepsilon(z)$ отличался от известной функции Бляшке лишь постоянным множителем

$$\pi_0(z)=c_0\prod_{k=1}^{\infty}\frac{z_k-z}{1-\bar z_k z}\frac{|z_k|}{z_k},\ c_0=\prod_{k=1}^{\infty}|z_k|. \tag{6}$$

На дальнейших результатах, полученных в работах [1] и [2], а также на родственных окончательных результатах (см. [3], гл. IX, а также [4]) М. М. Джрбашяна мы останавливаться не будем.

2°. В канонической факторизации функций класса H^p, а также функций ограниченного вида в полуплоскости $G^{(+)}=\{z;\ \mathrm{Im}\,z>0\}$ существенную роль играют две функции, нули $\{z_k\}_1^\infty$ которых лежат в $G^{(+)}$ и которые также принято называть функциями Бляшке:

$$\Pi(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{z-z_k}{z-\bar z_k}\frac{|1+z_k^2|}{1+z_k^2}\ \text{ и }\ B(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1-\dfrac{z}{z_k}}{1-\dfrac{z}{\bar z_k}}. \tag{7}$$

Первая из этих функций непосредственно может быть получена из функции Бляшке для единичного круга D путем отображения его на полуплоскость $G^{(+)}$. Это бесконечное произведение сходится в том и только в том случае, если сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}\,z_k}{1+|z_k|^2}.$$

Для сходимости второго произведения достаточно выполнения условия

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}\,z_k}{|z_k|^2}\equiv\sum_{k=1}^{\infty}\left|\mathrm{Im}\,\frac{1}{z_k}\right|<+\infty \tag{8}$$

(а если точки последовательности $\{z_k\}_1^\infty\subset G^{(+)}$ лежат вне некоторой окрестности начала координат, последнее условие будет также необходимо). Это произведение в свое время было введено Р. Неванлинной, оно играет важную роль, например, в теории целых функций так называемого класса A (см. [5], гл. 5).

Заметим, что при отображении $w=z^{-1}$ $(w_k=z_k^{-1})$, переводящим верхнюю полуплоскость $G^{(+)}$ в нижнюю — $G^{(-)}=\{w;\ \mathrm{Im}\,w<0\}$, произведение $B(z)$ принимает вид

$$B(w)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{w-w_k}{w-\bar w_k}, \tag{9}$$

причем $\{w_k\}_1^\infty\subset G^{(-)}$, и для сходимости последнего произведения в $G^{(-)}$ достаточно выполнения условия

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\operatorname{Im} w_k| < +\infty. \tag{10}$$

3°. На основании указанных выше фактов и в связи со специальной аналогией, наблюдаемой между классическими теориями факторизации функций, мероморфных в круге и в полуплоскости, было естественно попытаться построить аналог функции $\pi_\alpha(z)$ для полуплоскости $G^{(-)}$. Причем такой аналог, который сходился при выполнении условия

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\operatorname{Im} w_k|^{1+\alpha} < +\infty$$

и в каком-то естественном смысле обладал свойствами, аналогичными свойствам функции $\pi_\alpha(z)$.

Указанная задача представлялась тем более естественной еще и потому, что первым из соавторов в работе [6] был построен полуплоскостной аналог более совершенной, чем $\pi_\alpha(z)$ функции типа Бляшке, введенной также М. М. Джрбашяном (см., например, [3], гл. IX).

Данное исследование проводится методами, разработанными впервые в работе [6]. Приводимые в настоящей статье результаты во многом аналогичны результатам этой работы. При этом, факторы построенного в статье произведения примечательны тем, что для целочисленных значений параметра α $(-1 < \alpha < +\infty)$ они, как и факторы $\pi_\alpha(z)$, имеют структуру классических факторов Вейерштрасса.

4°. В настоящей статье, как и в работе [6], для достижения поставленной цели был применен подход, основанный по существу на правдоподобном рассуждении. Суть этого рассуждения заключается в следующем.

Как нетрудно заметить, факторы $A_\alpha(z; \zeta)$ $(0 < \alpha < +\infty)$, а также подынтегральные функции в их представлении (3) инвариантны относительно переменных z и ζ при вращении единичного круга D вокруг начала координат. Одновременно, относительно переменных w и w_k при параллельном вещественной оси перемещении полуплоскости $G^{(-)}$ инвариантны факторы произведения (9).

Запишем фактор произведения (9) в виде интеграла с инвариантной относительно w и w_k при параллельном перемещении $G^{(-)}$ подынтегральной функцией

$$a_0(w; w_k) \equiv \frac{w - w_k}{w - \overline{w}_k} = \exp\left\{-\int_0^{2\operatorname{Im}\overline{w}_k} \frac{d\tau}{\tau + i(w - w_k)}\right\}. \tag{11}$$

Определим теперь искомые факторы по аналогии с представлением (3) факторов $A_\alpha(z; \zeta)$ следующим образом:

$$a_\alpha(w; w_k) \equiv \exp\left\{-\int_0^{2\operatorname{Im}\overline{w}_k} \frac{\tau^\alpha d\tau}{[\tau + i(w - w_k)]^{1+\alpha}}\right\}, \quad -1 < \alpha < +\infty. \tag{12}$$

В приводимых ниже теоремах устанавливается, что предположение (12) относительно вида искомых факторов не только правдоподобно, но и вполне оправдано.

§ 1. Простейшие свойства функций $a_\alpha(w;\ w_k)$

1.1. Пусть $w_k \equiv u_k + iv_k \in G^{(-)}$ — любая фиксированная точка. Запишем функцию (11) в виде

$$a_0(w;\ w_k) = \exp\{-\omega_0(w;\ w_k)\}, \tag{1.1}$$

$$\omega_0(w;\ w_k) = \int\limits_0^{2|v_k|} \frac{d\tau}{\tau + i(w - w_k)}. \tag{1.1'}$$

Легко видеть, что при этом

$$\omega_0(w;\ w_k) = \log[2|v_k| + i(w - w_k)] - \log[i(w - w_k)] = \tag{1.2}$$

$$= \log\frac{w - \overline{w}_k}{w - w_k}$$

и, следовательно, мы имеем

$$a_0(w;\ w_k) = \frac{w - w_k}{w - \overline{w}_k}.$$

Далее, в предположении, что α $(-1 < \alpha < +\infty)$ произвольное, введем в рассмотрение также функции

$$a_\alpha(w;\ w_k) = \exp\{-\omega_\alpha(w;\ w_k)\}, \tag{1.3}$$

$$\omega_\alpha(w;\ w_k) = \int\limits_0^{2|v_k|} \frac{\tau^\alpha\, d\tau}{[\tau + i(w - w_k)]^{1+\alpha}}. \tag{1.3'}$$

Легко видеть, что при $\alpha > 0$ интегрированием по частям мы получим

$$\omega_{\alpha-1}(w;\ w_k) = \frac{1}{\alpha}\left[\frac{\tau}{\tau + i(w - w_k)}\right]^\alpha \Bigg|_0^{2|v_k|} +$$

$$+ \int\limits_0^{2|v_k|} \frac{\tau^\alpha\, d\tau}{[\tau + i(w - w_k)]^{1+\alpha}},$$

т. е.

$$\omega_\alpha(w;\ w_k) = \omega_{\alpha-1}(w;\ w_k) - \frac{1}{\alpha}\left[\frac{2|v_k|}{2|v_k| + i(w - w_k)}\right]^\alpha.$$

Таким образом, мы пришли к рекуррентной формуле

$$\omega_\alpha(w;\ w_k) = \omega_{\alpha-1}(w;\ w_k) - \frac{1}{\alpha}\left[-\frac{2iv_k}{w - \overline{w}_k}\right]^\alpha,\quad 0 < \alpha < +\infty. \tag{1.4}$$

В случае, когда $\alpha = p \geqslant 1$ — целое число, из этой формулы нетрудно получить представление

$$\omega_p(w; w_k) = \log\frac{w-\overline{w}_k}{w-w_k} - \sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n}\left[-\frac{2iv_k}{w-\overline{w}_k}\right]^n.$$

Отсюда и из (1.3) мы приходим к формуле

$$a_p(w; w_k) = \frac{w-w_k}{w-\overline{w}_k}\exp\left\{\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n}\left[-\frac{2iv_k}{w-\overline{w}_k}\right]^n\right\}, \tag{1.5}$$

справедливой при любом $p \geqslant 1$ целом.

1.2. Из формул (1.1), (1.1′) и (1.3), (1.3′), как нетрудно убедиться, следует, что при любом α $(-1<\alpha<+\infty)$ справедлива формула

$$a_\alpha(w; w_k) = a_0(w; w_k)\exp\{\omega_0(w; w_k)-\omega_\alpha(w; w_k)\}. \tag{1.6}$$

На основании этой формулы доказывается следующая

Теорема 1.1. *При любых* α $(-1<\alpha<+\infty)$ *и* $w_k = u_k + iv_k \in G^{(-)}$ *функция* $a_\alpha(w; w_k)$ *аналитична в разрезанной плоскости* $C\diagdown\{w=u_k+ih;\ 0\leqslant h<+\infty\}$ *и имеет нуль, притом первого порядка, только в точке* $w_k \in G^{(-)}$*.

Доказательство. При $w\overline{\in}[w_k; \overline{w}_k]$ (т. е. w не принадлежащем замкнутому отрезку, соединяющему точки w_k и $\overline{w}_k$) из формул (1.1), (1.1′) и (1.3), (1.3′) мы придем к разложению вида

$$\omega_\alpha(w; w_k)-\omega_0(w; w_k) =$$

$$= \int_0^{+\infty}\left[\left\{\frac{\tau}{\tau+i(w-w_k)}\right]^\alpha - 1\right\}\frac{d\tau}{\tau+i(w-w_k)} -$$

$$-\int_{2|v_k|}^{+\infty}\left\{\left[\frac{\tau}{\tau+i(w-\overline{w}_k)}\right]^\alpha - 1\right\}\frac{d\tau}{\tau+i(w-\overline{w}_k)} \equiv$$

$$\equiv I_1(w; w_k) + I_2(w; w_k), \tag{1.7}$$

где последние два интервала сходятся, поскольку при $\tau\to+\infty$

$$\left[\frac{\tau}{\tau+i(w-w_k)}\right]^\alpha - 1 \sim \alpha\left[\frac{\tau}{\tau+i(w-w_k)} - 1\right] = -i\alpha\frac{w-w_k}{\tau+i(w-w_k)}.$$

Заметим, что подынтегральная функция в I_2 аналитична в разрезанной плоскости $C\diagdown\{w=u_k+ih;\ 0\leqslant h<+\infty\}$. Одновременно, в силу последнего соотношения этот интеграл равномерно сходится в той же области, и, таким образом, функция $I_2(w; w_k)$ аналитична в разрезанной плоскости $C\diagdown\{w=u_k+ih;\ 0\leqslant h<+\infty\}$.

---

* Область $C\diagdown\{w=u_k+ih;\ 0<h<+\infty\}$ содержит в себе нижнюю полуплоскость $G^{(-)}$. Отметим, однако, что аналитичность функции $a_\alpha(w; w_k)$ $(-1<\alpha<+\infty)$ в $G^{(-)}$ не очевидна, так как все представления (1.3), (1.3′) подынтегральная функция разветвляется на полупрямой $\{w=w_k+ih;\ 0<h<+\infty\}$, частично содержащейся в $G^{(-)}$.

Далее, мы убедимся, что интеграл I_1 в разложении (1.7) — постоянная, и в силу (1.6) и (1.7) теорема будет доказана.

Повторяя рассуждения, проведенные для I_2 для интеграла I_1, нетрудно установить аналитичность функции $I_1(w;\ w_k)$ в разрезанной плоскости $\mathbf{C}\setminus\{w_k+ih;\ 0<h<+\infty\}$. Одновременно, на полупрямой $\{w=w_k-ih;\ 0<h<+\infty\}$ мы имеем

$$I_1(w_k-ih;\ w_k)=\int\limits_0^{+\infty}\left[\left(\frac{\tau}{\tau+h}\right)^{\alpha}-1\right]\frac{d\tau}{\tau+h}=$$

$$=\int\limits_0^{+\infty}\left[\left(\frac{x}{1+x}\right)^{\alpha}-1\right]\frac{dx}{1+x}=\mathrm{const}.$$

1.3. Для дальнейшего изложения важна следующая

Лемма 1.1. *При любых* $\alpha\,(-1<\alpha<+\infty)$ *и* $\xi\in(-\infty;\ +\infty)$ *справедливо соотношение*

$$\lim_{\eta\to+0}\frac{\log a_\alpha(w;\ \xi-i\eta)}{\eta^{1+\alpha}}=-\frac{2^{1+\alpha}}{1+\alpha}\,\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(1+\alpha)}}{(w-\xi)^{1+\alpha}},\ w\in G^{(-)}. \qquad (1.8)$$

Доказательство. В силу формул (1.3) и (1.3′) заменой переменной $\tau=2\eta x$ при $\eta>0$ мы получим представление

$$\log a_\alpha(w;\ \xi-i\eta)=-2^{1+\alpha}\eta^{1+\alpha}\int\limits_0^1\frac{(1-x)^{\alpha}\,dx}{[\eta(1+2x)+i(w-\xi)]^{1+\alpha}}.$$

Отсюда соотношение (1.8) леммы следует непосредственно.

На основании теоремы 1.1 и предыдущей леммы доказывается следующая основная

Теорема 1.2. *Пусть последовательность точек* $\{w_k\}_1^\infty\subset G^{(-)}$ *при некотором* $\alpha\,(-1<\alpha<+\infty)$ *удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\mathrm{Im}\,w_k|^{1+\alpha}\equiv\sum_{k=1}^{\infty}|v_k|^{1+\alpha}<+\infty. \qquad (1.9)$$

Тогда бесконечное произведение

$$A_\alpha(w)=\prod_{k=1}^{\infty}a_\alpha(w;\ w_k) \qquad (1.10)$$

абсолютно и равномерно сходится внутри полуплоскости $G^{(-)}$ *и представляет аналитическую в* $G^{(-)}$ *функцию, обращающуюся в нуль лишь в точках последовательности* $\{w_k\}_1^\infty$. *Причем в каждой точке* $w_j\in\{w_k\}_1^\infty$ *функция* $A_\alpha(w)$ *имеет нуль кратности, равной кратности появления точки* w_j *в последовательности* $\{w_k\}_1^\infty$.

Доказательство. Пусть $K\subset G^{(-)}$ — какой-либо компакт и $w\in K$. Тогда в силу соотношения (1.8) леммы 1 при $\eta\to+0$ мы, очевидно, имеем

$$|\log a_\alpha(w;\ \xi - i\eta)| \leqslant O(\eta^{1+\alpha}) \frac{2^{1+\alpha}}{1+\alpha} [\min_{\substack{w \in K \\ -\infty < \xi < +\infty}} |w - \xi|]^{-1-\alpha} + o(\eta^{1+\alpha}) =$$

$$= O(\eta^{1+\alpha}) + o(\eta^{1+\alpha}). \tag{1.11}$$

Из этой оценки следует, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\log a_\alpha(w;\ w_k)|,$$

кроме конечного числа своих первых членов (для которых $|v_k| \geqslant \min_{w \in K} |\operatorname{Im} w|$ и, следовательно, возможно включение $w_k \in K$), равномерно сходится на компакте $K \subset G^{(-)}$.

Аналитичность произведения (1.10) и утверждения теоремы относительно его нулей следуют из его равномерной сходимости и утверждения теоремы 1.1.

Замечание. При $|\xi| < M < +\infty$ из соотношения (1.8) нетрудно вывести оценку, обратную (1.11). А именно, в этом случае при $\eta \to +0$ справедлива оценка

$$|\log a_\alpha(w;\ \xi - i\eta)| \geqslant C\eta^{1+\alpha} \frac{2^{1+\alpha}}{1+\alpha} [\max_{\substack{w \in K \\ |\xi| < M}} |w - \xi|]^{-1-\alpha} +$$

$$+ o(\eta^{1+\alpha}) = C_1 \eta^{1+\alpha} + o(\eta^{1+\alpha})$$

(C и C_1 — положительные постоянные), при помощи которой доказывается, что если

$$\sup_{k \geqslant 1} |u_k| = M < +\infty,$$

то условие (1.9) одновременно и необходимо для сходимости произведения (1.10)

§ 2. Свойства функций $\log |a_\alpha(w;\ w_k)|$ и $\log |A_\alpha(w)|$, выраженные посредством оператора интегродифференцирования в смысле Г. Вейля

В этом параграфе мы к функциям $\log a_\alpha(w;\ w_k)$ и $\log A_\alpha(w)$ $(-1 < \alpha < +\infty)$ применим оператор $W^{-\alpha}$ интегродифференцирования в смысле Вейля, а затем установим основные свойства функций

$$W^{-\alpha} \log |a_\alpha(w;\ w_k)| \text{ и } W^{-\alpha} \log |A_\alpha(w)| \ (-1 < \alpha < +\infty).$$

2.1. Определим оператор $W^{-\alpha}$ интегродифференцирования в смысле Г. Вейля.

Пусть $w = u + iv \in \mathbb{C}$ — любая точка, и функция $f(\omega)$ определена почти всюду на полупрямой $\Gamma(w;\ \infty) = \{\omega;\ \omega = w - i\sigma;\ 0 < \sigma < +\infty\}$. Формально мы считаем, что

$$W^{-\alpha} f(w) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{v} (v-t)^{\alpha-1} f(u+it)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{+\infty} \sigma^{\alpha-1} f(w-i\sigma)\, d\sigma; \quad 0<\alpha<+\infty, \tag{2.1}$$

$$W^{0} f(w) \equiv f(w), \tag{2.2}$$

$$W^{\alpha} f(w) \equiv W^{-(p-\alpha)} \left\{ \frac{\partial^{p}}{\partial v^{p}} f(u+iv) \right\}; \tag{2.3}$$

p — целое, $0 \leqslant p-1 < \alpha \leqslant p < +\infty$. Для дальнейшего изложения важна следующая

Лемма 2.1. *При любых* α $(-1<\alpha<+\infty)$ *и* $w_k \in G^{(-)}$

1° *интеграл* $W^{-\alpha} \log a_\alpha (w; w_k)$ *сходится вне полупрямой* $\{w;\ w = w_k + ih;\ 0 < h < +\infty\}$ *и представляет аналитическую вне прямолинейного отрезка* $[w_k;\ \overline{w}_k]$ *функцию.*

2° *при* $w \overline{\in} [w_k;\ \overline{w}_k]$ *справедливы представления*

$$W^{-\alpha} \log a_\alpha (w; w_k) = -\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{0}^{2|v_k|} \frac{\tau^{\alpha}\, d\tau}{\tau + i(w-w_k)}, \tag{2.4}$$

$$W^{-\alpha} \log |a_\alpha (w; w_k)| = \operatorname{Re} W^{-\alpha} \log a_\alpha (w; w_k) =$$

$$= -\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{0}^{2|v_k|} \frac{(\tau - v + v_k)\, \tau^{\alpha}\, d\tau}{(\tau - v + v_k)^2 + (u-u_k)^2}. \tag{2.5}$$

Доказательство. В силу формул (1.3), (1.3′) и (2.2) в случае $\alpha = 0$ утверждения леммы очевидны. Для доказательства леммы в случае $\alpha \neq 0$ рассмотрим по отдельности случаи $0<\alpha<+\infty$ и $-1<\alpha<0$.

Предварительно приведем одну формулу, которая нам понадобится в доказательстве леммы.

Пусть $0<\alpha<+\infty$, тогда, как нетрудно убедиться, при $z \neq -h$ $(0 \leqslant h < +\infty)$ справедлива формула

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sigma^{\alpha-1}\, d\sigma}{(z+\sigma)^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha z}. \tag{2.6}$$

а) Пусть $0<\alpha<+\infty$. Тогда в силу формул (1.3), (1.3′), (2.1) и (2.6) при $w \neq w_k + ih$ $(0 \leqslant h < +\infty)$ мы будем иметь

$$W^{-\alpha} \log a_\alpha (w; w_k) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{+\infty} \sigma^{\alpha-1}\, d\sigma \int_{0}^{2|v_k|} \frac{\tau^{\alpha}\, d\tau}{[\tau + i(w-w_k) + \sigma]^{1+\alpha}} =$$

$$= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^{2|v_k|} \tau^\alpha d\tau \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sigma^{\alpha-1}\, d\sigma}{[\tau + i(w - w_k) + \sigma]^{1+\alpha}} =$$

$$= -\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int\limits_0^{2|v_k|} \frac{\tau^\alpha d\tau}{\tau + i(w - w_k)}.$$

Таким образом, справедлива формула (2.4).

б) Пусть $-1 < \alpha < 0$. Тогда в силу формул (1.3), (1.3′), (2.3), (2.1) и (2.6) при $w \neq w_k + ih$ $(0 \leqslant h < +\infty)$ мы будем иметь

$$W^{-\alpha} \log a_\alpha (u + iv;\ w_k) = W^{-(1+\alpha)} \frac{\partial}{\partial v} \log a_\alpha (u + iv;\ w_k) =$$

$$= -\frac{1+\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\int\limits_0^{+\infty} \sigma^\alpha d\sigma \int\limits_0^{2|v_k|} \frac{\tau^\alpha d\tau}{[\tau + i(w - w_k) + \sigma]^{2+\alpha}} =$$

$$= -\frac{1+\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\int\limits_0^{2|v_k|} \tau^\alpha d\tau \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sigma^\alpha d\sigma}{[\tau + i(w - w_k) + \sigma]^{2+\alpha}} =$$

$$= -\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int\limits_0^{2|v_k|} \frac{\tau^\alpha d\tau}{\tau + i(w - w_k)}.$$

Таким образом, при любых $\alpha\,(-1 < \alpha < +\infty)$ и $w \neq w_k + ih$ $(0 \leqslant h < +\infty)$ нами доказана формула (2.4). Из анализа этой формулы становится очевидным утверждение 1° нашей леммы.

Что касается равенств (2.5), то левое равенство очевидно в силу определений (2.1) и (2.3) оператора $W^{-\alpha}$, а правое непосредственно следует из формулы (2.4).

Следующая теорема устанавливает одно интегральное свойство функции $W^{-\alpha} \log a_\alpha (w;\ w_k)$.

Теорема 2.2. *При любых* α $(-1 < \alpha < +\infty)$, $w_k = u_k + iv_k \in G^{(-)}$ *и* $v < 0$ *справедлива оценка*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |W^{-\alpha} \log |a_\alpha (u + iv;\ w_k)||\, du \leqslant \pi \frac{2^{1+\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)} |v_k|^{1+\alpha}. \tag{2.7}$$

Доказательство. Из формул (1.3), (1.3′) и (2.5) мы получаем, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |W^{-\alpha} \log |a_\alpha (u + iv;\ w_k)||\, du \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} du \int\limits_0^{2|v_k|} \frac{|\tau - v + v_k|\, \tau^\alpha}{(\tau - v + v_k)^2 + (u - u_k)^2}\, d\tau =$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^{2|v_k|}\tau^\alpha|\tau-v+v_k|\,d\tau\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{(\tau-v+v_k)^2+(u-u_k)^2}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}\right)\int_0^{2|v_k|}\tau^\alpha\,d\tau=\pi\,\frac{2^{1+\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)}|v_k|^{1+\alpha}.$$

2.2. В этом пункте мы будем полагать, что $\{w_k\}_1^\infty\equiv\{u_k+iv_k\}_1^\infty\subset G^{(-)}$ — произвольная последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условию

$$\sum_{k=1}^\infty|\mathrm{Im}\,w_k|^{1+\alpha}\equiv\sum_{k=1}^\infty|v_k|^{1+\alpha}<+\infty \tag{2.8}$$

при наперед заданном числе α $(-1<\alpha<+\infty)$.

Через $G_\rho^{(-)}$ будем обозначать полуплоскость, лежащую ниже вещественной оси, удаленную от нее на расстояние $|\rho|$ — $G_\rho^{(-)}=\{w;\ \mathrm{Im}\,w<\rho<0\}$. А через $\overline{G_\rho^{(-)}}$ будем обозначать соответствующую замкнутую полуплоскость — $\overline{G_\rho^{(-)}}=\{w;\ \mathrm{Im}\,w\leqslant\rho<0\}$.

Заметим, что в силу условия (2.8) $|v_k|\to 0$ при $k\to+\infty$ и, следовательно, выбором числа $N\equiv N(\rho)\geqslant 1$ можно добиться того, чтобы

$$w_k\overline{\in}\,\overline{G_\rho^{(-)}}\ \text{при}\ k\geqslant N(\rho).$$

Далее, введем в рассмотрение функцию

$$\psi_\alpha(w)\equiv\log|A_\alpha(w)|-\sum_{k=1}^{N(\rho)}\log|a_\alpha(w;w_k)|=$$

$$=\sum_{k=N(\rho)+1}^\infty\log|a_\alpha(w;w_k)|;\ -1<\alpha<+\infty. \tag{2.9}$$

Справедлива следующая

Лемма 2.2. *При любом* α $(-1<\alpha<+\infty)$ *ряд*

$$\sum_{k=N(\rho)+1}^\infty\log|a_\alpha(w;w_k)| \tag{2.10}$$

абсолютно и равномерно сходится в замкнутой полуплоскости $\overline{G_\rho^{(-)}}$.

Доказательство. Опираясь на формулу (2.5), учитывая, что при $k\geqslant N(\rho)$ мы имеем $|v_k|<|\rho|$, при любых $k\geqslant N(\rho)$ и $w=u+iv\in G_\rho^{(-)}$ мы получаем неравенства

$$|W^{-\alpha}\log|a_\alpha(w;w_k)||\leqslant\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^{2|v_k|}\frac{|\tau-v+v_k|\,\tau^\alpha\,d\tau}{(\tau-v+v_k)^2+(u-u_k)^2}<$$

$$\leqslant \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^{2|v_k|} \frac{\tau^\alpha d\tau}{|v_k - v + \tau|} < \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)(|\rho|-\delta)} \int_0^{2|v_k|} \tau^\alpha d\tau =$$

$$= \frac{2^{1+\alpha} |v_k|^{1+\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)(|\rho|-\delta)}, \text{ где } \delta = \max_{k > N(\rho)+1} |v_k|.$$

Утверждение леммы очевидно в силу условия (2.8).

Для доказательства аналога теоремы 2.2 для произведения $A_\alpha(w)$ $(-1 < \alpha < +\infty)$ нам необходима также следующая

Лемма 2.3. *При любых* α $(-1 < \alpha < +\infty)$ *и* $w \in G_\rho^{(-)}$ *интеграл* $W^{-\alpha}\psi_\alpha(w)$ *сходится, причем справедливо равенство*

$$W^{-\alpha}\psi_\alpha(w) = \sum_{k=N(\rho)+1}^{\infty} W^{-\alpha} \log |a_\alpha(w; w_k)|. \tag{2.11}$$

Доказательство леммы основано на следующих двух неравенствах, справедливых при любых α $(-1 < \alpha < +\infty)$, $w = u + iv \in G_\rho^{(-)}$ и $k \geqslant N(\rho) + 1$:

$$|\log |a_\alpha(u+iv; w_k)|| \leqslant \frac{2^{1+\alpha}|v_k|^{1+\alpha}}{(|v|-\delta)^{1+\alpha}}, \tag{2.12}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial v} \log |a_\alpha(u+iv; w_k)|\right| \leqslant (1+\alpha) \frac{2^{1+\alpha}|v_k|^{1+\alpha}}{(|v|-\delta)^{2+\alpha}}, \tag{2.13}$$

где $\delta = \max\limits_{k > N(\rho)+1} |v_k|$.

Предварительно докажем эти два неравенства.

Поскольку при $w = u + iv \in G_\rho^{(-)}$ и $k > N(\rho) + 1$

$$|\tau - v + v_k + i(u - u_k)| \geqslant |\tau - v + v_k| \geqslant |v - v_k| \geqslant |v| - |v_k| \geqslant |v| - \delta,$$

воспользовавшись определением (1.3), (1.3′) функции $a_\alpha(w; w_k)$ мы будем иметь:

$$|\log |a_\alpha(w; w_k)|| \leqslant |\log a_\alpha(w; w_k)| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{2|v_k|} \frac{\tau^\alpha d\tau}{|\tau - v + v_k + i(u-u_k)|^{1+\alpha}} \leqslant \frac{1}{(|v|-\delta)^{1+\alpha}} \int_0^{2|v_k|} \tau^\alpha d\tau.$$

Таким образом, оценка (2.12) доказана.

Для доказательства оценки (2.13) воспользуемся опять определением (1.3), (1.3′) функции $a_\alpha(w; w_k)$. Мы будем иметь

$$\left|\frac{\partial}{\partial v} \log |a_\alpha(u+iv; w_k)|\right| \leqslant \left|\frac{\partial}{\partial v} \log a_\alpha(u+iv; w_k)\right| =$$

$$= (1+\alpha) \left| \int_0^{2|v_k|} \frac{\tau^\alpha d\tau}{[\tau - v + v_k + i(u-u_k)]^{2+\alpha}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant(1+\alpha)\int\limits_0^{2|v_k|}\frac{\tau^\alpha\,d\tau}{|\tau-v+v_k+i(u-u_k)|^{2+\alpha}}\leqslant(1+\alpha)\frac{2^{1+\alpha}|v_k|^{1+\alpha}}{(|v|-\delta)^{2+\alpha}}.$$

Заметим, что в случае $\alpha=0$ лемма по существу уже доказана (см. лемму 2.2). Для доказательства же леммы при $\alpha\neq0$ целесообразно рассмотреть в отдельности два случая $-0<\alpha<+\infty$ и $-1<\alpha<0$.

а) Пусть $0<\alpha<+\infty$, тогда из оценки (2.13) следует, что при любом $w\in G_\rho^{(-)}$ интеграл

$$I(w)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{v}\sum_{k=N(\rho)+1}^{\infty}(v-t)^{\alpha-1}\,|\log|a_\alpha(u+it;\,w_k)|\,dt$$

сходится.

Действительно, воспользовавшись условием (2.8) и оценкой (2.12), мы будем иметь

$$I(w)\leqslant\frac{2^{1+\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\left(\sum_{k=N(\rho)+1}^{\infty}|v_k|^{1+\alpha}\right)\int\limits_{-\infty}^{v}\frac{(v-t)^{\alpha-1}}{(|t|-\delta)^{1+\alpha}}\,dt=$$

$$=\frac{2^{1+\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\left(\sum_{k=N(\rho)+1}^{\infty}|v_k|^{1+\alpha}\right)\frac{1}{|v|-\delta}\int\limits_{t=|v|}^{+\infty}\left(\frac{t-|v|}{t-\delta}\right)^{\alpha-1}d\left(\frac{t-|v|}{t-\delta}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2^{1+\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\,\frac{1}{|v|-\delta}\sum_{k=1}^{\infty}|v_k|^{1+\alpha}.$$

Отсюда, в силу теоремы Фубини, мы легко получаем требуемое утверждение.

а) Пусть $-1<\alpha<0$, тогда, воспользовавшись оценкой (2.13), мы получим сходимость интеграла

$$J(w)=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{v}(v-t)^\alpha\sum_{k=N(\rho)+1}\left|\frac{\partial}{\partial t}\log|a_\alpha(u+it;\,w_k)|\right|dt$$

при любом $w\in G_\rho^{(-)}$. А отсюда, как и в предыдущем случае а), следует формула (2.11).

При помощи лемм 2.2 и 2.3 устанавливается интегральное свойство произведения (1.10).

Теорема 2.3. *При выполнении условия* (2.8) *при любом* $v<0$ *справедлива оценка*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\,|W^{-\alpha}\log|A_\alpha(u+iv)|\,|\,du\leqslant\pi\frac{2^{1+\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)}\sum_{k=1}^{\infty}|v_k|^{1+\alpha};\qquad(2.14)$$

$$-1<\alpha<+\infty.$$

Доказательство. В силу теоремы 1.2 и формул (2.9) и (2.11) при $w \in G^{(-)}$ мы имеем

$$W^{-\alpha} \log |A_\alpha(w)| = W^{-\alpha} \left[\psi_\alpha(w) + \sum_{k=1}^{N(\rho)} \log |a_\alpha(w; w_k)| \right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} W^{-\alpha} \log |a_\alpha(w; w_k)| .$$

Далее, воспользовавшись оценкой (2.7), в силу условия (2.8), мы придем к утверждению нашей теоремы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} | W^{-\alpha} \log |A_\alpha(u+iv)| | \, du =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} W^{-\alpha} \log |a_\alpha(u+iv; w_k)| \right| du \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^{\infty} | W^{-\alpha} \log |a_\alpha(u+iv; w_k)| | \, du =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} | W^{-\alpha} \log |a_\alpha(u+iv; w_k)| | \, du \leqslant \pi \frac{2^{1+\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} |v_k|^{1+\alpha}.$$

Институт математики
АН Армянской ССР,
Ереванский государственный
университет

Поступила 5.V.1980

Ա. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ, Գ. Վ. ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ. Կիսահարթության համար Բլյաշկեի տիպի արտադրյալների մի ընտանիքի կառուցումը և հիմնական հատկությունները *(ամփոփում)*

Հոդվածում հեղինակակիցներից մեկի [6] աշխատանքում զարգացված մեթոդով $G^{(-)} = [w; \operatorname{Im} w<0]$ *կիսահարթության համար կառուցված է* α $(-1<\alpha<+\infty)$ *անընդհատ պարամետրից կախված Բլյաշկեի տիպի արտադրյալների մի ընտանիք։*

Կառուցված արտադրյալները հանդիսանում են Մ. Մ. Ջրբաշյանի կողմից [1] հայտնաբերված շրջանի համար Բլյաշկեի տիպի $\pi_\alpha(z)$ *արտադրյալների անալոգները և զուգամիտում են*

$$\sum_k |\operatorname{Im} w_k|^{1+\alpha} < +\infty; \ \{w_k\} \subset G^{(-)}$$

պայմանի բավարարման դեպքում։ Միաժամանակ, α *պարամետրի ամբողջ արժեքների համար կառուցված արտադրյալի արտադրիչները, ինչպես և* $\pi_\alpha(z)$*-ի արտադրիչները ունեն Վեյերշտրասի դասական արտադրիչների կառուցվածք։*

A. M. JERBASHIAN, G. V. MIKAELIAN. *Construction and main properties of a family of Blaschke type functions for a half-plane* (summary)

In the paper a family of Blaschke type functions for the half-plane $G^{(-)} = \{w;\ \mathrm{Im}\, w < 0\}$ is constructed by the method developed in [6]. These functions depend on a continuous parameter $\alpha\,(-1 < \alpha < +\infty)$ and converge if

$$\sum_k |\mathrm{Im}\, w_k|^{1+\alpha} < +\infty;\ \{w_k\} \subset G^{(-)}.$$

These Blaschke type functions are analogues of the functions $\pi_\alpha(z)$ introduced by M. M. Djrbashian [1] for the disk. In particular for the integer values of α both the factors in our paper and the factors of $\pi_\alpha(z)$ have the structure of classical Weierstrass factors.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* О каноническом представлении мероморфных в единичном круге функций, ДАН Арм. ССР, 3, № 1, 1945, 3—9.
2. *М. М. Джрбашян.* К проблеме представимости аналитических функций, Сообщ. Института математики и механики АН Арм. ССР, вып. 2, 1948, 3—40.
3. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., «Наука», 1966.
4. *М. М. Джрбашян.* Теория факторизации функций, мероморфных в круге, Мат. сб., 79 (121), № 4 (8), 1969, 517—615.
5. *Б. Я. Левин.* Распределение корней целых функций, М., 1956.
6. *А. М. Джрбашян.* Функции типа Бляшке для полуплоскости, ДАН СССР, 246, № 6, 1979, 1295—1298.