ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XV, № 6, 1980 Математика

В. Н. МАРКАРЯН

ДОБАВЛЕНИЕ МЛАДШИХ ЧЛЕНОВ, СОХРАНЯЮЩИХ ГИПОЭЛЛИПТИЧНОСТЬ ОПЕРАТОРА

Введение

Пусть R_n — n-мерное эвклидово пространство точек $\{\xi\}$, $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$, Z_n^+ — n-мерное пространство мультииндексов $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, где α_i $(i=1,\cdots,n)$ — неотрицательные целые числа.

Для λ, $\xi\in R_n$, $t>0$ и $\alpha\in Z_n^+$ положим $\xi^\alpha=\xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_n^{\alpha_n}$,

$$|\alpha|=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i,\ \xi/t^\lambda=(\xi_1/t^{\lambda_1},\cdots,\xi_n/t^{\lambda_n}),\ |\xi|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2},$$

$$D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n},\ \text{где}\ D_k=\frac{\partial}{\partial\xi_k},\ k=1,\cdots,n.$$

Определение 1. Многочлен $P(\xi)$ называется λ-однородным $\lambda\in R_n$ порядка k, если $P(t^{\lambda_1}\xi_1,\cdots,t^{\lambda_n}\xi_n)=t^k P(\xi)$ для всех $\xi\in R_n$ и $t>0$.

Определение 2. (см. [1], определение 3. 2. 1). Многочлен $P(\xi)$ сильнее многочлена $Q(\xi)$ $(Q<P)$, если существует постоянная $C>0$ такая, что

$$\tilde{Q}(\xi)\leqslant C\tilde{P}(\xi)\ \forall\ \xi\in R_n, \tag{1}$$

где для данного многочлена $R(\xi)$ функция Л. Хёрмандера $\tilde{R}(\xi)$ определяется формулой

$$\tilde{R}(\xi)=\left[\sum_\alpha|D^\alpha R(\xi)|^2\right]^{1/2}. \tag{2}$$

Определение 3 (см. [1], определение 3. 3. 1). Многочлен $P(\xi)$ доминирует над многочленом $Q(\xi)$ $(Q<<P)$, если

$$\sup_\xi\frac{\tilde{Q}(\xi,t)}{\tilde{P}(\xi,t)}\to 0\ \text{при}\ t\to\infty, \tag{3}$$

где для данного многочлена $R(\xi)$

$$\tilde{R}(\xi,t)=[\sum_\alpha(D^\alpha R(\xi)|^2 t^{2|\alpha|}]^{1/2}.$$

Определение 4 (см. [9], определение 0.1). Многочлен $P(\xi)$ мощнее многочлена $Q(\xi)$ ($Q < P$), если существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$|Q(\xi)| \leqslant C\,(|P(\xi)| + 1) \quad \forall \xi \in R_n. \tag{4}$$

Пусть $P(\xi) = \sum\limits_{(\lambda, \alpha) \leq m} \gamma_\alpha \xi^\alpha$, положим $(P) = \{\alpha,\ \alpha \in Z_n^+,\ \gamma_\alpha \neq 0\}$,

$$P_m(\xi) = \sum_{(\lambda, \alpha) = m} \gamma_\alpha \xi^\alpha, \quad \Sigma(P_m) = \{\xi,\ \xi \in R_n^{(0)},\ P_m(\xi) = 0\},$$

где

$$R_n^{(0)} = \left\{\xi,\ \xi \in R_n,\ \prod_{i=1}^{n} \xi_i \neq 0\right\}.$$

Определение 5. Характеристическим многогранником (х.м.) (многогранником Ньютона) данного многочлена $P(\xi) = \sum\limits_{\alpha} \gamma_\alpha \xi^\alpha$ назовем минимальный выпуклый многогранник $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(P)$ в R_n, содержащий все точки $\alpha \in (P)$.

Определение 6. Число $r = r(\eta, P_m)$ назовем λ-порядком нуля в точке η λ-однородного многочлена $P_m(\xi)$, если $D^\nu P_m(\eta) = 0$ при $(\lambda, \nu) < r$ и для некоторого $\nu \in Z_n^+$, $(\lambda, \nu) = r$,

$$D^\nu P_m(\eta) \neq 0.$$

При этом будем считать по определению, что $r(\eta, P_m) = 0$, если $P_m(\eta) \neq 0$.

Пусть $r(\xi, P_m)$ — λ-порядок нуля λ-однородного многочлена $P_m(\xi)$ в точке ξ. Положим

$$k = k(P_m) = \sup_{\xi \in \Sigma(P_m)} r(\xi, P_m),$$

$$\mathbf{P}'(\xi) = \sum_{(\lambda, \alpha) > k} \gamma_\alpha \xi^\alpha.$$

В [2] доказана следующая теорема.

Теорема Б. Пини. *Для того чтобы многочлен $P(\xi)$ был гипоэллиптическим, необходимо и достаточно, чтобы а) многочлен $\mathbf{P}'(\xi)$ был гипоэллиптическим, б) $|P(\xi) - \mathbf{P}'(\xi)|/\|\xi, \lambda\|^k \to 0$ при $\|\xi, \lambda\| \to \infty$, где*

$$\|\xi, \lambda\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^{2a_0/\lambda_i}}, \quad a_0 = \min_{1 \leq i \leq n} \lambda_i > 0.$$

Из результатов работ [6] и [11] следует, что если λ — любой n-мерный вектор с положительными компонентами и $P(\xi)$ — гипоэллиптический многочлен, то существует число $\sigma = \sigma(\lambda, P) > 0$ такое, что неравенство

$$|\xi^\nu| \leqslant C\,(|P(\xi)| + 1) \quad \forall \xi \in R_n,\ C = C(\lambda, P), \tag{5}$$

имеет место для всех мультииндексов ν таких, что $\nu \in \mathfrak{M}$, $(\lambda, \nu) < \sigma$. При этом, если $\sigma_1 > \sigma$, то либо для всех $\nu \in \mathfrak{M}$, $(\lambda, \nu) \leqslant \sigma$, либо существует мультииндекс $\mu \in \mathfrak{M}$ такой, что $(\lambda, \mu) \leqslant \sigma_1$ и для этого мультииндекса μ неравенство (5) не может иметь места.

Таким образом, через данный гипоэллиптический многочлен $P(\xi)$ и через вектор λ единственным образом определяется число $\sigma = \sigma(\lambda, P)$. С другой стороны, ясно, что неравенство типа (5) может иметь место для многочлена $P(\xi)$ и мультииндекса ν независимо от гипоэллиптичности $P(\xi)$.

В настоящей заметке мы, в частности, устанавливаем критерий гипоэллиптичности многочленов в терминах оценок типа (5) и обобщаем теорему Б. Пини.

§ 1. Гипоэллиптичность и сравнение многочленов с постоянными коэффициентами

Определение 7. Многогранник $\mathfrak{M}$ называется вполне правильным (в.п.), если

а) $\mathfrak{M}$ имеет вершины в начале координат и на всех осях координат;

б) все координаты внешних нормалей $(n-1)$-мерных некоординатных граней х.м. $\mathfrak{M}$ положительны.

Обозначим через Λ множество единичных внешних нормалей $(n-1)$-мерных граней х.м. $\mathfrak{M}$.

Пусть имеем многочлен $P(\xi) = \sum\limits_{\alpha} \gamma_\alpha \xi^\alpha$. Положим

$$\mathbf{P}(\xi) = P(\xi) - \sum_{\alpha} \gamma_\alpha \xi^\alpha,$$

где сумма распространяется по набору мультииндексов $\{\alpha\} \equiv \mathfrak{M}^*$ таких, что $(\lambda, \alpha) < \sigma(\lambda, P)$ для любого $\lambda \in \Lambda$.

Так как (см. [12]) х.м. множества $(P) \cup \{0\}$ гипоэллиптического многочлена $P(\xi)$ является вполне правильным, то в дальнейшем, не умаляя общности, можно считать, что х.м. $\mathfrak{M}$ (гипоэллиптического многочлена $P(\xi)$) вполне правилен.

Теорема 1. *Многочлены $P(\xi)$ и $\mathbf{P}(\xi)$ гипоэллиптичны или не гипоэллиптичны одновременно.*

Доказательство сводится к теореме 4.1.6 работы [1], если заметить, что для точек $\nu \in \mathfrak{M}^*$ имеет место неравенство (5) для всех $\lambda \in \Lambda$ и, следовательно, $P(\xi) - \mathbf{P}(\xi) \ll \mathbf{P}(\xi)$.

Ниже рассматриваются многочлены с вещественными коэффициентами. Всегда будем считать, что $\lambda \in \Lambda$.

Определение 8. $(n-1)$-мерная грань $\mathfrak{M}_i^{n-1}$ $(i = 1, \cdots, N_{n-1})$ х.м. $\mathfrak{M}$ называется главной, если внешняя (относительно $\mathfrak{M}$) нормаль этой грани имеет хотя бы одну положительную координату; k-мерная грань $\mathfrak{M}_i^k$ $(i = 1, \cdots, N_k,\ k = 0, \cdots, n-1)$ х.м. называется главной, если среди $(n-1)$-мерных граней, пересечением которых образуется грань $\mathfrak{M}_i^k$, существует хотя бы одна главная грань.

Определение 9. Грань $\mathfrak{M}_i^k$ ($i=1, \cdots, N_k$, $k=0, \cdots, n-1$) х.м. $\mathfrak{M}$ многочлена $P(\xi)$ называется P-регулярной, если подмногочлен

$$P^{i,k}(\xi) = \sum_{\alpha \in \mathfrak{M}_i^k} \gamma_\alpha \xi^\alpha \neq 0 \text{ при } \xi \in R_n^{(0)}.$$

Грани, не являющиеся P-регулярными будем называть P-нерегулярными.

Пусть $\mathfrak{M}$ — в.п. х.м. многочлена $P(\xi)$, $\mathfrak{M}_{i_0}^{k_0}$ — некоторая главная P-нерегулярная грань х.м. $\mathfrak{M}$. Обозначим через $\Lambda_{i_0}^{k_0}$ множество единичных внешних (относительно $\mathfrak{M}$) нормалей грани $\mathfrak{M}_{i_0}^{k_0}$.

Пусть $\lambda \in \Lambda_{i_0}^{k_0}$, представим многочлен $P(\xi)$ в виде

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^{M_\lambda} P_{m_j(\lambda)}(\xi) = \sum_{j=0}^{M_\lambda} \sum_{(\lambda, \alpha)=m_j(\lambda)} \gamma_\alpha \xi^\alpha,$$

где $m_0(\lambda) > m_1(\lambda) > \cdots > m_{M_\lambda}(\lambda) \geqslant 0$,

$$P_{m_0(\lambda)}(\xi) = P^{i_0, k_0}(\xi) \quad \forall \lambda \in \Lambda_{i_0}^{k_0}.$$

Введем следующие обозначения:

$$\Sigma^{i_0, k_0} \equiv \Sigma_{m_0(\lambda)}^{i_0, k_0} = \{\eta,\ \eta \in R_n^{(0)},\ P^{i_0, k_0}(\eta) = 0\},$$

$$\Sigma_{m_j(\lambda)}^{i_0, k_0} = \{\eta,\ \eta \in \Sigma_{m_{j-1}(\lambda)}^{i_0, k_0},\ P_{m_j(\lambda)}(\eta) = 0\} \quad j=1, \cdots, M_\lambda.$$

Для $\lambda \in \Lambda_{i_0}^{k_0}$ и $\eta \in \Sigma_{m_j(\lambda)}^{i_0, k_0}$ положим

$$A_{m_j(\lambda)}^{i_0, k_0}(\eta) = \{\nu,\ \nu \in Z_n^+,\ D^\nu P_{m_j(\lambda)}(\eta) \neq 0\},$$

$$A^{i_0, n-1} = \bigcup_{\eta \in \Sigma_{m_0(\lambda)}^{i_0, n-1}} A_{m_0(\lambda)}^{i_0, n-1}(\eta).$$

Мы будем пользоваться следующей теоремой (см. [4], теорема 2).

Теорема Г. Г. Казаряна. *Пусть все главные грани в.п. х.м. многочлена $P(\xi)$ кроме одной главной $(n-1)$-мерной грани $\mathfrak{M}_{i_0}^{n-1}$ P-регулярны, а грань $\mathfrak{M}_{i_0}^{n-1}$ P-нерегулярна, $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$-внешняя нормаль этой грани. Тогда многочлен $P(\xi)$ гипоэллиптичен при одновременном выполнении следующих условий:*

а) $\max\limits_{\nu \in A^{i_0, n-1}} [m_0(\lambda) - (\lambda, \nu)] < m_1(\lambda)$,

в) *для каждой точки $\eta \in \Sigma^{i_0, n-1}$ существуют аналитические в $R_n^{(0)}$ функции $r(\eta, \xi)$, $P(\eta, \xi)$ и натуральное число $k(\eta)$ такие, что в некоторой окрестности точки η многочлен $P^{i_0, n-1}(\xi)$ представляется в виде*

$$P^{i_0, n-1}(\xi) = [r(\eta, \xi)]^{k(\eta)} P(\eta, \xi) \geqslant 0 \ (\leqslant 0),$$

где

$$P(\eta, \eta) \neq 0, \quad \frac{\partial r(\eta, \eta)}{\partial \xi_i} \neq 0 \ (i=1, \cdots, n),$$

c) $P_{m_1(\lambda)}(\eta)>0\ (<0)\ \forall\eta\in\Sigma^{\lambda,\,n-1}$.

В некотором смысле обратной к теореме 3.3.4 работы [1] является следующая

Теорема 2. *Пусть* $P(\xi)=\sum\limits_{(\lambda,\,\alpha)\leq k}\gamma_\alpha\xi^\alpha$, $Q(\xi)=\sum\limits_{(\lambda,\,\alpha)\leq m}\delta_\alpha\xi^\alpha$, $k>m$. *Если для любого числа* $a\in R_1$ *многочлен* $P(\xi)+aQ(\xi)$ *гипоэллиптичен, то* $Q\ll P$.

Доказательство. Допустим обратное, а именно, что при выполнении условия теоремы, многочлен $P(\xi)$ не доминирует над многочленом $Q(\xi)$. Так как многочлен $P(\xi)$ гипоэллиптичен, то это означает (см. [1], теорему 4.1.6 и замечание), что существуют последовательность $|\xi^s|$, $\|\xi^s,\lambda\|\to\infty$ при $s\to\infty$ и число $\varepsilon>0$ такие, что

$$|Q(\xi^s)/P(\xi^s)|\geqslant\varepsilon,\quad s=1,\,2,\cdots. \tag{6}$$

Поскольку $k>m$, то существует последовательность $\{\eta^s\}$ такая, что для всех $s=1,\,2,\cdots,\|\eta^s,\lambda\|=\|\xi^s,\lambda\|$ и при $s\to\infty$

$$|Q(\eta^s)/P(\eta^s)|\to 0. \tag{7}$$

Из-за гипоэллиптичности многочлена $P(\xi)$, $R(\xi)=|Q(\xi)/P(\xi)|$ является непрерывной функцией вне некоторого эллипсоида $\|\xi,\lambda\|>M$. В силу этого из (6) и (7) получаем, что для любого числа δ, такого, что $\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\delta\leqslant\varepsilon$ существует последовательность точек $\{\tau^s\}$ таких, что $\|\tau^s,\lambda\|=\|\xi^s,\lambda\|$ и $R(\tau^s)=\delta$ для всех s, для которых $\|\xi^s,\lambda\|\geqslant M$. Так как коэффициенты многочленов $P(\xi)$ и $Q(\xi)$ вещественны, то для бесконечного числа s либо $Q(\tau^s)/P(\tau^s)=\delta$, либо $Q(\tau^s)/P(\tau^s)=-\delta$. Взяв в первом случае $a=-1/\delta$, а во втором $a=1/\delta$, получаем, что для некоторой подпоследовательности $\{\tau^{s'}\}\subset\{\tau^s\}$, $P(\tau^{s'})+aQ(\tau^{s'})=0$ при $\|\tau^{s'},\lambda\|=\|\xi^{s'},\lambda\|\to\infty$.

Это противоречит гипоэллиптичности многочлена $P(\xi)+aQ(\xi)$ и доказывает теорему.

Определение 10 (см. [7], определение 7). Характеристической линией х.л. λ-однородного многочлена $R(\xi)=\sum\limits_{(\lambda,\,\alpha)=m}\gamma_\alpha\xi^\alpha$ в точке $\tau\in R_n$, $\|\tau,\lambda\|=1$ назовем функцию $\chi(\tau,\,R,\,\delta)=m-l\delta$, $0\leqslant\delta\leqslant1$, где $l=l(\tau)$ — λ-порядок нуля многочлена $R(\xi)$ в точке τ.

Если $\tau\bar{\in}\Sigma(R)$, то по определению будем считать, что $\chi(\tau,\,R,\,\delta)=m$ при всех $\delta\in[0,\,1]$.

Определение 11. Характеристической линией х.л. многочлена $P(\xi)=\sum\limits_{j=0}^{M}P_{m_j}(\xi)$, где $P_{m_j}(\xi)$ — λ-однородный многочлен порядка m_j; $j=0,\,1,\cdots,\,M$, $m_0>m_1>,\cdots,m_M\geqslant0$ в точке τ назовем функцию

$$\chi(\tau,\,P,\,\delta)=\max_{0\leq j\leq M}\chi(\tau,\,P_{m_j},\,\delta),\ \delta\in[0,\,1].$$

Определение 12. Будем говорить, что λ-однородный многочлен $P_{m_k}(\xi)$ является активным подмногочленом многочлена $P(\xi)$ в точке $\tau\in\Sigma(P_{m_0})$, если для некоторого числа

$$\delta\in[0,1],\ \chi(\tau, P_{m_k}, \delta)=\chi(\tau, P, \delta).$$

Обозначим через $A(\tau)=A(\tau, P)$ множество тех индексов j, $0\leqslant j\leqslant M$, для которых $P_{m_j}(\xi)$ является активным подмногочленом многочлена $P(\xi)$ в точке τ.

Определение 13. Будем говорить, что многочлен $P(\xi)$ регулярен в точке $\tau\in\Sigma(P_{m_0})$, если существует окрестность $O(\tau)$ точек ξ такая, что $P_{m_j}(\xi)\,P_{m_0}(\xi)\geqslant 0$ для всех $\xi\in O(\tau)$ и для всех $j\in A(\tau)$.

Всюду в дальнейшем будем считать, что $Q(\xi)$ и $P_{m_j}(\xi)$, $0\leqslant j\leqslant M$ — λ-однородные многочлены для фиксированного $\lambda\in\Lambda$.

Лемма 1 (см. [4], лемму 2.1). *Пусть $n=2$, $R(\xi)$ — λ-однородный многочлен, тогда $R(\xi)$ представляется в виде*

$$R(\xi)=r(\xi)\prod_{\tau\in\Sigma(R)}(\xi_1-\varkappa(\tau)\,\xi_2^{\lambda_1/\lambda_2})^{l(\tau)},$$

где $l(\tau)$ — натуральные числа, $\varkappa(\tau)\neq 0$ для $\tau\in\Sigma(R)$, $\varkappa(\tau^1)\neq\varkappa(\tau^2)$ при $\tau^1\neq\tau^2$, $\tau^1, \tau^2\in\Sigma(R)$, $r(\xi)$ аналитическая в $R_2^{(0)}$ функция, $r(\xi)\neq 0$ при $\xi\in R_2^{(0)}$. При этом функция $\varkappa(\tau)$ принимает лишь конечное число различных значений.

Лемма 2. *Пусть $n=2$, $Q_m(\xi)$ и $P_{m_i}(\xi)$ $(i=0, 1,\cdots, M)$ λ-однородные многочлены, удовлетворяющие следующим условиям:*

1) *х.м. многочлена $P(\xi)=\sum_{i=0}^{M}P_{m_i}(\xi)$ вполне правилен,*

2) *многочлен $P(\xi)$ регулярен в каждой точке $\tau\in\Sigma(P_{m_0})$;*

3) *для каждой точки $\tau\in\Sigma(P_{m_0})$ существует номер j; $0\leqslant j\leqslant M$ такой, что $P_{m_j}(\tau)\neq 0$, $P_{m_i}(\tau)=0$ при $i<j$ и $m_i-l_i(\tau)<m$ при $i<j$, где $l_i(\tau)$—λ-порядок нуля в точке τ многочлена $P_{m_i}(\xi)$;*

4. $\chi(\tau, Q_m, \delta)\leqslant\chi(\tau, P, \delta)$ $\forall\tau\in\Sigma(P_{m_0})$; $\delta\in[0, 1]$.

Тогда существует число N такое, что

$$|Q_m(\xi)|/(|P(\xi)|+1)\leqslant N\ \forall\xi\in R_2. \tag{8}$$

Отметим, что из условий 1)—3) следует, что многочлен $P(\xi)$ гипоэллиптичен (см. [7], теорема 4).

Доказательство. Заметим, прежде всего, что в силу регулярности многочлена $P(\xi)$ в каждой точке $\tau\in\Sigma(P_{m_0})$ имеем, что для некоторой постоянной $C>0$

$$1+|P(\xi)|\geqslant C\sum_{j=0}^{M}|P_{m_j}(\xi)|\ \forall\xi\in R_2. \tag{9}$$

Пусть при выполнении условий леммы соотношение (8) нарушается. Тогда существует последовательность $\{\xi^s\}$ такая, что при $s\to\infty$

$$\|\xi^s, \lambda\|\to\infty,\ \xi^s/\|\xi^s, \lambda\|^{\lambda}\to\tau,\ \tau\in\Sigma(P_{m_0}),$$

$$|Q_m(\xi^s)|/(|P(\xi^s)|+1)\to\infty. \tag{10}$$

Из леммы 1 следует, что для некоторой постоянной $C_1>0$

$$1+|P(\xi^s)| \geqslant C\sum_{l=0}^{M}|P_{m_l}(\xi^s)| = C\sum_{l=0}^{M}\|\xi^s,\lambda\|^{m_l}\,|P_{m_l}(\xi^s/\|\xi^s,\lambda\|^{\lambda})| \geqslant$$

$$\geqslant C_1\sum_{l=0}^{M}\theta_l\|\xi^s,\lambda\|^{m_l-l_l(\tau)}|\xi_1^s-\varkappa(\tau)(\xi_2^s)^{\lambda_1/\lambda_2}|^{l_l(\tau)},$$

где $l_l(\tau)$ — λ-порядок нуля многочлена $P_{m_l}(\xi)$ в точке τ, $\theta_l=1$ при $l\in\bigcup\limits_{\tau\in\Sigma(P_{m_0})}A(\tau)$, $\theta_l=0$ — в остальных случаях.

Из представления многочлена $Q_m(\xi)$ по лемме 1 имеем для некоторой постоянной $C_2>0$

$$|Q_m(\xi^s)| \leqslant C_2\|\xi^s,\lambda\|^{m-l(\tau)}\,|\xi_1^s-\varkappa(\tau)(\xi_2^s)^{\lambda_1/\lambda_2}|^{l(\tau)}.$$

Эти два соотношения вместе с условием 4) противоречат (10) и доказывают лемму.

Теорема 3. *Если многочлены* $P(\xi)=\sum\limits_{l=0}^{M}P_{m_l}(\xi)$ *и* $P(\xi)+Q(\xi)$ *одновременно гипоэллиптичны,* $Q(\xi)=\sum\limits_{(\lambda,\alpha)<m_0}\gamma_\alpha\xi^\alpha$, *то для любого числа* $a\in(0,1)$ *существует число* $C=C(a)$ *такое, что*

$$|1+|P(\xi)+aQ(\xi)|\geqslant C(|P(\xi)|+|Q(\xi)|)\ \forall\,\xi\in R_n. \tag{11}$$

Доказательство. Очевидно, добавлением постоянной всегда можно добиться того, чтобы гипоэллиптический многочлен $P(\xi)\neq 0$ при $\xi\in R_n$.

Разобьем пространство R_n на следующие два подмножества:

$$D_1=\{\xi,\ \xi\in R_n,\ |Q(\xi)/P(\xi)|\geqslant 1\},\ D_2=R_n\diagdown D_1.$$

Для произвольного числа N положим $K^N=\{\xi,\ \xi\in R_n,\ \|\xi,\lambda\|\leqslant N\}$.

Если для некоторого числа $N>0$, $D_1\subset K_N$, то неравенство (11) доказывается просто. Если же множество D_1 не ограничено, то докажем, что существует число N такое, что для всех точек

$$\xi\in D_1\diagdown K_N,\quad Q(\xi)/P(\xi)>1.$$

Предполагая обратное получим, что для некоторой последовательности $\{\xi^s\}$; $\xi^s\in D_1$, $\|\xi^s,\lambda\|\to\infty$; $Q(\xi^s)/P(\xi^s)\leqslant -1$. Так как $d_Q=ordQ<m_0$, то, очевидно, существует стремящаяся к бесконечности последовательность $\{\eta^s\}$ такая, что $Q(\eta^s)/P(\eta^s)\to 0$.

Из этих двух соотношений следует существование последовательности $\{\tau^s\}$, $\|\tau^s,\lambda\|\to\infty$ такой, что $Q(\tau^s)/P(\tau^s)=-1$, т. е. $Q(\tau^s)+P(\tau^s)=0$, $s=1,2,\cdots$, что противоречит гипоэллиптичности многочлена $P(\xi)+Q(\xi)$.

Пусть $a\in(0,1)$ — некоторое фиксированное число. Тогда по доказанному существует число N такое, что для множества D_1/K_N

$$|P(\xi)+aQ(\xi)| = |P(\xi)|+a|Q(\xi)|>a(|P(\xi)|+|Q(\xi)|). \tag{12}$$

Для множества D_3 имеем

$$|P(\xi)+aQ(\xi)|=|P(\xi)|\,|1+aQ(\xi)/P(\xi)|>|P(\xi)|\,(1-a)>$$
$$\geqslant\frac{1-a}{2}\,(|P(\xi)|+|Q(\xi)|). \qquad (13)$$

Так как при $\xi\in K_N$ выражение $|P(\xi)|+|Q(\xi)|$ ограничено, то из (12), (13) получаем требуемое неравенство (11).

Покажем на примерах, что в теореме 3 нельзя расширять область изменения числа a.

Пример 1. Пусть $n=2$, $m>2$, $P(\xi)=(\xi_1-\xi_2)^{2m}+\xi_1^{2(m-2)}+\xi_2^{2(m-2)}$, $Q(\xi)=\xi_1^{2(m-1)}+\xi_2^{2(m-1)}$. Очевидно, при $a=0$ неравенство (11) не имеет места, несмотря на то, что многочлены $P(\xi)$ и $P(\xi)+Q(\xi)$ гипоэллиптичны.

Пример 2. Пусть $n=2$, $P(\xi)=\xi_1^8\,\xi_2^8+\xi_1^{14}+\xi_2^{14}$, $Q(\xi)=2\xi_1^4\,\xi_2^{11}+\xi_1^2\,\xi_2^{12}$. Легко проверить гипоэллиптичность многочлена $P(\xi)$. Докажем, что многочлен $P(\xi)+Q(\xi)$ также гипоэллиптичен. Для этого покажем, что многочлен $P(\xi)+Q(\xi)$ удовлетворяет условиям теоремы Г. Г. Казаряна.

Многочлен $P(\xi)+Q(\xi)$ имеет только одну одномерную $(P+Q)$-нерегулярную грань $\mathfrak{M}_1^1=\{(0,14);\ (8,8)\}$. Покажем выполнение условия а) указанной теоремы. $\lambda=\left(\frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right)$—нормаль грани $\mathfrak{M}_1^1$, $m_0=56/5$, $m_1=54/5$. Для точки $e^1=(14,\ 0)$ имеем $(\lambda,\ e^1)<m_1$. Для любого $\nu\in A^{1,1}$ имеем $m_0-(\lambda,\ \nu)<56/5-3/5=53/5<54/5=m_1$.

Следовательно

а) $\max\limits_{\nu\in A^{1,1}}\ [m_0-(\lambda,\ \nu)]<m_1$.

Выполнение условия в) теоремы следует из леммы 1. Для завершения доказательства гипоэллиптичности многочлена $P(\xi)+Q(\xi)$ покажем выполнение условия с) теоремы.

с) $$(P+Q)_{m_0}(\xi)=\xi_1^8\,\xi_2^8+\xi_2^{14}+2\,\xi_1^4\,\xi_2^{11}=\xi_8^2\,(\xi_1^4+\xi_1^3)^2\geqslant 0,$$
$$(P+Q)_{m_1}(\xi)=\xi_1^2\,\xi_2^{12}>0,\ \forall\xi\in R_2^{(10)}.$$

При $a=1$ неравенство (11) для многочленов $P(\xi)$ и $Q(\xi)$ не имеет места, что следует из того, что на последовательности $\xi^s=\{s^{3/4},\ -s\}$ при $s\to\infty$

$$|Q(\xi^s)+P(\xi^s)|/|P(\xi^s)|.$$

Теорема 4. *Пусть* $n=2$, *многочлен* $P(\xi)=\sum\limits_{l=0}^{M}P_{m_l}(\xi)$ *гипоэллиптичен,* $Q_m(\xi)$ *—*λ*-однородный многочлен порядка* $m<m_0$, *при этом для некоторой постоянной* $C>0$

$$1+|P(\xi)+Q_m(\xi)|>C\,(|P(\xi)|+Q_m(\xi)|)\quad\forall\xi\in R_2 \qquad (14)$$

Если для каждой точки $\tau \in \Sigma(P_{m_0})$, $m - l(\tau) < \chi(\tau, P, 1)$, *где* $l(\tau) = l(\tau, Q_m)$ — λ-*порядок нуля многочлена* $Q_m(\xi)$ *в точке* τ, *то многочлен* $P(\xi) + Q_m(\xi)$ *гипоэллиптичен.*

Доказательство. Отметим особо, что здесь не требуется регулярности многочлена $P(\xi)$.

Пусть наоборот, при выполнении условий теоремы многочлен $P(\xi) + Q_m(\xi)$ не гипоэллиптичен, т. е. для некоторой последовательности $\{\xi^s\}$, $|\xi^s, \lambda| \to \infty$ существуют число $\varepsilon > 0$ и мультииндекс α, $|\alpha| \neq 0$ такие, что

$$\frac{|P(\xi^s) + Q_m(\xi^s)|}{|D^\alpha(P(\xi^s) + Q_m(\xi^s))|} \leqslant \varepsilon, \quad s = 1, 2, \cdots. \tag{15}$$

Легко видеть, что тогда для некоторой подпоследовательности этой последовательности (которую также обозначим через $\{\xi^s\}$) $\xi^s/|\xi^s, \lambda|^\lambda \to \tau^0$ при $s \to \infty$, $\tau^0 \in \Sigma(P_{m_0})$.

Представим, согласно лемме 1, многочлен $Q_m(\xi)$ в виде

$$Q_m(\xi) = Q_m^0(\xi) \prod_{\tau \in \Sigma(Q_m)} (\xi_1 - \varkappa(\tau)\, \xi_2^{\lambda_1/\lambda_2})^{l(\tau)}$$

и покажем, что $|\xi_1^s - \varkappa(\tau^0)\, (\xi_2^s)^{\lambda_1/\lambda_2}| \to \infty$ при $s \to \infty$.

Предполагая обратное, имеем для любого $\nu \in Z_2^+$ и для некоторой подпоследовательности последовательности $\{\xi^s\}$ (которую также обозначим через $\{\xi^s\}$)

$$|D^\nu Q_m(\xi^s)| \leqslant C\, (|\xi^s, \lambda|^{m - l(\tau^0)} + 1),$$
$$1 + |P(\xi^s)| \geqslant C^{-1} |\xi^s, \lambda|^{\chi(\tau^0, P, 1)},$$

для некоторой постоянной $C > 0$.

Эти соотношения, вместе с условием $m - l(\tau^0) < \chi(\tau^0, P, 1)$ противоречат (15).

Итак, для указанной последовательности $\{\xi^s\}$

$$|\xi_1^s - \varkappa(\tau^0)\, (\xi_2^s)^{\lambda_1/\lambda_2}| \to \infty \text{ при } s \to \infty.$$

Тогда легко видеть, что при $|\nu| \neq 0$ и $s \to \infty$

$$|Q_m(\xi^s)|/|D^\nu Q_m(\xi^s)| \to \infty.$$

Из условия (14) и гипоэллиптичности многочлена $P(\xi)$ получаем при $s \to \infty$

$$\left|\frac{P(\xi^s) + Q_m(\xi^s)}{D^\nu(P(\xi^s) + Q_m(\xi^s))}\right| \geqslant C \frac{|P(\xi^s)| + |Q_m(\xi^s)|}{|D^\nu P(\xi^s)| + |D^\nu Q_m(\xi^s)|} \to \infty. \tag{16}$$

Это соотношение противоречит (15) и доказывает теорему.

Следствие 1. Пусть $n=2$, многочлены $P(\xi)$ и $P(\xi) + Q_m(\xi)$ $(m < m_0)$ одновременно гипоэллиптичны, тогда для любого числа $a \in [0,1]$ многочлен $P(\xi) + a\, Q_m(\xi)$ также гипоэллиптичен.

Доказательство немедленно следует из теорем 3 и 4.

Пример 3. Пусть $n=2$, $P(\xi)=(\xi_1-\xi_2)^6(\xi_1+\xi_2)^4+\xi_1^6+\xi_2^6$, $Q_7(\xi)=(\xi_1-\xi_2)^2(\xi_1+\xi_2)^5$. Легко показать, что многочлен $P(\xi)$ удовлетворяет условиям теоремы Г. Г. Казаряна и, следовательно, гипоэллиптичен. Простые вычисления показывают, что $Q_7<P$ и для некоторой постоянной $C>0$

$$1+|Q_7(\xi)+P(\xi)|\geqslant C(|P(\xi)|+|Q_7(\xi)|)\ \forall\xi\in R_2. \tag{17}$$

Тогда из теоремы 4 следует, что многочлен $P(\xi)+Q_7(\xi)$ также гипоэллиптичен. С другой стороны, если положим $Q_7(\xi)=2(\xi_1-\xi_2)^2(\xi_1+\xi_2)^5$, то оценка (17) не может иметь места и при этом многочлен $P(\xi)+Q_7(\xi)$ не будет гипоэллиптическим.

Теорема 5. *Пусть $n\geqslant 2$. Многочлен $P_k(\xi)$ доминирует над многочленом $P_m(\xi)$ тогда и только тогда, когда $P_m<P_k$ и $m<k$.*

Доказательство. Пусть $P_m<P_k\,(m<k)$, но $P_k(\xi)$ не доминирует над $P_m(\xi)$. Тогда в силу леммы 5 работы [7] следует существование последовательности $\{\xi^s\}$ и числа $\varepsilon>0$ таких, что при $|\xi^s|\to\infty$

$$|P_m(\xi^s)/P_k(\xi^s)|\geqslant\varepsilon,\ B_s=|P_m(\xi^s)/\tilde{P}'_k(\xi^s)|\to\infty,$$

где

$$\tilde{P}'_k(\xi)=\Big[\sum_{|\alpha|\neq 0}{}'|D^\alpha P_k(\xi)|^2\Big]^{1/2}.$$

Обозначим для каждого $s=1,2,\cdots$, $t_s=B_s^{-\frac{1}{3m-1}}$. Тогда при $s\to\infty$ имеем для последовательности $(t_s^\lambda\xi^s)=(t_s^{\lambda_1}\xi_1^s,\cdots,t_s^{\lambda_n}\xi_n^s)$

$$|P_m(t_s^\lambda\xi^s)/P_k(t_s^\lambda\xi^s)|\geqslant\varepsilon t_s^{m-k}\to\infty, \tag{18}$$

$$\left|\frac{P_m(t_s^\lambda\xi^s)}{\tilde{P}'_k(t_s^\lambda,\xi^s)}\right|\geqslant\frac{t_s^m|P_m(\xi^s)|}{\sum\limits_{0<r<k}\ \sum\limits_{|\lambda,\alpha|=r}|D^\alpha P_k(t_s^\lambda\xi^s)|},$$

$$\frac{|t_s^m P_m(\xi^s)|}{t_s^{k-r}\sum\limits_{(\lambda,\alpha)=r}|D^\alpha P_k(\xi^s)|}\geqslant t_s^{m-k+r}\frac{|P_m(\xi^s)|}{|\tilde{P}'_k(\xi^s)|}=B_s^{-(m+r-k)\frac{1}{3m-1}}\cdot B_s\geqslant$$

$$\geqslant B_s^{(2m-1)/(3m-1)}.$$

Откуда, считая, что $m>\frac{1}{2}$*, при $s\to\infty$ имеем

$$\left|\frac{P_m(t_s^\lambda\xi^s)}{\tilde{P}'_k(t_s^\lambda\xi^s)}\right|\to\infty. \tag{19}$$

Соотношения (18) и (19) вместе показывают, что $P_m\not<P_k$. Так как из условия $P_m\ll P_k$ следует, что $P_m<P_k$, то это доказывает теорему.

---

* Это не умаляет общности, так как λ-однородный многочлен и $k\cdot\lambda$ однороден для любого числа $k>0$.

Теорема 6. *Пусть $n=2$. Многочлен $P_k(\xi)$ сильнее многочлена $P_m(\xi)$ (соответственно, доминирует над многочленом $P_m(\xi)$) тогда и только тогда, когда для любого $\tau\in\Sigma(P_k)$*

$$\chi(\tau, P_m, \delta)<\chi(\tau, P_k, \delta),\ \delta\in[0,1] \tag{20}$$

соответственно

$$\chi(\tau, P_m, 0)<\chi(\tau, P_k, 0),\ \chi(\tau, P_m, \delta)<\chi(\tau, P_k, \delta),\ \delta\in[0, 1]. \tag{21}$$

Доказательство немедленно следует из теоремы 5 и результатов работы [7].

Следствие 2. Если многочлен $P(\xi)=\sum_{j=0}^{M} P_{m_j}(\xi)$ гипоэллиптичен и $P_{m_j}<P$ для некоторого j; $0\leqslant j\leqslant M$, то для любого λ-однородного многочлена $Q_r(\xi)$, $r<m_j$ такого, что $Q_r < P_{m_j}$, многочлен $P(\xi)+Q_r(\xi)$ также гипоэллиптичен и $Q_r\ll P$.

Доказательство немедленно получается, если применить теорему 4.1.6 работы [1], теорему 1 работы [7] и теорему 5 настоящей заметки.

§ 2. Сравнение (λ, β)-многочленов

Определение 13. Функцию $Q(\xi)$ назовем (λ, β)-многочленом ($\xi\in R_n$; $\lambda, \beta\in Z_n^+$) порядка d_Q, если

А) $Q(t^\lambda\xi)=t^{d_Q}Q(\xi)\ \ \forall\xi\in R_n,\ t>0$,

Б) $Q(\xi^\beta)$—многочлен от $\xi\in R_n$.

Простым примером (λ, β)-многочлена, не являющегося обычным многочленом, является функция $Q(\xi)=\xi_1+\xi_2^{1/3}$ при $\lambda=\beta=(1, 3)$:

Определение 14. Будем говорить, что многочлен $P(\xi)=\sum_{i=0}^{M} P_{m_i}(\xi)$ (где $P_{m_i}(\xi)$, $i=0, 1,\cdots M$, λ-однородные многочлены) доминирует (соответственно, сильнее) над (λ, β)-многочленом $Q(\xi)$, если многочлен $P(\xi^\beta)$ доминирует (соответственно сильнее) над многочленом $Q(\xi^\beta)$.

Определение 15. Характеристической] линией (λ, β)-многочлена $Q(\xi)$ в точке τ назовем х.л. многочлена $Q(\xi^\beta)$ в точке $\tau^{1/\beta}$.

Пусть многочлен $P(\xi)=\sum_{(\lambda, \alpha)<m_0}\gamma_\alpha\xi^\alpha$, $\lambda_i>0$ $(i=1, \cdots, n)$ удовлетворяет следующему условию:

С) для любого $\tau\in\Sigma(P_{m_0})$, и для любого $i\in\mathbf{A}(\tau)$ (определение $\mathbf{A}(\tau)$ см. на странице 448) существует число $\delta\in[0, 1]$ такое, что $\chi(\tau, P_{m_i}, \delta)>\chi(\tau, P-P_{m_i}, \delta)$.

Пусть $Q(\xi)$ (λ, β)-многочлен. Положим

$$E(P)=\{Q;\ Q<P\},\ \ \tilde{E}(P)=\{Q;\ Q< P\},\ \ \tilde{\tilde{E}}(P)=\{Q;\ Q\ll P\}.$$

Теорема 7. *Пусть $n=2$, х.м. многочлена $P(\xi)$ в.п., многочлен $P(\xi)$ удовлетворяет условию С) и $E(P)\supset \tilde{E}(P)$, тогда либо $P< P_{m_0}$, либо многочлен $P(\xi)$ гипоэллиптичен.*

Доказательство. Рассмотрим следующие два возможных случая:

а) для некоторой точки $\tau\in\Sigma(P_{m_0})$, $\chi(\tau, P, 1)=0$;

в) для всех $\tau\in\Sigma(P_{m_0})$, $\chi(\tau, P, 1)>0$.

В первом случае из определения х.м. многочлена $P(\xi)$ имеем, что для всех $i=0, 1,\cdots, M$, $\chi(\tau, P, 1)=0$. Это в силу леммы 1 означает, что для всех $i=0, 1, \cdots, M$ многочлены $P_{m_i}(\xi)$ имеют вид

$$P_{m_i}(\xi)=(\xi_1-\varkappa(\tau)\,\xi_2^{\lambda_1/\lambda_2})^{m_i}.$$

Так как $m_0>m_1>\cdots>m_M\geqslant 0$, то отсюда и из теоремы 6 легко следует, что $P<P_{m_0}$.

Во втором случае, не умаляя общности, можно считать, что $\chi(\tau, P, 1)\geqslant 1$ для всех $\tau\in\Sigma(P_{m_0})$. В этом случае мы докажем, что многочлен $P(\xi)$ доминирует над (λ, β)-многочленом $Q(\xi)=\xi_1-\varkappa(\tau)\,\xi_2^{\lambda_1/\lambda_2}$, где $\beta=(\lambda_1, \lambda_2)=\lambda$, т. е. $Q(\xi^\beta)=\xi_1^{\lambda_1}-\varkappa(\tau)\,\xi_2^{\lambda_1}$.

При переходе от ξ к ξ^β λ-однородные многочлены $P_{m_i}(\xi)$ становятся однородными, при этом, если $P_{m_i}(\tau)=0$, то

$$P_{m_i}(\xi^\beta)=P^0_{m_i}(\xi^\beta)\,(\xi_1^{\lambda_1}-\varkappa(\tau)\,\xi_2^{\lambda_1})^{l_i(\tau)}.$$

Поскольку $m_0>m_1>\cdots>m_M\geqslant 0$, то порядок однородного многочлена $P_{m_0}(\xi^\beta)$ хотя бы на $\min\{\lambda_1, \lambda_2\}$ единиц больше порядка однородных многочленов $P_{m_i}(\xi^\beta)$ при $i=1,\cdots, M$.

Отсюда легко следует, что многочлен $P(\xi^\beta)$ доминирует над многочленом $Q(\xi^\beta)$, т. е. многочлен $P(\xi)$ доминирует над (λ, β)-многочленом $Q(\xi)$. Поскольку $\tilde{E}(P)\subset E(P)$, то из условия С) следует, что многочлен $P(\xi)$ регулярен в окрестности каждой точки $\tau\in\Sigma(P_{m_0})$. Пусть $\tau^0\in\Sigma(P_{m_0})$. Тогда при всех $i=0, 1,\cdots, r$ многочлен $P_{m_i}(\tau)=0$,

$$P_{m_i}(\xi)=P^0_{m_i}(\xi)\prod_{\tau\in\Sigma(P_{m_0})}(\xi_1-\varkappa(\tau)\,\xi_2^{\lambda_1/\lambda_2})^{l_i(\tau)}$$

доминирует над (λ, β)-многочленом

$$P'_{m_i}(\xi)=P^0_{m_i}(\xi)\prod_{\substack{\tau\in\Sigma(P_{m_0})\\ \tau\neq\tau^0}}(\xi_1-\varkappa(\tau)\,\xi_2^{\lambda_1/\lambda_2})^{l_i(\tau)},$$

где $l_i(\tau)$, λ-порядок нуля многочлена $P_{m_i}(\xi)$ в точке τ. Из следствия 2 имеем, что многочлен $P(\xi)$ доминирует над (λ, β)-многочленом $P'_{m_i}(\xi)$ для любого i; $0\leqslant i\leqslant r$. Поскольку $\tilde{E}(P)\subset E(P)$, то существует положительное число $C>0$ такое, что

$$\sum_{i=0}^{r} |P'_{m_i}(\xi)| \leqslant C(|P(\xi)|+1) \quad \forall \xi \in R_2.$$

Так как $P'_{m_i}(\tau^0) \neq 0$, $i=0, 1, \cdots, r$, то х.л. (λ, β)—многочлена

$P'(\xi) = \sum_{i=0}^{r} (P'_{m_i}(\xi))^2$ в точке τ не зависит от $\delta \in [0, 1]$. Так как многочлен $P(\xi)$ удовлетворяет условию С), то существует единственный номер j; $0 \leqslant j \leqslant M$ такой, что $\chi(\tau^0, P_{m_j}, 1) > \chi(\tau, P - P_{m_j}, 1)$. Это значит, что $m_i - l_i(\tau^0) < m_j - l_j(\tau^0)$ для любого $i \in \mathbf{A}(\tau^0)$.

Для завершения доказательства нам остается показать, что $l_j(\tau^0) = 0$. Предполагая обратное, т. е. что $l_j(\tau^0) \neq 0$, получим для последовательности $\xi^s = \{\tau_1^0 s, \tau_2^0 s^{\lambda_2/\lambda_1}\}$ и для некоторой постоянной $C_1 > 0$

$$1 + \sum_{i=0}^{r} |P'_{m_i}(\xi^s)| > C_1 s^{\chi(\tau^0, P_{m_j}, 1)}.$$

С другой стороны, так как $\chi(\tau^0, P_{m_j}, 1) = m_j - l_j(\tau^0) > \chi(\tau^0, P_{m_i}, 1)$ для любого $i \in \mathbf{A}(\tau^0)$ и $P_{m_j}(\xi^s) = 0$, $s = 1, 2, \cdots$, то $P(\xi^s)/s^{\chi(\tau^0, P_{m_j}, 1)} \to 0$ при $s \to \infty$.

Это противоречие показывает, что $l_j(\tau^0) = 0$. Тогда $m_i - l_i(\tau^0) < m_j$, $i = 0, 1, \cdots, M$, $i \neq j$. Так как $\tau^0 \in \Sigma(P_{m_0})$—произвольная точка, то для любой точки $\tau \in \Sigma(P_{m_0})$ существует номер j; $0 \leqslant j \leqslant M$ такой, что $P_{m_j}(\tau) \neq 0$ и $m_i - l_i(\tau) < m_j$ для всех

$$i;\ 0 \leqslant i \leqslant M;\ i \neq j.$$

Последнее вместе с регулярностью многочлена $P(\xi)$ в каждой точке $\tau \in \Sigma(P_{m_0})$ показывают, что многочлен $P(\xi)$ гипоэллиптичен (см. теорему 4 работы [7]).

Этим теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Легко видеть, что если многочлен $P(\xi)$ гипоэллиптичен, то $\dot{E}(P) \subset E(P)$.

§ 3. Сравнение и гипоэллиптичность многочленов с переменными коэффициентами при $n=2$

Пусть имеем многочлен $P(x, \xi) = \sum_{\alpha} \gamma_\alpha(x) \xi^\alpha$, где $\gamma_\alpha(x)$ — вещественные функции, определенные в области Ω пространства R_n.

О п р е д е л е н и е 16. Многочлен $P(x, \xi)$ имеет постоянную силу в Ω, если для любых двух точек $x, y \in \Omega$ существует постоянная $C_{x,y} > 0$ такая, что $\tilde{P}(x, \xi)/\tilde{P}(y, \xi) \leqslant C_{x,y}$ для любого $\xi \in R_n$, где для данного многочлена $R(x, \xi)$, $\tilde{R}(x, \xi) = [\sum_{\alpha} |D_\xi^\alpha R(x, \xi)|^2]^{1/2}$.

В работе [8] при $n=2$ доказано, что λ-однородный многочлен $Q_m(x, \xi)$ имеет постоянную силу в Ω тогда и только тогда, когда имеет место представление

$$Q_m(x, \xi) = Q_m^0(x, \xi)\, q(\xi),$$

где $Q_m^0(x, \xi) \neq 0$ для любого $x \in \Omega$ и $\xi \in R_2^{(0)}$, а

$$q(\xi) = \prod_{\tau \in \Sigma(Q_m(x^0, \xi))} (\xi_1 - \varkappa(\tau)\, \xi_2^{\lambda_1/\lambda_2})^{l(\tau)}.$$

Там же доказано, что если многочлен $Q_m(x, \xi)$ имеет постоянную силу в Ω, то $\Sigma(x, Q_m)$ не зависит от точки $x \in \Omega$:

$$\Sigma(x, Q_m) \equiv \Sigma(Q_m).$$

Мы будем рассматривать многочлены вида

$$P(x, \xi) = \sum_{i=0}^{M} P_{m_i}(x, \xi), \quad m_0 > m_1 > \cdots > m_M > 0,$$

где $P_{m_i}(x, \xi)$ — λ-однородный многочлен ($\lambda_i > 0$, $i=1, \cdots, n$) порядка m_i, $i = 0, \cdots, M$, где $P_{m_0}(x, \xi)$ представляется в виде $P_{m_0}^0(x, \xi)\, P(\xi)$, $P_{m_0}^0(x, \xi), P(\xi)$ являются (λ, β)-многочленами и $P_{m_0}^0(x, \xi) \neq 0$ для всех $x \in \Omega$, $\xi \in R_2^{(0)}$.

Далее мы будем считать, что рассматриваемые многочлены удовлетворяют следующему условию:

C$'$) для каждой пары точек (τ, x), где $\tau \in \Sigma(P)$, $x \in \Omega$ и для любого $j \in \mathrm{A}(x, \tau)$ существует число $\delta = \delta(x) \in [0, 1]$ такое. что

$$\chi(x, \tau, P_{m_j}, \delta) > \chi(x, \tau, P - P_{m_j}, \delta).$$

Лемма 3. *Пусть многочлен $P(x, \xi)$ удовлетворяет условию C$'$) и для всех точек $\tau \in \Sigma(P)$ функция $\chi(x, \tau, P, \delta)$ не зависит от $x \in \Omega$.*

Тогда, если многочлен $P_{m_i}(x^0, \xi)$, $0 \leqslant i \leqslant M$ является активным подмногочленом многочлена $P(x^0, \xi)$ в точке $\tau \in \Sigma(P)$, где x^0 — некоторая точка из Ω, то для любой точки $x \in \Omega$ многочлен $P_{m_i}(x, \xi)$ является активным подмногочленом многочлена $P(x, \xi)$ в точке τ и при этом для всех $x \in \Omega$ множество чисел $\delta \in [0, 1]$, удовлетворяющих условию C$'$) не зависит от x.

Доказательство. Сначала заметим, что из условия C$'$) и из определения х.л. следует, что если многочлен $P_{m_i}(x^0, \xi)$ является активным подмногочленом многочлена $P(x^0, \xi)$ в точке τ, то существует отрезок $[C_1, C_2] \subset [0, 1]$ такой, что при $\delta \in [C_1, C_2]$, $\chi(x^0, \tau, P_{m_i}, \delta) > \chi(x^0, \tau, P - P_{m_i}, \delta)$. Пусть $x^1 \in \Omega$ — произвольная точка. Докажем, что многочлен $P_{m_i}(x^1, \xi)$ является активным подмногочленом многочлена $P(x^1, \xi)$ в точке τ. Так как по условию $\chi(x, \tau, P, \delta) \equiv \chi(x^0, \tau, P, \delta)$, $\delta \in [0, 1]$, то существует многочлен $P_{m_j}(x, \xi)$, $0 < j \leqslant M$, являющийся активным подмногочленом многочлена $P(x^1, \xi)$ в точке τ такой, что для некоторого числа $\delta_0 \in [C_1, C_2]$ $\chi(x^1, \tau, P_{m_j}, \delta_0) = \chi(x^0, \tau, P, \delta_0) = \chi(x^0, \tau, P_{m_l}, \delta_0)$ и $\chi(x^1, \tau, P_{m_j}, \delta_0) > \chi(x^1, \tau, P - P_{m_j}, \delta_0)$. Из этого следует существование отрезка $[C_3, C_4] \subset [C_1, C_2]$ такого, что $\chi(x^1, \tau, P_{m_j}, \delta) = \chi(x^0, \tau, P_{m_l}, \delta)$ при $\delta \in [C_3, C_4]$. Но поскольку х.л. λ-однородного многочлена определяетзя любым куском х.л. этого многочлена, то $m_j = \chi(x^1, \tau, P_{m_j}, 0) = \chi(x^0, \tau, P_{m_l}, 0) = m_l$, а это означает, что $P_{m_l}(x, \xi) \equiv P_{m_j}(x, \xi)$, т. е. многочлен $P_{m_l}(x^1, \xi)$ является активным подмногочленом многочлена $P(x^1, \xi)$ в точке τ. Так как число $\delta_0 \in [0, 1]$ можно брать произвольным, лишь бы оно удовлетворяло условию С′), то это доказывает лемму.

Лемма 4. *Пусть многочлен* $P(x, \xi) = \sum\limits_{l=0}^{M} P_{m_l}(x, \xi)$, *где* $m_0 > m_1 > \cdots > m_M \geqslant 0$ *имеет постоянную силу в* Ω, *тогда функция* $\chi(x, \tau, P, \delta)$ *при* $x \in \Omega$, $\tau \in \Sigma(P)$, $\delta \in [0, 1]$ *не зависит от точки* $x \in \Omega$.

Доказательство. Пусть для точек $\tau \in \Sigma(P)$, $x^0, x^1 \in \Omega$ и число $\delta_0 \in [0, 1]$

$$\chi(x^1, \tau, P, \delta_0) > \chi(x^0, \tau, P, \delta_0). \tag{22}$$

Рассмотрим многочлены с постоянными коэффициентами $P(x^1, \xi)$ $P(x^0, \xi)$. Из определения х.л. следует существование последовательности $\{\xi^s\}$ и чисел $C_0, C_1, C_2 > 0$ таких, что для любого $\alpha \in Z_2^+$

$$|\xi_1^s - \varkappa(\tau)(\xi_2^s)^{\lambda_1/\lambda_2}| = C_0 \|\xi^s, \lambda\|^{1-\delta_0},$$

$$1 + |P(x^1, \xi^s)| > C_1 \|\xi^s, \lambda\|^{\chi(x^1, \tau, P, \delta_0)},$$

$$|D_\xi^\alpha P(x^0, \xi^s)| \leqslant C_2 \|\xi^s, \lambda\|^{\chi(x^0, \tau, P, \delta_0) - \delta_0 |\alpha|}.$$

Эти оценки вместе с соотношением (22) противоречат тому, что многочлен $P(x, \xi)$ имеет постоянную силу в Ω и доказывают лемму.

Следствие 3. Пусть многочлен $P(x, \xi)$ имеет постоянную силу в Ω и удовлетворяет условию С′), тогда

$$P(x, \xi) = \sum_{l \in V} P_{r_l}(x, \xi)\, p_l(\xi) + Q(x, \xi),$$

где $P_{r_l}(x, \xi) \neq 0$ при $\xi \in \Sigma(P)$, $x \in \Omega$ многочлен $Q(x, \xi)$ не является активным подмногочленом многочлена $P(x, \xi)$ ни для какой точки $\tau \in \Sigma(P)$, а $V \equiv V(x) = \bigcup\limits_{\tau \in \Sigma(P)} A(x, \tau)$ для любой точки $x \in \Omega$.

Теорема 8. *Если многочлен* $P(x, \xi) = \sum\limits_{l=0}^{M} P_{m_l}(x, \xi)$ *удовлетворяет условию* С′), *регулярен в каждой точке* $\tau \in \Sigma(x, P_{m_0})$, $P_{m_0}(x, \xi)$ *имеет постоянную силу в* Ω *и функция* $\chi(x, \tau, P, \delta)$ *не зависит от точки* $x \in \Omega$, *то многочлен* $P(x, \xi)$ *имеет постоянную силу в* Ω.

Доказательство. Пусть наоборот, при выполнении условий теоремы многочлен $P(x, \xi)$ не имеет постоянной силы в Ω. Это значит, что существуют точки $x^0, x^1 \in \Omega$ и последовательность $\{\xi^s\}$ такие, что при $s \to \infty$

$$\tilde{P}(x^1, \xi^s)/\tilde{P}(x^0, \xi^s) \to 0. \tag{23}$$

Легко видеть, что для некоторой подпоследовательности этой последовательности (которую также обозначим через $\{\xi^s\}$) существует точка $\tau \in \Sigma(P)$ такая, что $\xi^s / \|\xi^s, \lambda\|^\lambda \to \tau$ при $s \to \infty$. Учитывая регулярность многочлена $P(x, \xi)$, получим для некоторой постоянной $C > 0$

$$1 + |P(x^1, \xi^s)| \geqslant C \sum_{l=0}^{M} |P_{m_l}(x^1, \xi^s)|, \quad |P(x^0, \xi^s)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l=0}^{M} |P_{m_l}(x^0, \xi^s)|.$$

Докажем, что для некоторой подпоследовательности $\{\xi^{s'}\}$ последовательности $\{\xi^s\}$, такой, что $\xi^{s'} \to \infty$

$$|\xi_1^{s'} - \varkappa(\tau)(\xi_2^{s'})^{\lambda_1/\lambda_2}| \to \infty.$$

Пусть наоборот

$$|\xi_1^s - \varkappa(\tau)(\xi_2^s)^{\lambda_1/\lambda_2}| \leqslant C < \infty \quad s = 1, 2, \cdots.$$

Тогда для некоторых постоянных $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ имеем

$$|\tilde{P}(x^1, \xi^s)| < C_1 \|\xi^s, \lambda\|^{\chi(x^1, \tau, P, 1)},$$

$$1 + |\tilde{P}(x^0, \xi^s)| > C_2 \|\xi^s, \lambda\|^{\chi(x^0, \tau, P, 1)}.$$

Так как $\chi(x^1, \tau, P, 1) = \chi(x^0, \tau, P, 1)$, то полученные соотношения противоречат (23).

Итак, при $s' \to \infty$

$$|\xi_1^{s'} - \varkappa(\tau)(\xi_2^{s'})^{\lambda_1/\lambda_2}| \to \infty.$$

В силу следствия 3 имеем, что

$$P(x, \xi^{s'}) = \sum_{l \in V} P_{r_l}^0(x, \xi^{s'}) p_l(\xi^{s'}) + Q(x, \xi^{s'}).$$

В силу леммы 9 работы [7] имеем, что при $s' \to \infty$

$$\left| \frac{Q(x^1, \xi^{s'})}{\sum_{l \in V} P_{r_l}(x^1, \xi^{s'}) P_l(\xi^{s'})} \right| \to 0, \quad \frac{|Q(x^0, \xi^{s'})|}{\left|\sum_{l \in V} P_{r_l}(x^0, \xi^{s'}) P_l(\xi^{s'})\right|} \to 0.$$

Отсюда следует, что с некоторой постоянной $C_3 > 0$

$$\frac{|\widetilde{P}(x^0, \xi^{s'})|}{1+|\widetilde{P}(x^1, \xi^{s'})|} \leqslant C_3 \frac{|\sum\limits_{i\in V} P^0_{r_i}(x^0, \xi^{s'})\, P_i(\xi^{s'})|}{1+|\sum\limits_{i\in V} P^0_{r_i}(x^1, \xi^{s'})\, p_i(\xi^{s'})|}.$$

Поскольку в точке ξ многочлены $P^0_{r_i}(x^0, \xi)$ и $P^0_{r_i}(x^1, \xi)$ не обращаются в нуль ни для какого индекса $i \in V$, то для каждого $i \in V$ существует число $\varepsilon_i > 0$ такое, что

$$|P^0_{r_i}(x^0, \xi^{s'})|/(1+|P^0_{r_i}(x^1, \xi^{s'})|) \leqslant \varepsilon_i, \quad s = 1, 2, \cdots. \tag{24}$$

Так как $P_i(\xi^{s'}) \to \infty$ при $s' \to \infty$ для $i \in V$, то (24) противоречит (23) и доказывает теорему.

Следствие 4. Если при условиях теоремы 8 еще потребовать, чтобы $\gamma_\alpha(x) \in C^\infty(\Omega)$ для всех $\alpha \in (P)$, то многочлен $P(x, \xi)$ будет формально гипоэллиптическим в Ω (см. [10]), если многочлен $P(x, \xi)$ гипоэллиптичен хотя бы в одной точке $x^0 \in \Omega$.

Доказательство немедленно следует из теоремы 8 и теоремы 7.4.1 работы [1].

Ереванский научно-исследовательский
институт математических машин

Поступила 10.VIII.1979

Վ. Ն. ՄԱՐԳԱՐՅԱՆ. Օպերատորի հիպոէլիպտիկությունը պահպանող կրտսեր անդամների գումարում *(ամփոփում)*

Այս աշխատանքում գտնված են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ $Q(\xi)$ բազմանդամի համար այնպիսի, որպեսզի $P(\xi)+Q(\xi)$ բազմանդամը լինի հիպոէլիպտիկ, եթե հիպոէլիպտիկ է $P(\xi)$ բազմանդամը։

V. N. MARGARIAN. *Addition of junior terms preserving hypoellipticity of an operator* (summary)

When the polynomial $P(\xi)+Q(\xi)$ is hypoelliptic if the polynomial $P(\xi)$ is hypoelliptic. The paper gives an answer to this question stating some necessary as well as some sufficient conditions.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. Хермандер.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными, М., «Мир», 1965.
2. *B. Pini.* Osservazoni sulla ipoellicita, Boll. un. Mat. Ital., 1963, 420—432.
3. *L. Hörmander.* On intrior regularrity of the solutions of partial differential equations, Comm. Pure. Appl. Math., 11, 1958, 197—218.
4. *Г. Г. Казарян.* Об одном семействе гипоэллиптических многочленов, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., IX, № 3, 1974, 189—211.
5. *Г. Г. Казарян.* О добавлении младших членов к дифференциальным полиномам, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., IX, № 6, 1974, 373—485.
6. *Г. Г. Казарян.* Об оценках мономов через данный многочлен и характеризация гипоэллиптичности, ДАН СССР, 222, № 3, 1975, 530—533.
7. *Г. Г. Казарян, В. И. Маркарян.* Критерии гипоэллиптичности в терминах сравнения мощности и силы операторов, Труды МИАН СССР, 150, 1979, 128—142.

8. *Г. Г. Казарян.* Операторы постоянной силы с оценками снизу через производные и формально гипоэллиптические операторы. Analysis Math., 3, Fasc. 4, 1977, 263—289.
9. *Г. Г. Казарян.* Сравнение мощности многочленов и их гипоэллиптичность. Труды МИАН СССР, 150, 1979, 143—159.
10. *J. Peetre.* A proof of the hypoellipticity of formaly hypoelliptic differential operators, Comm. Pure. Appl. Math., 14, 1967, 737—747.
11. B. *Malgrange.* Sure une classe d'operatours differentials hypoelliptiques, Bull. Soc. Math. France, 85, № 3, 1957, 283—306.
12. *L. Cattabriga.* Su una classi di polinomi ipoelitici, Rend. Sem., Math. Univ. Padova, 36, 1966, 285—309.