

В. А. МАРТИРОСЯН

О РОСТЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ МНОГОЧЛЕНОВ, ОСУЩЕСТВЛЯЮЩИХ РАВНОМЕРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

1°. Пусть E —компакт комплексной плоскости C , $A(E)$ —банахово пространство непрерывных на E и голоморфных в его внутренности E^0 комплексных функций с нормой $\|f\| = \sup |f| (E)$.

В 1951 г. С. Н. Мергелян получил [1] исчерпывающее решение проблемы комплексной полиномиальной аппроксимации, доказав, что любая функция из $A(E)$ приближается равномерно на E многочленами тогда и только тогда, когда E имеет связное дополнение $C \setminus E$. В этой связи естественно рассмотреть следующую задачу: каким условиям должны удовлетворять компакт E и последовательность положительных чисел $\{w_k\}_{k=0}^\infty$, чтобы какова бы ни была функция $f \in A(E)$ для любого числа $\varepsilon > 0$ существовал бы такой многочлен $p(z) =$

$$= \sum_{k=0}^n c_k z^k, \text{ что}$$

$$\|f - p\| < \varepsilon$$

(1)

$$|c_k| < \varepsilon w_k, k = 0, 1, \dots, n?$$

Очевидно, что для разрешимости задачи необходимо, чтобы E имело связное дополнение $C \setminus E$ и $0 \notin E^0$; кроме того при $0 \in E$ аппроксимируемые функции должны быть равны нулю в точке нуль.

Первый общий результат по этой задаче получил С. Я. Хавинсон. Он установил [2], что если компакт E имеет связное дополнение $C \setminus E$, $E^0 = \emptyset$ и $0 \in E$, а последовательность положительных чисел $\{w_k\}_{k=0}^\infty$ удовлетворяет условию

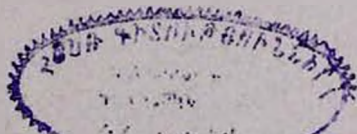
$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{w_k} = \infty, \quad (2)$$

то любая функция $f \in A(E)$, $f(0) = 0$, допускает приближение вида (1); если же 0 является предельной точкой компакта E и

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{w_k} < \infty,$$

то существуют функции $f \in A(E)$, $f(0) = 0$, не допускающие такого приближения.

Затем Р. М. Тригуб показал [3], что приведенный результат о приближении справедлив также для более общего класса компактов: компакты, внутренность которых не может сгущаться к граничной



точке нуль. Тем самым для этого важного класса компактов был найден точный рост мажорантной последовательности чисел $\{w_k\}_{k=0}^\infty$.

В настоящей заметке возможность приближения вида (1) изучается для таких компактов, внутренность которых может сгущаться к граничной точке нуль. Оказывается, что в такой ситуации рост мажорантной последовательности зависит от метрических свойств внутренности компакта в окрестности нуля и уже, вообще говоря, не определяется условием (2).

2°. Изложение полученных результатов начнем с рассмотрения такого случая, когда возможно „прерывистое“ сгущение внутренности компакта к его граничной точке нуль.

Теорема 1. Пусть компакт E имеет связанное дополнение $\mathbb{C} \setminus E$, $0 \in \partial E$ и в любом круге $\{z: |z| < r\}$ существует охватывающая точку нуль кривая Жордана $\gamma \subset \mathbb{C} \setminus E$, а последовательность положительных чисел $\{w_k\}_{k=0}^\infty$ удовлетворяет условию

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{w_k} = \infty.$$

Тогда любая функция $f \in A(E)$, $f(0) = 0$, допускает приближение вида (1).

Доказательство. Пусть комплексная борелевская мера μ удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\sum_{k=0}^n w_k \left| \int_{\partial E} z^k d\mu_z \right| \leq 1, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3)$$

В силу критерия полноты с мажорантой $\{w_k\}_{k=0}^\infty$ системы функций $\{z^k\}_{k=0}^\infty$ (см. [4]) и теорем Рисса и Мергеляна, достаточно показать, что из (3) следуют соотношения

$$\int_{\partial E} z^k d\mu_z = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Рассмотрим голоморфную в $\mathbb{C} \setminus E$ функцию

$$G(t) = \int_{\partial E} \frac{d\mu_z}{t - z}.$$

В окрестности точки $t = \infty$ она разлагается в ряд Лорана

$$G_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^{-k-1} \int_{\partial E} z^k d\mu_z.$$

Так как из (3) имеем, в частности

$$\left| \int_{\partial E} z^k d\mu_z \right| \leq \frac{1}{w_k}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

то, в силу (2), функция $G_1(t)$ будет голоморфной при $t \in \overline{C} \setminus \{0\}$. Поэтому, учитывая связность $C \setminus E$, по теореме единственности получим

$$G(t) = G_1(t), \quad t \in \overline{C} \setminus E. \quad (5)$$

При предположениях теоремы найдутся такие контуры γ_n , $n = 1, 2, \dots$, что каждый контур $\gamma_n \subset C \setminus E$ и охватывает точку нуль, диаметры контуров стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$ и если G_n — ограниченная область с границей γ_n , то $\gamma_{n+1} \subset G_n$. Обозначим $E_n = E \setminus (E \cap \gamma_n)$; ясно, что $E_n \cap (E \setminus E_n) = \emptyset$, $n = 1, 2, \dots$. Из определения $G_1(t)$ имеем

$$\int_{\partial E} z^k d\mu_z = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} t^k G_1(t) dt, \quad k = 1, 2, \dots; \quad n = 1, 2, \dots$$

Однако, $\gamma_n \subset C \setminus E$, $n = 1, 2, \dots$ и поэтому, согласно (5)

$$\int_{\partial E} z^k d\mu_z = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} t^k dt \int_{\partial E} \frac{d\mu_z}{t - z}.$$

Отсюда, применяя теорему Фубини и интегральную формулу Коши, получим

$$\int_{\partial E} z^k d\mu_z = \int_{\partial E \setminus \partial E_n} z^k d\mu_z$$

и, следовательно, будем иметь

$$\int_{\partial E_n} z^k d\mu_z = 0, \quad k = 1, 2, \dots; \quad n = 1, 2, \dots$$

Переходя к пределу под знаком интеграла при $n \rightarrow \infty$, что возможно по теореме Лебега, получим соотношения (4). Теорема доказана.

3°. Рассмотренному в теореме 1 случаю противоположен другой случай, когда возможно „непрерывное“ сгущение внутренности компакта к его граничной точке нуль. В этом случае рост мажорантной последовательности зависит от метрических свойств внутренности компакта в окрестности нуля и уже не определяется условием (2). Чтобы привести соответствующий результат нам понадобятся две леммы.

Для компакта E и точки t введем обозначение

$$d_E(t) = \min_{z \in E} |z - t|.$$

Лемма 1. Пусть дуга Жордана Γ в полярной системе координат r, θ имеет уравнение $\theta = \varphi(r)$, $0 \leq r \leq R$, где функция $\varphi(r)$ при $0 < r < R$ имеет равномерно ограниченную производную. Тогда для всех достаточно малых $t \in \Gamma$ справедлива оценка

$$d_{\Gamma}(t) \geq C |t| |\arg t - \varphi(|t|)|, \quad (6)$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от t .

Доказательство. Пусть $|\varphi'(r)| \leq M$ ($M \geq 1$), при $0 < r < R$.
Оценку (6) докажем для всех $t \in \Gamma$, удовлетворяющих условию

$$|t| \leq \min \left\{ \frac{R}{2}, \frac{1}{2M} \right\}.$$

Зафиксируем такое t и взяв $z = re^{i\varphi(r)} \in \Gamma$, рассмотрим функцию

$$f(r) = |t - z|^2 = |t|^2 + r^2 - 2|t|r \cos(\arg t - \varphi(r)), \quad 0 \leq r \leq R.$$

Оценим эту функцию снизу. Так как $f(r) \geq (r - |t|)^2$, $0 \leq r \leq R$, то обозначая

$$\delta = \frac{|\arg t - \varphi(|t|)|}{32}, \quad I = \left(\left(1 - \frac{\delta}{M}\right) |t|, \left(1 + \frac{\delta}{M}\right) |t| \right),$$

будем иметь

$$f(r) \geq \frac{\delta^2}{M^2} |t|^2, \quad 0 \leq r \leq R, \quad r \in I. \quad (7)$$

Для оценки функции при $r \in I$ отметим, что из теоремы Лагранжа о конечном приращении имеем

$$|\varphi(r) - \varphi(|t|)| < \delta, \quad r \in I. \quad (8)$$

Рассмотрим два случая. Предположим сперва, что

$$\frac{\pi}{2} + 2\delta \leq |\arg t - \varphi(|t|)| \leq \pi.$$

Тогда из (8) будем иметь

$$\frac{\pi}{2} + \delta \leq |\arg t - \varphi(r)| \leq \pi + \delta, \quad r \in I,$$

откуда, так как $0 < \delta < \frac{1}{4}$, получим

$$f(r) \geq |t|^2, \quad r \in I. \quad (9)$$

Пусть теперь имеем

$$2\delta \leq |\arg t - \varphi(|t|)| \leq \frac{\pi}{2} + 2\delta. \quad (10)$$

Для производной

$$f'(r) = 2r - 2|t| \cos(\arg t - \varphi(r)) - 2|t|r\varphi'(r) \sin(\arg t - \varphi(r)), \quad 0 < r < R,$$

имеются две возможности: она или имеет хотя бы один корень $r_0 \in I$, или не имеет ни одного такого корня. Ясно, что во втором случае будем иметь

$$f(r) \geq \frac{\delta^2}{M^2} |t|^2, \quad r \in I.$$

В другом случае, учитывая, что каждый корень r_0 удовлетворяет соотношению

$$r_0 = \frac{|t| \cos(\arg t - \varphi(r_0))}{1 - |t| \varphi'(r_0) \sin(\arg t - \varphi(r_0))},$$

простыми выкладками получим неравенство

$$f(r_0) \geq |t|^2 \sin^2(\arg t - \varphi(r_0)), \quad f'(r_0) = 0, \quad r_0 \in I.$$

Поэтому, так как из (8), (10) будем иметь

$$\delta \leq |\arg t - \varphi(r_0)| \leq \frac{\pi}{2} + 3\delta,$$

то получим

$$f(r_0) > |t|^2 \sin^2 \delta, \quad f'(r_0) = 0, \quad r_0 \in I.$$

Следовательно, (10) всегда влечет неравенство

$$f(r) \geq \frac{\sin^2 \delta}{M^2} |t|^2, \quad r \in I. \quad (11)$$

Остается отметить, что (7), (9), (11) приводят к оценке

$$f(r) \geq C_1 \delta^2 |t|^2, \quad 0 \leq r \leq R,$$

где постоянная $C_1 > 0$ не зависит от t . Лемма доказана.

Формулировке другой леммы предпошлем (см. статью С. Е. Варшавского [5]) несколько определений.

Пусть кривые Γ_+ и Γ_- , расположенные в плоскости $\zeta = re^{i\theta}$, не имеют общих точек, кроме точки $\zeta = 0$ и представляются в полярных координатах непрерывными функциями

$$\theta = \varphi_+(r), \quad \theta = \varphi_-(r), \quad 0 \leq r < +\infty,$$

удовлетворяющими условиям:

$$-\infty \leq \theta_1 < \varphi_+(r) < \theta_2 \leq +\infty,$$

$$0 < r < +\infty.$$

$$0 < \varphi_+(r) - \varphi_-(r) < 2\pi$$

Область Δ , ограниченную кривою $\Gamma = \Gamma_+ + \Gamma_-$ и содержащую область

$$\varphi_-(r) < \theta < \varphi_+(r), \quad 0 \leq r < +\infty,$$

назовем *простым углом Жордана*. Величины

$$\theta(r) = \varphi_+(r) - \varphi_-(r) \quad \text{и} \quad \psi(r) = \frac{1}{2} [\varphi_+(r) + \varphi_-(r)]$$

назовем *раствором и биссектрисой* угла Δ соответственно. Скажем, что *угол Жордана Δ в точке $\zeta = \infty$ имеет угол колебания границы, равный γ и конечное вращение границы*, если функции $\theta(r)$ и $\psi(r)$ при $r \geq r_1$ имеют непрерывные производные, причем

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r\theta'(r) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r\psi'(r) = \operatorname{tg} \gamma, \quad |\gamma| < \frac{\pi}{2}$$

и сходятся интегралы

$$\int_{r_1}^{\infty} |dr \theta'(r)|, \int_{r_1}^{\infty} |dr \psi'(r)|.$$

Пусть дополнительно сходится интеграл

$$\int_{r_1}^{\infty} \frac{r \theta'^2(r)}{\theta(r)} dr.$$

Тогда из теоремы С. Е. Варшавского [5] легко следует, что если $w = w(\zeta)$ — функция, конформно отображающая угол Δ на полуплоскость $\operatorname{Re} w > 0$, причем $\lim_{|\zeta| \rightarrow \infty} |w(\zeta)| = +\infty$, то существуют постоянные C_1 и C_2 такие, что в угле Δ при $|\zeta| > r_1$ имеет место неравенство

$$C_1 \sigma(|\zeta|) \leq |w(\zeta)| \leq C_2 \sigma(|\zeta|), \quad (12)$$

где

$$\sigma(s) = \exp \left\{ \pi \int_{r_1}^s \frac{1 + [r \psi'(r)]^2}{r \theta(r)} dr \right\}.$$

Далее скажем, что угол Жордана Δ в точке $\zeta = 0$ имеет угол колебания границы, равный γ и конечное вращение границы, если функции $\theta(r)$ и $\psi(r)$ при $0 < r \leq r_2$ имеют непрерывные производные, причем

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \theta'(r) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} r \psi'(r) = \operatorname{tg} \gamma, \quad |\gamma| < \frac{\pi}{2}$$

и сходятся интегралы

$$\int_0^{r_2} |dr \theta'(r)|, \quad \int_0^{r_2} |dr \psi'(r)|.$$

Ясно, что такой угол при отображении $z = \frac{1}{r}$ переходит в угол, имеющий в точке $z = \infty$ угол колебания границы, равный γ , и конечное вращение границы.

Лемма 2. Пусть Δ — простой угол Жордана, имеющий в точке $\zeta = \infty$ конечное вращение границы и угол колебания границы, равный γ , $|\gamma| < \frac{\pi}{2}$, а $\theta(r)$ и $\psi(r)$ ($0 \leq r < +\infty$) — соответственно раствор и биссектриса угла Δ , причем

$$\int_{r_1}^{\infty} \frac{r \theta'^2(r)}{\theta(r)} dr < \infty$$

и

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{\theta(r)}}{r} < \infty.$$

Тогда существует целая функция $g(\zeta) \neq \text{const}$, которая равномерно ограничена при $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \Delta$ и удовлетворяет условию

$$\overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} \frac{\log M(s)}{s(2s)} < \infty,$$

где

$$\sigma(s) = \exp \left\{ \pi \int_{r_1}^s \frac{1 + [r\psi'(r)]^2}{r\theta(r)} dr \right\}, \quad M(s) = \max_{|\zeta| \leq s} |g(\zeta)|.$$

Доказывается эта лемма по следующей схеме (см. [1], стр. 96). Пусть Δ^* — содержащийся в Δ угол, биссектриса которого совпадает с биссектрисой угла Δ , а раствор $\theta^*(r)$ имеет вид

$$\theta^*(r) = \begin{cases} \theta(r) \left[1 - \frac{\theta^2(r)}{8\pi^2 r^2} \right] & \text{при } r \geq 1, \\ \theta(r) \left[1 - \frac{\theta^2(1)}{8\pi^2} \right] & \text{при } 0 \leq r \leq 1. \end{cases}$$

Этот угол сам удовлетворяет всем требованиям леммы относительно угла Δ и, кроме того, справедливо неравенство

$$\sigma^*(s) \leq C\sigma(s), \quad s \geq r_1, \quad (13)$$

где C — постоянная,

$$\sigma^*(s) = \exp \left\{ \pi \int_{r_1}^s \frac{1 + [r\psi'(r)]^2}{r\theta^*(r)} dr \right\}.$$

Пусть $w = w(\zeta)$ — функция, конформно отображающая Δ^* на полуплоскость $\text{Re } w > 0$, причем $\lim_{|\zeta| \rightarrow \infty} |w(\zeta)| = +\infty$, а D^* — дополнительная к Δ^* область. Обозначая

$$D_R^* = D^* \cup \{\zeta: |\zeta| < R\} \quad (R > 0), \quad \Gamma_R = \partial D_R^*,$$

определим голоморфную в области D_R^* функцию

$$g_R(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{w(z)} dz}{z(z-\zeta)}, \quad \zeta \in D_R^*.$$

где контур Γ_R обходится в таком направлении, при котором область D_R^* остается слева. Каждая функция $g_{R'}(\zeta)$, $R' > R$, осуществляет аналитическое продолжение функции $g_R(\zeta)$ из области D_R^* в область $D_{R'}^*$. Таким образом, определяется целая функция $g(\zeta)$ — функция, существование которой утверждает лемма. Она равномерно ограничена при $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \Delta$, так как имеем оценку

$$|g(\zeta)| \leq C_1 + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma \cap \Omega^*} \frac{d|z|}{|z||z-\zeta|}, \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus \Delta, \quad |\zeta| \geq 2,$$

где постоянная C_1 не зависит от ζ , а из свойств последнего интеграла можно извлечь его равномерную ограниченность при $\zeta \in C \setminus \Delta$. Для оценки роста функции $g(\zeta)$ достаточно заметить, с учетом (13), что она растет примерно как функция $e^{w(\zeta)}$, $\zeta \in \Delta^*$, и для $w(\zeta)$ справедливо неравенство вида (12) с заменой $\sigma(s)$ на $\sigma^*(s)$.

4°. Приведенные леммы позволяют изучить рост мажорантной последовательности в случае, когда возможно „непрерывное“ сгущение внутренности компакта к его граничной точке нуля.

Теорема 2. Пусть S —объединение не имеющих друг с другом общих точек, за исключением нуля, конечного числа секторов

$$S_k = \{z \in C : \varphi_{k,-}(|z|) \leq \arg z \leq \varphi_{k,+}(|z|), |z| \leq R\}, \quad k=1, 2, \dots, n,$$

причем:

а) каждая из функций $\varphi_{k,\pm}(r)$ ($0 \leq r \leq R$), $k=1, 2, \dots, n$, имеет при $0 < r < R$ равномерно ограниченную производную;

в) $\vartheta_k(r) > 0$ при $0 < r \leq R$, $k=1, 2, \dots, n$, и удовлетворяются условия

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \frac{\log \frac{1}{\vartheta_k(r)}}{\log \frac{1}{r}} < \infty, \quad k=1, 2, \dots, n, \quad (14)$$

где

$$\vartheta_k(r) = \varphi_{k+1,-}(r) - \varphi_{k,+}(r), \quad k=1, 2, \dots, n-1, \text{ и}$$

$$\vartheta_n(r) = \varphi_{1,-}(r) - \varphi_{n,+}(r).$$

Пусть компакт E имеет связное дополнение $C \setminus E$, $0 \in \partial E$ и в окрестности $\{z : |z| \leq R\}$ точки нуля $E \cap \{z : |z| \leq R\} \subseteq S$, а последовательность положительных чисел $\{w_k\}_{k=0}^\infty$ удовлетворяет условию

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{k \log k}{\log w_k} < \frac{\pi}{\max_{1 \leq k \leq n} \vartheta_k(0)}, \quad (15)$$

где

$$\vartheta_k(r) = \varphi_{k,+}(r) - \varphi_{k,-}(r), \quad k=1, 2, \dots, n.$$

Тогда любая функция $f \in A(E)$, $f(0) = 0$ допускает приближение вида (1).

Доказательство. Пусть комплексная борелевская мера μ удовлетворяет неравенством (3). Достаточно показать, что из (3) следуют соотношения (4). Введем для этого, как и при доказательстве теоремы 1, функции

$$G(t) = \int_{\partial E} \frac{d\mu_z}{t-z}, \quad t \in \bar{C} \setminus E,$$

$$G_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^{-k-1} \int_{\partial E} z^k d\mu_z, \quad t \in \bar{C} \setminus \{0\}.$$

Они удовлетворяют соотношению (5). Кроме того, так как из (3) имеем, в частности

$$\left| \int_{\partial E} z^k d\mu_z \right| \leq \frac{1}{w_k}, \quad k=0, 1, \dots,$$

то порядок ρ целой функции $g(\zeta) = G_1 \left(\frac{1}{t} \right)$ будет удовлетворять неравенству

$$\rho \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{k \log k}{\log w_k}. \quad (16)$$

Рассмотрим содержащее S следующее множество:

$$S^* = \bigcup_{k=1}^n S_k^*,$$

где

$$S_k^* = \{z \in \mathbb{C} : \varphi_{k,-}(|z|) - \theta^*(|z|) < \arg z < \varphi_{k,+}(|z|) + \theta^*(|z|), |z| \leq R\}$$

и

$$\theta^*(r) = \frac{r}{4R} \min_{1 \leq k \leq n} \{\vartheta_k(r)\}, \quad 0 \leq r \leq R.$$

Ясно, что из (14) следует оценка

$$\theta^*(r) \geq C_1 r^\alpha, \quad 0 \leq r \leq R, \quad (17)$$

где постоянные $C_1 > 0$ и $\alpha > 1$ не зависят от r .

Обозначая через $M(s) = \max_{0 < \varphi < 2\pi} |g(se^{i\varphi})|$ и замечая, что

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\log \sigma_k^*(s)}{\log s} = \frac{\pi}{\theta_k(0) + \theta^*(0)} = \frac{\pi}{\theta_k(0)}, \quad k=1, 2, \dots, n,$$

где

$$\sigma_k^*(s) = \exp \left\{ \pi \int_{\frac{1}{s}}^R \frac{dr}{r [\theta_k(r) + \theta^*(r)]} \right\},$$

из (15), (16) в силу определения порядка целой функции получим

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\log M(s)}{\log \sigma_k^*(s)} = 0, \quad k=1, 2, \dots, n. \quad (18)$$

Далее, так как $E \cap \{z : |z| \leq R\} \subseteq S \subseteq S^*$, то из леммы 1 легко следует, что при достаточно малом r ($0 < r < R$) для всех $t \in D^*$, где

$$D^* = (\mathbb{C} \setminus S^*) \cap \{z : 0 < |z| \leq r\},$$

имеет место оценка

$$d_E(t) > C_2 |t| \theta^*(|t|),$$

где постоянная $C_2 > 0$ не зависит от t . Значит, с учетом (17), будем иметь

$$d_E(t) > C_3 |t|^{1+\alpha}, \quad t \in D^*.$$

где постоянная $C_3 > 0$ не зависит от t . Но так как $D^* \subset C \setminus E$ и при $t \in C \setminus E$ имеем

$$|G(t)| \leq \frac{C_4}{d_E(t)},$$

где постоянная $C_4 > 0$ не зависит от t , то получим оценку

$$|G(t)| \leq C |t|^{-(1+\alpha)}, \quad t \in D^*, \quad (19)$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от t .

Вспоминая соотношение (5) и обозначая через D образ D^* при отображении $\zeta = \frac{1}{t}$, из (19) будем иметь

$$|g(\zeta)| \leq C |\zeta|^{1+\alpha}, \quad \zeta \in D.$$

Отсюда же, применяя в силу (18) к области $C \setminus D$ n -раз теорему Фрагмена—Линделефа, получим

$$|g(\zeta)| \leq C |\zeta|^{1+\alpha}, \quad \zeta \in C \setminus D.$$

Следовательно, целая функция $g(\zeta)$ будет многочленом и поэтому начиная с некоторого номера будут справедливы соотношения (4). Остается заметить, что при любом натуральном N система функций $\{1\} \cup \{z^k\}_{k=N}^{\infty}$ полна в $A(E)$. Теорема доказана.

Замечание 1. Частный случай теоремы 2, когда компакт E совпадает с сектором вида

$$\{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leq \alpha, |z| \leq R\} \quad (0 < \alpha < 2\pi),$$

получен другим подходом в работе [6].

Условие (15) теоремы 2 ограничивает снизу рост мажоранты в зависимости от метрических свойств внутренности компакта аппроксимации в окрестности нуля. Покажем, что для рассматриваемого в теореме класса компактов это условие нельзя существенно ослабить.

Теорема 3. Пусть Δ —простой угол Жордана, имеющий в точке $z=0$ конечное вращение границы и угол колебания границы, равный γ , $|\gamma| < \frac{\pi}{2}$, а $\theta(r)$ и $\psi(r)$ ($0 \leq r < +\infty$)—соответственно раствор и биссектриса угла Δ , причем

$$\int_0^{r_2} \frac{r^{\theta(r)^2}}{\theta(r)} dr < \infty,$$

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 0} r \log \frac{1}{\theta(r)} < \infty.$$

Пусть компакт E совпадает с содержащейся в окрестности $\{z : |z| \leq R\}$ ($0 < R \leq r_2$) точки нуль частью замкнутого угла $\bar{\Delta}$, а последовательность положительных чисел $\{w_k\}_{k=0}^{\infty}$ удовлетворяет условию

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k \log k}{\log w_k} > \overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\pi}{\log s} \int_{\frac{1}{s}}^{r_2} \frac{1 + [r\psi'(r)]^2}{r\theta(r)} dr \right\}. \quad (20)$$

Тогда существуют функции $f \in A(E)$, $f(0) = 0$, не допускающие приближения вида (1).

Доказательство. В силу критерия полноты с мажорантой $\{w_k\}_{k=0}^\infty$ системы функций $\{z^k\}_{k=0}^\infty$ (см. [4]) и теорем Рисса и Меггелана, достаточно указать такую комплексную борелевскую меру μ , что

$$\sum_{k=0}^{\infty} w_k \left| \int_{\partial E} z^k d\mu_z \right| \leq 1 \quad (21)$$

и

$$\int_{\partial E} z^{k_i} d\mu_z \neq 0,$$

по какой-либо подпоследовательности натуральных чисел $\{k_i\}_{i=1}^\infty$.

По лемме 2 построим целую функцию

$$g(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \zeta^k$$

такую, что $g\left(\frac{1}{z}\right)$ равномерно ограничена при $z \in \mathbb{C} \setminus \Delta$ и

$$\overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} \frac{\log M(s)}{\sigma(2s)} < \infty, \quad (22)$$

где

$$\sigma(s) = \exp \left\{ \pi \int_{\frac{1}{s}}^{r_2} \frac{1 + [r\psi'(r)]^2}{r\theta(r)} dr \right\}, \quad h(s) = \max_{|\zeta| \leq s} |g(\zeta)|.$$

Рассмотрим на борелевских подмножествах $e \subseteq \partial E$ конечную меру ν :

$$\nu(e) = \frac{1}{2\pi i} \int_{e \cap \Gamma} g\left(\frac{1}{z}\right) dz,$$

где Γ — граница E с положительным направлением обхода. Проверим сперва, что

$$\int_{\partial E} z^k d\nu_z = g_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (23)$$

Введем для этого контуры L_r и l_r ($0 < r < R$): контур L_r состоит из части контура Γ , лежащей вне круга $\{z: |z| \leq r\}$, и части окружности $\{z: |z| = r\}$, лежащей в $\mathbb{C} \setminus E$, а контур l_r состоит из части Γ , лежа-

шей в круге $\{z: |z| \leq r\}$, и части $\{z: |z| = r\}$, лежащей в $\mathbb{C} \setminus E$, причём L_r имеет положительное, а l_r — отрицательное направление обхода.

Тогда имеем

$$\int_{\partial E} z^k dv_z = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_r} z^k g\left(\frac{1}{z}\right) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_r} z^k g\left(\frac{1}{z}\right) dz + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{l_r} z^k g\left(\frac{1}{z}\right) dz = g_{k+1} + \frac{1}{2\pi i} \int_{l_r} z^k g\left(\frac{1}{z}\right) dz \quad (0 < r < R)$$

и так как $l_r \subset \mathbb{C} \setminus \Delta$ ($0 < r < R$), а функция $g\left(\frac{1}{z}\right)$ равномерно ограничена при $z \in \mathbb{C} \setminus \Delta$, то остается отметить, что при каждом фиксированном $k=0, 1, \dots$, интеграл по l_r стремится к нулю при $r \rightarrow 0$.

Далее, согласно (20) найдутся такие числа a и b , что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k \log k}{\log w_k} > a > b > \overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} \frac{\log \sigma(s)}{\log s}.$$

Отсюда получим

$$w_k < C_1 k^{k/a}, \quad k=1, 2, \dots, \quad (24)$$

где постоянная $C_1 > 0$ не зависит от k . Кроме того, учитывая (22), будем иметь

$$\overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} \frac{\log M(s)}{s^b} < \infty,$$

откуда легко следует оценка для коэффициентов $g(\zeta)$

$$|g_k| \leq C_2 k^{-\frac{n}{a_1}}, \quad k=1, 2, \dots, \quad (25)$$

где $b < a_1 < a$, постоянная $C_2 > 0$ не зависит от k . Из (23), (24) (25) следует, очевидно, что в качестве искомой можно взять меру $\mu = C\nu$, где постоянная $C > 0$ выбирается так, чтобы выполнялось (21). Теорема доказана.

Отметим, что если в дополнение к требованиям теоремы 3 компакт E расположен симметрично относительно действительной оси, ($\psi(r) = 0$, $0 \leq r \leq R$), то условие (20) этой теоремы примет следующий вид:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k \log k}{\log w_k} > \frac{\pi}{\theta(0)}.$$

Замечание 2. Для любого числа ρ , $\frac{1}{2} \leq \rho_1 \leq \infty$, существуют удовлетворяющий условиям теорем 2 и 3 компакт

$$E = \{z \in \mathbb{C}: \varphi_-(|z|) \leq \arg z \leq \varphi_+(|z|), |z| \leq R\}$$

и последовательность положительных чисел $\{w_k\}_{k=0}^\infty$ такие, что

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{k \log k}{\log w_k} = \frac{\pi}{\theta(0)} = \rho \quad (\theta(r) = \varphi_+(r) - \varphi_-(r)), \quad (26)$$

но существуют функции $f \in A(E)$, $f(0) = 0$, не допускающие приближения вида (1).

Действительно, пусть

$$E = \begin{cases} \left\{ z \in \mathbb{C} : |\arg z| \geq 2 \arcsin |z|, |z| \leq \frac{1}{2} \right\} & \text{при } \rho = \frac{1}{2}, \\ \left\{ z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leq \frac{\pi}{2\rho}, |z| \leq 1 \right\} & \text{при } \frac{1}{2} < \rho < \infty, \\ \left\{ z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leq \arcsin \frac{\pi}{2} |z|, |z| \leq \frac{1}{\pi} \right\} & \text{при } \rho = +\infty. \end{cases}$$

Легко видеть, что для E справедливы все требования теорем 2 и 3. Рассмотрим функцию

$$g(\zeta) = \begin{cases} \cos \sqrt{\zeta} & \text{при } \rho = \frac{1}{2}, \\ E_\rho(\zeta) & \text{при } \frac{1}{2} < \rho < +\infty, \\ E(\zeta) & \text{при } \rho = +\infty, \end{cases}$$

где $E_\rho(\zeta)$ и $E(\zeta)$ — известные функции Миттаг-Леффлера (см. [7] и [8], стр. 144). Из свойств функций $\cos \sqrt{\zeta}$, $E_\rho(\zeta)$ и $E(\zeta)$ следует, что $g(\zeta)$ будет целой функцией порядка ρ , причем $g\left(\frac{1}{z}\right)$ равномерно ограничена при $z \in \mathbb{C} \setminus E^0$. Положим теперь

$$w_k = \begin{cases} \frac{(2(k+1))!}{(k+2)^2} = \frac{1}{(k+2)^2 g_{k+1}} & \text{при } \rho = \frac{1}{2}, \\ \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{\rho} + 1\right)}{(k+2)^2} = \frac{1}{(k+2)^2 g_{k+1}} & \text{при } \frac{1}{2} < \rho < +\infty, \\ \frac{1}{(k+2)^2 |g_{k+1}|}, & \text{если } g_{k+1} \neq 0 \\ k+1, & \text{если } g_{k+1} = 0, \end{cases} \quad \text{при } \rho = +\infty$$

где g_k , $k=0, 1, \dots$, — тейлоровские коэффициенты для $g(\zeta)$ в окрестности точки нуль. Отсюда, так как порядок $g(\zeta)$ равен ρ , получим (26). Существование функций $f \in A(E)$, $f(0) = 0$, не допускающих приближения вида (1), устанавливается как в теореме 3.

В заключение выражаю благодарность Н. У. Аракеляну за обсуждение результатов работы.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 20.II.1986

Վ. Ա. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆԻ ԿՈԿՈՍԻՏԱՆԻ ԿՈԵՖԻՑԻԵՆՏՆԵՐԻ ԿՐՈՑԱՆՈՒՄԻՆԻ ՄԱՏԻՎՈՐՈՒՄԸ ԻՐԱՆԻ ԳՐԴՈՂ ԲԱԳՄԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ԳՐԴԱԿԻՑՆԵՐԻ ՏՆԻ ՄԱՍԻՆ (ամփոփում)

Հոդվածում ուսումնասիրվում է տրված կոմպակտի վրա անընդհատ և նրա ներքում հոլոմորֆ ֆունկցիաների համասարաչափ մոտարկող բազմանդամների գործակիցների աճը, երբ դրա եզրային կետը կարող է լինել մոտորկման կոմպակտի ներքին կետերի սահմանային կետ:

V. A. MARTIROSIAN. *On the growth of coefficients of polynomials, which realize uniform approximation in the complex plane (summary)*

The paper considers the growth of coefficients of polynomials which uniformly approximate the functions continuous on a compact and holomorphic in its interior. The case, when the interior of the compact can condense to its zero boundary point is investigated.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Н. Мерелян. Равномерные приближения функций комплексного переменного, УМН, 7, № 2, 1952, 31—122.
2. С. Я. Хавинсон. Допустимые величины коэффициентов многочленов при равномерной аппроксимации непрерывных функций, Мат. заметки, 6, № 5, 1969, 619—625.
3. Р. М. Тригуб. О приближении функций многочленами со специальными коэффициентами, Изв. вузов, Матем., № 1, 1977, 93—99.
4. С. Я. Хавинсон. О понятии полноты, учитывающем величины коэффициентов аппроксимирующих полиномов, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», 6, №№ 2—3, 1971, 221—234.
5. С. Е. Варшавский. Конформные отображения бесконечных полос, Математика, 2:4, 1958, 67—116.
6. О. А. Мурадян. О росте коэффициентов аппроксимирующих агрегатов в теореме Мюнца, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», 8, № 1, 1973, 70—87.
7. М. М. Джрбашян. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., «Наука», 1966.
8. Г. Поля и Г. Сеге. Задачи и теоремы из анализа, том 1, М., ГИТГЛ, 1956.