ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XV, № 5, 1980 Математика

Л. А. СЕХПОСЯН

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ ЛИТТЛЬВУДА

1°. Введение. Пусть D открытый единичный круг. Рассмотрим при $z, \zeta \in D$ функцию, введенную М. М. Джрбашяном [1] при построении им теории факторизации классов N_α $(-1<\alpha<\infty)$, мероморфных в единичном круге функций

$$A_\alpha(z;\zeta)=\left(1-\frac{z}{\xi}\right)\exp\{-W_\alpha(z;\zeta)\},\ (-1<\alpha<\infty), \tag{1}$$

где

$$W_\alpha(z;\zeta)=\int_{|z|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)}\left\{\zeta^{-k}\int_0^{|\zeta|}(1-x)^\alpha x^{k-1}\,dx-\right.$$
$$\left.-\bar{\zeta}^k\int_{|\zeta|}^{1}(1-x)^\alpha x^{-k-1}\,dx\right\}z^k.$$

Введем в рассмотрение функцию

$$u_\alpha(z;\zeta)=r^{-\alpha}D^{-\alpha}\log|A_\alpha(z;\zeta)|, \tag{2}$$

где функция $A_\alpha(z;\zeta)$ имеет вид (1), а $D^{-\alpha}$ — оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана—Лиувилля, т. е. если $\varphi(r)\in L_1(0,1)$, то

$$D^{-\alpha}\varphi(r)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^r(r-t)^{\alpha-1}\varphi(t)\,dt\quad(0<\alpha<\infty),$$

$$D^{-\alpha}\varphi(r)=\frac{d}{dr}\{D^{-(1+\alpha)}\varphi(r)\}\quad(-1<\alpha<0),$$

причем поскольку почти всюду на $(0,1)$

$$\lim_{\alpha\to+0}D^{-\alpha}\varphi(r)=\varphi(r),$$

то естественно полагается, что

$$D^0\varphi(r)=\varphi(r),\quad r\in(0,1).$$

Следующую функцию назовем функцией типа Грина

$$G_\alpha(z;\zeta)=-u_\alpha(z;\zeta). \tag{3}$$

Некоторые свойства функции $G_\alpha(z;\zeta)$ при $-1<\alpha<0$ получены в работах [1], [2].

Заметим, что при $\alpha=0$ имеем

$$A_0(z;\zeta)=\frac{\zeta-z}{1-\bar{\zeta}z}\frac{|\zeta|}{\zeta}. \tag{4}$$

Следовательно

$$G_0(z;\zeta)=-\log\left|\frac{\zeta-z}{1-\bar{\zeta}z}\right|=\log\left|\frac{1-\bar{\zeta}z}{z-\zeta}\right| \tag{5}$$

совпадает с обычной функцией Грина для D.

Известная теорема Литтльвуда о граничных значениях субгармонических функций ([3], стр. 170) гласит:

Теорема (Литтльвуд). Пусть

$$\omega(z)=\int\limits_{|a|<1}\log\left|\frac{1-\bar{a}z}{z-a}\right|d\mu(a),$$

где $\mu(a)$ — неотрицательное распределение массы на единичном круге D, удовлетворяющее условию

$$\int\limits_{|a|<1}(1-|a|)\,d\mu(a)<+\infty.$$

Тогда

$$\lim_{r\to1}\omega(re^{i\theta})=0 \text{ почти для всех } e^{i\theta}$$

и

$$\lim_{r\to1}\int\limits_0^{2\pi}\omega(re^{i\theta})\,d\theta=0.$$

В настоящей статье приводится теорема, которая является обобщением теоремы Литтльвуда и совпадает с ней при $\alpha=0$.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору В. С. Захаряну за постановку задач и руководство.

2°. Результаты вспомогательного характера. При доказательстве теоремы Литтльвуда важную роль играли две леммы. Приведем эти леммы без доказательств. Доказательства можно найти в работе [3] (стр. 169 и 170).

Лемма 1. *Пусть* $\frac{1}{2}\leqslant r<1$, $a=\rho e^{i\varphi}$ $(0\leqslant\rho<1)$, *тогда*

$$\log\left|\frac{1-\bar{a}r}{r-a}\right|\leqslant\begin{cases}\dfrac{A(1-\rho)(1-r)}{\varphi^2}, & \textit{вообще},\\[2mm] \dfrac{A(1-\rho)(1-r)}{(1-r)^2+\varphi^2}, & \textit{когда}\ \dfrac{1+r}{2}\leqslant\rho<1,\\[2mm] \dfrac{A(1-\rho)}{1-r}\log\dfrac{1-r}{|\varphi|}, & \textit{когда}\ \rho<\dfrac{1+r}{2},\ |\varphi|\leqslant\dfrac{1-r}{2},\end{cases}$$

где A — положительная абсолютная постоянная.

Лемма 2. *Пусть функция* $\lambda(\theta)$ *монотонно возрастает на сегменте* $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $\lambda(0)=0$ *и удовлетворяет условию*

$$\overline{\lim_{\theta\to 0}} \frac{\lambda(\theta)}{\theta} \leqslant m.$$

Тогда имеют место соотношения

$$\overline{\lim_{\delta\to 0}} \int_{\frac{\delta}{2}}^{\pi} \frac{d\lambda(\theta)}{\theta^2} \leqslant 2m, \tag{6}$$

$$\overline{\lim_{\delta\to 0}} \int_{0}^{\delta} \frac{d\lambda(\theta)}{\delta^2+\theta^2} \leqslant \frac{\pi}{4} m, \tag{7}$$

$$\overline{\lim_{\delta\to 0}} \frac{1}{\delta} \int_{0}^{\delta} \log\frac{\delta}{\theta}\, d\lambda(\theta) \leqslant m. \tag{8}$$

В дальнейшем через $A_k(\alpha)$ и $A_k'(\alpha)$ будем обозначать положительные постоянные, зависящие только от α, которые, вообще говоря, различны. Докажем следующую лемму.

Лемма 3. *Пусть* $\frac{1}{2} \leqslant r < 1$, $\zeta = \rho e^{i\theta}$ $(0 \leqslant \rho < 1)$, *тогда*

$$G_\alpha(r;\zeta) \leqslant \begin{cases} \dfrac{A_1(\alpha)(1-\rho)^{1+\alpha}(1-r)}{\theta^2}, \text{ вообще } (-1<\alpha<\infty), & (9)\\[2ex] \dfrac{A_2(\alpha)(1-\rho)^{1+\alpha}(1-r)}{(1-r)^2+\theta^2}, \text{ при } \dfrac{1+r}{2} \leqslant \rho < 1,\ |\theta| \leqslant \dfrac{1-r}{2}, & (10)\\ \qquad\qquad (-1<\alpha<\infty), & \\[2ex] \dfrac{A_3(\alpha)(1-\rho)^{1+\alpha}}{1-r}\log\dfrac{1-r}{|\theta|}\left\{1+A_4(\alpha)\left[\dfrac{(r-|\zeta|)^\alpha}{(1-|\zeta|)^\alpha}+1\right]\right\} \text{ при } \rho<\dfrac{1+r}{2}, & \\ \qquad |\theta| \leqslant \dfrac{1-r}{2},\ (-1<\alpha\leqslant 0), & (11)\\[2ex] \dfrac{A_5(\alpha)(1-\rho)^{1+\alpha}}{1-r}\log\dfrac{1-r}{|\theta|}, \text{ при } \rho \leqslant \dfrac{1+r}{2},\ |\theta| \leqslant \dfrac{1-r}{2}, & (12).\\ \qquad\qquad (0<\alpha<\infty). & \end{cases}$$

Доказательство. Известно, что при $-1<\alpha<\infty$ ([1], стр. 628)

$$U_\alpha(re^{i\varphi};\zeta) = -\frac{1-r^2}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{|\zeta|}^{1} \frac{1-r\left(\frac{|\zeta|}{x}+\frac{x}{|\zeta|}\right)\cos(\varphi-\theta)+r^2}{\left|1-\frac{re^{-i\varphi}}{x}\zeta\right|^2 \left|1-\frac{re^{i\varphi}}{\zeta}x\right|^2} \times$$

$$\times \frac{(1-x)^\alpha}{x}\, dx. \tag{13}$$

Имея в виду (3) из (13) при $-1<\alpha<\infty$ получим

$$G_\alpha(r;\zeta)=\frac{1-r^2}{\Gamma(1+\alpha)}\int\limits_{|\zeta|}^{1}\frac{1-r\left(\frac{|\zeta|}{x}+\frac{x}{|\zeta|}\right)\cos\theta+r^2}{\left|1-\frac{r\zeta}{x}\right|^2\left|1-\frac{rx}{\zeta}\right|^2}\,\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx. \tag{14}$$

а) Введем следующие обозначения:

$$G_\alpha^{(1)}(r;\zeta)=2\int\limits_{|\zeta|}^{1}\frac{r\,(|\zeta|\,x)^{-1}\,(|\zeta|^2+x^2)\sin^2\frac{\theta}{2}}{\left|1-\frac{r\zeta}{x}\right|^2\cdot\left|1-\frac{rx}{\zeta}\right|^2}\,\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx, \tag{15}$$

$$G_\alpha^{(2)}(r;\zeta)=\int\limits_{|\zeta|}^{1}\frac{1-r\left(\frac{|\zeta|}{x}+\frac{x}{|\zeta|}\right)+r^2}{\left|1-\frac{r\zeta}{x}\right|^2\left|1-\frac{rx}{\zeta}\right|^2}\,\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx, \tag{16}$$

с помощью которых запишем формулу (14) в виде

$$G_\alpha(r;\zeta)=\frac{1-r^2}{\Gamma(1+\alpha)}\left[G_\alpha^{(1)}(r;\zeta)+G_\alpha^{(2)}(r;\zeta)\right]. \tag{17}$$

Перейдем к оценкам $G_\alpha^{(1)}(r;\zeta)$ и $G_\alpha^{(2)}(r;\zeta)$. Из (15) получим при $\theta\neq 0$

$$G_\alpha^{(1)}(r;\zeta)\leqslant\frac{r\theta^2}{|\zeta|^3\,\delta^2(\zeta)}\int\limits_{|\zeta|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{\left|1-\frac{r\zeta}{x}\right|^2}\,dx,$$

где

$$\delta(\zeta)=\min_{|\zeta|<x<1}\left|1-\frac{r}{\zeta}x\right|=\min_{|\zeta|<x<1}\frac{r}{|\zeta|}\left|x-\frac{\zeta}{r}\right|\geqslant\min_{0<x<1}\frac{r}{|\zeta|}\left|x-\frac{\zeta}{r}\right|,$$

откуда

$$\delta(\zeta)\geqslant\begin{cases}|\sin\theta|, & \text{при}\quad |\theta|<\frac{\pi}{2}\\ 1, & \text{при}\quad \frac{\pi}{2}\leqslant|\theta|\leqslant\pi.\end{cases} \tag{18}$$

Следовательно, для любого r $(0\leqslant r<1)$ и ζ $(0<|\zeta|<1)$ имеет место оценка:

$$G_\alpha^{(1)}(r;\zeta)\leqslant\frac{\pi^2}{|\zeta|^3}\int\limits_{|\zeta|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{\left|1-\frac{r\zeta}{x}\right|^2}\,dx\quad(-1<\alpha<\infty).$$

Легко можно доказать, что при $|\zeta|\leqslant x\leqslant 1$

$$\left|1-\frac{r\zeta}{x}\right|^2=\frac{1}{x^2}\,|x-r\zeta|^2\geqslant(x-r\,|\zeta|\cos\theta)^2+r^2|\zeta|^2\sin^2\theta\geqslant$$

$$\geqslant (|\zeta| - r\,|\zeta| \cos\theta)^2 + r^2 |\zeta|^2 \sin^2\theta = |\zeta|^2 \cdot |1 - re^{i\theta}|^2. \tag{19}$$

Учитывая (19) для $G_\alpha^{(1)}(r;\zeta)$ получим

$$G_\alpha^{(1)}(r;\zeta) \leqslant \frac{\pi^2 (1-|\zeta|)^{1+\alpha}}{(1+\alpha)|\zeta|^5 \cdot |1-re^{i\theta}|^2} = \frac{\pi^2}{|\zeta|^5 (1+\alpha)} \frac{(1-|\zeta|)^{1+\alpha}}{(1-r)^2 + 4r\sin^2\frac{\theta}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A_1'(\alpha)\,(1-|\zeta|)^{1+\alpha}}{\theta^2}. \tag{20}$$

В силу очевидных неравенств:

$$1 - r\left(\frac{|\zeta|}{x} + \frac{x}{|\zeta|}\right) + r^2 \leqslant 1 - 2r + r^2 = (1-r)^2 \tag{21}$$

и

$$\left|1 - \frac{r\zeta}{x}\right| \geqslant 1 - \frac{|\zeta|}{x} r \geqslant 1 - r, \tag{22}$$

из (16) для $G_\alpha^{(2)}(r;\zeta)$ получим

$$G_\alpha^{(2)}(r;\zeta) \leqslant \frac{1}{|\zeta|} \int_{|\zeta|}^{1} \frac{(1-x)^\alpha}{\left|1 - \frac{rx}{\zeta}\right|^2} dx \leqslant \frac{(1-|\zeta|)^{1+\alpha}}{|\zeta|\,(1+\alpha)\,\delta^2(\zeta)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(1-|\zeta|)^{1+\alpha}}{|\zeta|\,(1+\alpha)\sin^2\theta} \leqslant \frac{A_1''(\alpha)\,(1-|\zeta|)^{1+\alpha}}{\theta^2}. \tag{23}$$

Из (20) и (23) согласно (17) вытекает неравенство (9).

б) Докажем несколько неравенств, которые понадобятся для вывода оценки (10):

$$1 - r\left(\frac{|\zeta|}{x} + \frac{x}{|\zeta|}\right)\cos\theta + r^2 \leqslant 1 - 2r\cos\theta + r^2 = |1 - re^{i\theta}|^2. \tag{24}$$

Это неравенство очевидно, поскольку $|\theta| \leqslant \frac{1-r}{2}$

$\cos\theta \geqslant 0$. Справедливо также следующее неравенство:

$$\left|1 - \frac{rx}{\zeta}\right|^2 = (r - |\zeta|)^2 + 4r\,|\zeta|^2 \sin^2\frac{\theta}{2}. \tag{25}$$

Неравенство (25) вытекает из следующего неравенства:

$$(rx - |\zeta|)^2 \geqslant (r - |\zeta|)^2 \quad (|\zeta| \leqslant x \leqslant 1).$$

Преобразуя последнее неравенство, получим, что

$$|\zeta| \geqslant \frac{r(1+x)}{2} \geqslant r.$$

Поскольку по условию имеем

$$|\zeta| \geqslant \frac{1+r}{2} > \sqrt{r} > r \geqslant \frac{r(1+x)}{2} \quad (|\zeta| \leqslant x \leqslant 1),$$

откуда следует неравенство (25).

Согласно неравенствам (22), (24) и (25) из (14) для $G_\alpha(r;\zeta)$ получим

$$G_\alpha(r;\zeta) \leqslant \frac{1-r^2}{\Gamma(1+\alpha)|\zeta|^3(1+\alpha)} \frac{(1-|\zeta|)^{1+\alpha}}{(r-|\zeta|)^2+4r|\zeta|\sin^2\frac{\theta}{2}}.$$

Поскольку $\frac{1+r}{2} \leqslant |\zeta| < 1$, то $|\zeta| - r \geqslant \frac{1-r}{2}$, тогда

$$G_\alpha(r;\zeta) \leqslant \frac{A_2(\alpha)(1-r)(1-|\zeta|)^{1+\alpha}}{(1-r)^2+\theta^2},$$

что и требовалось доказать.

в) Имея в виду (5) и (14) при $\alpha=0$ получим

$$G_0(r;\zeta) = (1-r^2)\int_{|\zeta|}^{1} \frac{1-r\left(\frac{|\zeta|}{x}+\frac{x}{|\zeta|}\right)\cos\theta + r^2}{\left|1-\frac{rx}{\zeta}\right|^2 \cdot \left|1-\frac{r\zeta}{x}\right|^2} \frac{dx}{x} = \log\left|\frac{1-\bar{\zeta}r}{r-\zeta}\right|. \quad (26)$$

В работе [1], стр. 631 доказано следующее неравенство:

$$|u_\alpha(z;\zeta)| \leqslant C_\alpha(\nu_0)\{|z-\zeta|^\alpha + (1-|\zeta|)^\nu\}, \quad (27)$$

где $-1 < \nu < 0$, $0 < \nu$, $0 \leqslant |\zeta| \leqslant r \leqslant 1$, а постоянная $C_\alpha(\nu_0)$ не зависит от z и ζ.

Учитывая (26), (24), (19) и (27) из (14) для $G_\alpha(r;\zeta)$ имеем

$$G_\alpha(r;\zeta) = \frac{1-r^2}{\Gamma(1+\alpha)}\left[\int_{|\zeta|}^{\frac{1+|\zeta|}{2}} \frac{1-r\left(\frac{|\zeta|}{x}+\frac{x}{|\zeta|}\right)\cos\theta + r^2}{\left|1-\frac{rx}{\zeta}\right|^2 \cdot \left|1-\frac{r\zeta}{x}\right|^2} \frac{(1-x)^\alpha}{x}dx + \right.$$

$$\left. + \int_{\frac{1+|\zeta|}{2}}^{1} \frac{1-r\left(\frac{|\zeta|}{x}+\frac{x}{|\zeta|}\right)\cos\theta + r^2}{\left|1-\frac{rx}{\zeta}\right|^2 \cdot \left|1-\frac{r\zeta}{x}\right|^2} \frac{(1-x)^\alpha}{x}dx \right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(1-|\zeta|)^\alpha}{2^\alpha\Gamma(1+\alpha)}\log\left|\frac{1-\bar{\zeta}r}{r-\zeta}\right| + C_\alpha(\nu_0)\cdot\{|r-\zeta|^\alpha + (1-|\zeta|)^\alpha\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(1-|\zeta|)^\alpha}{2^\alpha\Gamma(1+\alpha)}\log\left|\frac{1-\bar{\zeta}r}{r-\zeta}\right| + C_\alpha(\nu_0)(1-|\zeta|)^\alpha\left\{\frac{(r-|\zeta|)^\alpha}{(1-|\zeta|)^\alpha}+1\right\}.$$

В силу леммы 1 и условия $|\zeta| \leqslant \frac{1+r}{2}$, отсюда будем иметь

$$G_\alpha(r;\zeta) \leqslant \frac{A(1-|\zeta|)^{1+\alpha}}{2^\alpha\Gamma(1+\alpha)(1-r)}\log\frac{1-r}{|\theta|} + C_\alpha(\nu_0)(1-|\zeta|)^\alpha\left\{\frac{(r-|\zeta|)^\alpha}{(1-|\zeta|)^\alpha}+1\right\} \times$$

$$\times \log\left(\frac{1-r}{\theta}\right)^2 \leqslant \frac{A_3(\alpha)(1-|\zeta|)^{1+\alpha}}{1-r}\log\frac{1-r}{|\theta|}\left\{1+A_4(\alpha)\left(\frac{(r-|\zeta|)^\alpha}{(1-|\zeta|)^\alpha}+1\right)\right\}.$$

т. е. неравенство (11).

г) Для случая $0<\alpha<+\infty$ доказательство леммы просто. Оценивая (14) и учитывая (26) сразу получим

$$G_\alpha(r;\zeta) \leqslant \frac{(1-|\zeta|)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}(1-r^2)\int\limits_{|x|}^{1}\frac{(1-r^2)\left(\frac{|\zeta|}{x}+\frac{x}{|\zeta|}\right)\cos\theta+r^2}{\left|1-\frac{rx}{\zeta}\right|^2\cdot\left|1-\frac{r\zeta}{x}\right|^2}\frac{dx}{x}=$$

$$=\frac{(1-|\zeta|)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\log\left|\frac{1-\bar{\zeta}r}{r-\zeta}\right|.$$

Неравенства (19), (10), (12) вытекают из леммы 1.

3°. Обобщение теоремы Литтльвуда.

Теорема. *Пусть*

$$\omega_\alpha(z)=\int\limits_{|\zeta|<1}G_\alpha(z;\zeta)\,d\mu(\zeta)\quad(-1<\alpha<+\infty), \tag{28}$$

где

$$G_\alpha(z;\zeta)=-u_\alpha(z;\zeta)=-r^{-\alpha}D^{-\alpha}\log|A_\alpha(z;\zeta)|,$$

а $\mu(\zeta)$*—неотрицательное распределение массы на единичном круге, удовлетворяющее условию*

$$\int\limits_{|\zeta|<1}(1-|\zeta|)^{1+\alpha}\,d\mu(\zeta)<+\infty\quad(-1<\alpha<+\infty). \tag{29}$$

Тогда

$$\lim_{r\to1}\omega_\alpha(re^{i\varphi})=0,\quad \textit{почти для всех } e^{i\varphi}$$

и

$$\lim_{r\to1}\int\limits_0^{2\pi}\omega_\alpha(re^{i\varphi})\,d\varphi=0.$$

Доказательство. а) Сначала докажем теорему для случая $-1<\alpha\leqslant0$. Заметим, что из теоремы Литтльвуда вытекает, что наше утверждение справедливо при $\alpha=0$.

Положим $d\sigma(\zeta)=(1-|\zeta|)^{1+\alpha}\,d\mu(\zeta)$, тогда согласно (28)

$$\int\limits_{|\zeta|<1}d\sigma(\zeta)<+\infty$$

и

$$\omega_\alpha(z)=\int\limits_{|\zeta|<1}G_\alpha(z;\zeta)\cdot\frac{d\sigma(\zeta)}{(1-|\zeta|)^{1+\alpha}}. \tag{30}$$

Возьмем $0<\rho_1<\rho_2<\cdots<\rho_\nu<\cdots<1$ так, чтобы

$$\int\limits_{\rho_\nu<|\zeta|<1} d\sigma(\zeta)\leqslant\frac{1}{4^\nu}\quad(\nu=1,\ 2,\cdots). \tag{31}$$

Пусть $\lambda_\nu(\varphi)$ содержит σ-массу в следующих областях: $\rho_\nu\leqslant|z|<1$, $-\pi<\arg z<\varphi$. Поскольку $\lambda_\nu(\varphi)$ —возрастающая функция от φ, то $\lambda'_\nu(\varphi$ существует почти всюду и из (20) получим

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\lambda'_\nu(\varphi)\,d\varphi\leqslant\lambda_\nu(\pi)\leqslant\frac{1}{4^\nu}. \tag{32}$$

Пусть E^*_ν такое множество $e^{i\varphi}$, для которого $\lambda'_\nu(\varphi)$ либо не существует, либо существует и $\lambda'_\nu(\varphi)>\frac{1}{2^\nu}$, тогда $mE^*_\nu\leqslant\frac{1}{2^\nu}$. Если положим

$$E^*=\lim_\nu(E^*_\nu+E^*_{\nu+1}+\cdots),\ \text{то}\ mE^*=0.$$

Следовательно, обозначая через $C(E^*)$ дополнение множества E^* на $|z|=1$, то $mE=2\pi$.

Если $e^{i\varphi}\in E$ и $e^{i\varphi}\in C(E^*_\nu)$ $(\nu\geqslant\nu_0)$, то

$$\lambda'_\nu(\varphi)\leqslant\frac{1}{2^\nu}\quad(\nu>\nu_0). \tag{33}$$

Мы должны доказать, что если $e^{i\varphi}\in E$, то

$$\lim_{r\to1}\omega_\alpha(re^{i\varphi})=0.$$

Предположим, что точка $z=1$ принадлежит E и докажем, что

$$\lim_{r\to1}\omega_\alpha(r)=0.$$

Пусть $\rho_\nu<r<1$ и рассмотрим следующие области Δ_i $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$:

$\Delta_1:|z|\leqslant\rho_\nu$, $\Delta_2:\rho_\nu\leqslant|z|<1$,

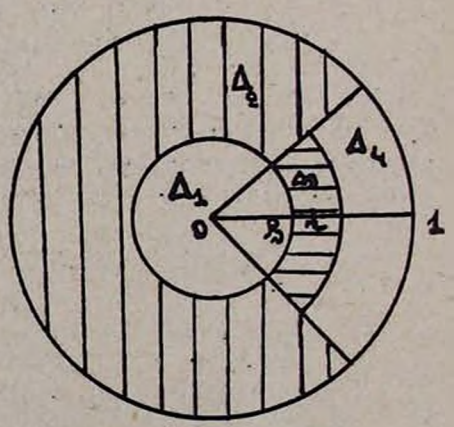
$\frac{1-r}{2}\leqslant|\arg z|\leqslant\pi$,

$\Delta_3:\rho\leqslant|z|\leqslant\frac{1+r}{2}$,

$|\arg z|\leqslant\frac{1-r}{2}$,

$\Delta_4:\frac{1+r}{2}\leqslant|z|<1$,

$|\arg z|\leqslant\frac{1-r}{2}$.



Тогда получим

$$\omega_\alpha(r)=\int\limits_{\Delta_1} G_\alpha(r;\zeta)\,\frac{d\sigma(\zeta)}{(1-|\zeta|)^{1+\alpha}}+\int\limits_{\Delta_2}+\int\limits_{\Delta_3}+\int\limits_{\Delta_4}=I_1+I_2+I_3+I_4. \tag{34}$$

Имеем

$$\lim_{r\to 1} I_1=0.$$

Положим $\varkappa_\nu(\varphi)=\lambda_\nu(\varphi)-\lambda_\nu(0)$, поскольку $\lambda'_\nu(0)$ существует и действительная положительная ось не содержит положительную σ-массу, то

$$\varkappa_\nu(0)=0,\ \lim_{\varphi\to 0}\varkappa_\nu(\varphi)=0$$

и

$$\varkappa'_\nu(0)=\varkappa'_\nu(0)\leqslant\frac{1}{2^\nu}\ (\nu\geqslant\nu_0). \tag{35}$$

Согласно лемме 3 получим

$$\overline{\lim_{r\to 1}}\ I_2\leqslant \mathrm{const}\cdot(1-r)\int\limits_{\frac{1-r}{2}<|\varphi|<\pi}\frac{d\varkappa_\nu(\varphi)}{\varphi^2},$$

отсюда, учитывая лемму 2 имеем

$$\overline{\lim_{r\to 1}}\ I_2\leqslant \mathrm{const}\cdot\varkappa'_\nu(0)\leqslant \mathrm{const}\cdot\frac{1}{2^\nu}\ (\nu\geqslant\nu_0).$$

Точно также получим:

$$\overline{\lim_{r\to 1}}\ I_3\leqslant \mathrm{const}\cdot\overline{\lim_{r\to 1}}\frac{1}{1-r}\int\limits_{-\frac{1-r}{1}}^{\frac{1-r}{2}}\log\frac{1-r}{|\varphi|}\left\{1+A_4(\alpha)\left[\frac{(r-|\zeta|)^\alpha}{(1-|\zeta|)^\alpha}+1\right]\right\}d\varkappa_\nu(\varphi)\leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const}\cdot\overline{\lim_{r\to 1}}\frac{1}{1-r}\int\limits_{-\frac{1-r}{2}}^{\frac{1-r}{2}}\log\frac{1-r}{|\varphi|}\,d\varkappa_\nu(\varphi)\leqslant \mathrm{const}\cdot\varkappa'_\nu(0)\leqslant \mathrm{const}\cdot\frac{1}{2^\nu},$$

$$\overline{\lim_{r\to 1}}\ I_4\leqslant \mathrm{const}\cdot\overline{\lim_{r\to 1}}\int\limits_{-\frac{1-r}{2}}^{\frac{1-r}{2}}\frac{d\varkappa_\nu(\varphi)}{(1-r)^2+\varphi^2}\leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const}\ \varkappa'_\nu(0)\leqslant \mathrm{const}\cdot\frac{1}{2^\nu}\ (\nu\geqslant\nu_0).$$

Поскольку ν произвольно, будем иметь

$$\lim_{r\to 1}\omega_\alpha(r)=0. \tag{36}$$

Теорема доказана для случая $-1<\alpha\leqslant 0$.

б) В случае $0<\alpha<+\infty$ теорема доказывается аналогичным образом, поскольку неравенства (9), (10) и (12) будут верными и в этом случае.

в) Нам остается доказать второй пункт теоремы, т. е. мы должны показать, что

$$\lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi}\left\{\int_{|\zeta|<1} G_\alpha(re^{i\varphi};\zeta)\,d\mu(\zeta)\right\}d\varphi=0. \tag{37}$$

В работе [1] (стр. 613) доказано следующее равенство:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{r^{-\alpha}D^{-\alpha}\log A_\alpha\left|\left(\frac{r}{\rho}e^{i\varphi};\ \frac{\zeta}{\rho}\right)\right|\right\}d\varphi=$$

$$=-\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}W_\alpha\left(0;\frac{\zeta}{\rho}\right)+\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}W_\alpha\left(0;\frac{\zeta}{r}\right),$$

$$(0<|\zeta|\leqslant\rho,\ 0<\rho\leqslant 1 \text{ и } 0\leqslant r<\rho),$$

причем

$$W_\alpha\left(0;\frac{\zeta}{\rho}\right)=\int_{|\zeta|/\rho}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx.$$

Рассмотрим это равенство при $\rho=1$, учитывая также (3), получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}G_\alpha(re^{i\varphi};\zeta)\,d\varphi=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\left\{W_\alpha\left(0;\frac{\zeta}{r}\right)-W_\alpha(0;\zeta)\right\}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\left\{\int_{|\zeta|/r}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}dx-\int_{|\zeta|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx.\right. \tag{38}$$

Ввиду очевидных неравенств и из (29), (31)

$$\int_{|\zeta|/r}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx\leqslant\int_{|\zeta|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx\leqslant\frac{(1-|\zeta|)^{1+\alpha}}{(1+\alpha)\,|\zeta|}$$

для любого $\varepsilon>0$ при некотором $r_0=r_0(\varepsilon)$ $(0<r_0<1)$ имеем

$$\int_{|\zeta|<1}\left\{\int_{|\zeta|/r}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx\right\}\frac{d\sigma(\zeta)}{(1-|\zeta|)^{1+\alpha}}\leqslant\int_{|\zeta|<1}\left\{\int_{|\zeta|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx\right\}\frac{d\sigma(\zeta)}{(1-|\zeta|)^{1+\alpha}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{(1+\alpha)|\zeta|}\int_{|\zeta|<1}d\sigma(\zeta)<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{39}$$

Далее для того же $\varepsilon > 0$ при некотором $r_1 = r_1(\varepsilon)$ $(r_0 \leqslant r_1 < 1)$ имеем также

$$\left| \int\limits_{|\zeta|<r_1} \left\{ \int\limits_{|\zeta|/r}^{3} \frac{(1-x)^\alpha}{x}\, dx - \int\limits_{|\zeta|}^{1} \frac{(1-x)^\alpha}{x}\, dx \right\} \frac{d\sigma(\zeta)}{(1-|\zeta|)^{1+\alpha}} \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{40}$$

как только $r_1 \leqslant |\zeta| < 1$.

Из неравенств (39) и (40) вытекает, что

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|<1} \left\{ \int\limits_{-\pi}^{\pi} G_\alpha(re^{i\varphi}; \zeta)\, d\varphi \right\} \frac{d\sigma(\zeta)}{(1-|\zeta|)^{1+\alpha}} \right. < \varepsilon,$$

как только $r_1 \leqslant r < 1$.

А это эквивалентно утверждению теоремы:

$$\lim_{r\to 1} \int\limits_0^{2\pi} \left\{ \int\limits_{|\zeta|<1} G_\alpha(re^{i\varphi}; \zeta) \frac{d\sigma(\zeta)}{(1-|\zeta|)^{1+\alpha}} \right\} d\varphi =$$

$$= \lim_{r\to 1} \int\limits_{|\zeta|<1} \left\{ \int\limits_0^{2\pi} G_\alpha(re^{i\varphi}; \zeta)\, d\varphi \right\} \frac{d\sigma(\zeta)}{(1-|\zeta|)^{1+\alpha}} = 0.$$

Итак, теорема полностью доказана.

Армянский государственный
педагогический институт
им. Х. Абовяна

Поступила 15.VII.1979

Լ. Ա. ՍԵԽՊՈՍՅԱՆ. Լիտլվուդի թեորեմի մի ընդհանրացման մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում Մ. Մ. Ջրբաշյանի կողմից մուծված ֆունկցիայի միջոցով սահմանվում է Գրինի տիպի պոտենցիալ։ Այնուհետև ապացուցվում է լեմմա, որն անհրաժեշտ է Լիտլվուդի ընդհանրացված թեորեման ապացուցելու համար։ Դրանից հետո բերվում է Լիտլվուդի ընդհանրացման թեորեման միավոր շրջանի համար։

Ստացված արդյունքն այնպիսին է, որ պարամետրի մասնավոր արժեքի դեպքում համընկնում է Լիտլվուդի սուբհարմոնիկ ֆունկցիաների եզրային արժեքների վերաբերյալ հայտնի թեորեմի հետ։

L. A. SEKPOSIAN. *A generalization of a theorem of Littlewood* (summary)

A Green-type potential is defined using M. M. Djrbashian's function and a generalization of Littlewood's theorem is proved. The result contains the classical theorem on boundary values of subharmonic function as a special case.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., «Наука», 1966.

2. *В. С. Захарян.* О радиальных предельных значениях функции B_α. Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 3, №№ 4—5, 1968, 287—300.
3. *M. Tsuji.* Potential theory in modern function theory. Maruzenco, L. T. D., Tokyo.
4. *В. С. Захарян.* Сегментные изменения потенциала типа Грина, ДАН Арм.ССР, XVI, № 4, 1978.
5. *И. И. Привалов.* Субгармонические функции, М.—Л., 1937.

ՀԱՅԿ.ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ՄՈՒԶԱՅԵՆՏԻ ԳՐԱԴԱՐԱՆ
ԵՐԵՎԱՆ: 1981