

С. А. БЕРБЕРЯН

О ГРАНИЧНЫХ СВОЙСТВАХ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, ПОРОЖДАЮЩИХ НОРМАЛЬНЫЕ СЕМЕЙСТВА НА ПОДГРУППАХ АВТОМОРФИЗМОВ ЕДИНИЧНОГО КРУГА

1°. Понятие нормальной функции, рассмотренное для мероморфных функций и состоящее в свойстве порождать нормальное семейство на группе T всех конформных автоморфизмов области определения, было затем перенесено на гармонические и субгармонические функции. В случае единичного круга $D: |z| < 1$ группа T состоит из элементов $T: \{S(z) = e^{i\alpha} (z + a)(1 + \bar{a}z)^{-1}, a \text{ — произвольная точка в } D: |z| < 1, \alpha \text{ — произвольное действительное число}\}$. В статье [1] была сформулирована общая задача об изучении граничных свойств мероморфных функций, порождающих нормальные семейства на подгруппах группы T , и в качестве первого примера была рассмотрена подгруппа $T^\theta: \{S_a^\theta(z) = (z + ae^{i\theta})(1 + ae^{-i\theta}z)^{-1}, a \text{ изменяется в интервале } (-1, 1) \text{ и } \theta, 0 \leq \theta < \pi \text{ — фиксировано}\}$. Исследования были продолжены в статье [2]. Придерживаясь терминологии и обозначений из [1] и [2], обозначим через $\mathfrak{M}$ множество действительных функций $u(z)$, порождающих на группе T конформных автоморфизмов круга D семейство $\Phi: \{u(S(z)); S \in T\}$, нормальное в D в смысле Монтеля, т. е. из любой последовательности семейства Φ можно извлечь последовательность, равномерно сходящуюся на любом компакте в D или равномерно расходящуюся к $\pm \infty$.

Действительную функцию $u(z)$ отнесем к классу $\mathfrak{M}^\theta$ ($\theta, 0 \leq \theta < \pi$ — фиксировано), если порождаемое ею семейство $\Phi^\theta: \{u(S_a^\theta(z)); S_a^\theta \in T^\theta\}$ нормально в D . Обозначим для любой точки $\tau = e^{i\theta} \in C: |z| = 1$ через $H(\tau, \beta), 0 \leq \beta < \frac{\pi}{2}$ область, ограниченную двумя гипердугами, проходящими через точки $\tau = e^{i\theta}$ и $-\tau$ и образующими углы $-\beta$ и β с диаметром Λ^θ , проходящим через $\pm \tau$. Обозначим через $\rho(z_1, z_2)$ неевклидово расстояние между точками $z_1, z_2 \in D$.

2°. Рассмотрим граничные свойства субгармонических функций класса $\mathfrak{M}^\theta$ ($\theta, 0 \leq \theta < \pi$ — фиксировано).

Теорема 1. Пусть субгармоническая функция $u(z) \in \mathfrak{M}^\theta$, где $0 \leq \theta < \pi$ — фиксировано. Пусть последовательность точек $\{z_n\}$ лежит в некоторой области $H(\theta, \beta_0)$, $-\frac{\pi}{2} < \beta_0 < \frac{\pi}{2}$ и $\rho(z_n, z_{n+1}) < M$, где M — фиксированное конечное число. Если в некоторой окрестности $N_\delta(\tau) \{z; |z - e^{i\theta}| < \delta\}$ точки $\tau = e^{i\theta}$ имеем $u(z) \leq a$ и

$\lim_{n \rightarrow \infty} u(z_n) = a$, то a является угловым граничным значением функции $u(z)$ в точке $\tau = e^{i\theta}$.

Доказательство. Мы можем считать, что $a > -\infty$, так как в противном случае имели бы, что $u(z) = -\infty$. Без нарушения общности можно предположить, что $\tau = 1$. Пусть $\{q_n\}$ — произвольная последовательность точек, лежащая в некоторой области $H(1, \beta)$ такая, что $q_n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Нужно доказать, что $u(q_n) \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$. Для всякого $n = 1, 2, \dots$ обозначим через E_n неевклидов перпендикуляр, опущенный из точки z_n на диаметр Λ^n и через E'_n — неевклидов перпендикуляр из точки q_n на диаметр Λ^0 . Обозначим точки пересечения Λ^0 с E_n и E'_n , соответственно, через r_n и r'_n . Так как q_n лежат в $H(1, \beta)$ при любом $n = 1, 2, \dots$, то

$$\rho(q_n, r'_n) \leq M_1 = \rho(0, \operatorname{arctg} \beta/2),$$

где $\rho(z, \omega)$ — гиперболическое расстояние между точками z, ω круга

$$D: |z| < 1, \rho(z, \omega) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+u}{1-u}, u = \left| \frac{z-\omega}{1-\bar{z}\omega} \right|.$$

Аналогично $\rho(z_n, r_n) \leq M_2 = \rho(0, \operatorname{arctg} \beta_0/2)$. В силу того, что $\rho(z_n, z_{n+1}) < M$ при $n = 1, 2, \dots$, имеем, что и $\rho(r_n, r_{n+1}) < M'$. Не нарушая общности допустим, что последовательность точек $\{r'_k\}_{k=1}^\infty$ отлична от последовательности $\{r_k\}_{k=1}^\infty$ и что r'_k при любом k лежит между r_{n_k} и r_{n_k+1} . Следовательно

$$\rho(r_{n_k}, r'_k) \leq \rho(r_{n_k}, r_{n_k+1}) \leq M'$$

и в силу неравенства треугольника имеем

$$\rho(r_{n_k}, q_k) \leq \rho(r_{n_k}, r'_k) + \rho(r'_k, q_k) \leq M' + M_1.$$

Обозначим $K: \{z \in D, |z| \leq th(M' + M_1 + M_2 + 1)\}$ и для произвольного $k = 1, 2, \dots$ рассмотрим отображение

$$S_k(z) = \frac{z + r_{n_k}}{1 + \bar{r}_{n_k} z}.$$

При достаточно больших k имеем $S_k(z) \in N_\delta(\tau)$, если $z \in K$. Поэтому $u(S_k(z)) \leq a$ для всех $z \in K$ и $k > K_1$. Определим последовательности точек $\{z'_{n_k}\}$ и $\{q'_k\}$ из условий $S_k(z'_{n_k}) = z_{n_k}$ и $S_k(q'_k) = q_k$, $k = 1, 2, \dots$.

В силу инвариантности метрики ρ при отображении $S(z) \in \Gamma'$ и условия $S_k(0) = r_{n_k}$ будем иметь, что последовательности $\{z'_{n_k}\}$ и $\{q'_k\}$ лежат в K . Так как $u(z) \in \mathbb{R}^0$, то существует подпоследовательность $u(S_{k_\mu}(z))$, равномерно сходящаяся на K к субгармонической функции $U(z)$ или равномерно расходящаяся к $\pm \infty$ на K . Подпоследовательности $\{z_{n_{k_\mu}}\}$ и $\{q_{k_\mu}\}$ имеют по крайней мере по одной предельной точке K , которые обозначим соответственно z_0^* и q_0^* и $\lim_{\mu \rightarrow \infty} u(S_{k_\mu}(z_{n_{k_\mu}})) = a$.

Допустим, что α — конечное число. Тогда предельная функция $U(z) \neq \pm \infty$ субгармоническая в K и $U(z_0) = \alpha$. В силу принципа максимума для субгармонических функций имеем, что $U(z) \equiv \alpha$. Отсюда получаем, что $\lim_{\mu \rightarrow \infty} u(q_{\mu}) = \alpha$.

В случае $\alpha = +\infty$ имеем, что предельная функция $U(z) \equiv +\infty$, откуда и $\lim_{\mu \rightarrow \infty} u(q_{\mu}) = +\infty$. Итак, каждая последовательность точек

$\{q_n\}$, принадлежащая некоторой области $H(1, \beta)$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ и имеющая $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1$, содержит подпоследовательность $\{q_{n_k}\}$, по которой $\lim_{k \rightarrow \infty} u(q_{n_k}) = \alpha$. Если бы $\lim_{n \rightarrow \infty} u(q_n) \neq \alpha$, то существовала бы некоторая подпоследовательность $\{q_{n_k}\}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} q_{n_k} = 1$, по которой $\lim_{k \rightarrow \infty} u(q_{n_k}) = \beta$, $\beta \neq \alpha$. Последовательность $\{q_{n_k}\}$ обязана содержать подпоследовательность, по которой $u(z)$ стремится к α . Противоречие показывает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} u(q_n) = \alpha$ для любой последовательности $\{q_n\}$ в произвольной области $H(1, \beta)$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, для которой $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1$.

Теорема полностью доказана.

Замечание 1. Утверждение теоремы 1 для функций класса $\mathfrak{M}$ в случае, когда вместо последовательности $\{z_n\}$ берется некасательная кривая, доказано Миком другим способом.

Замечание 2. Утверждение теоремы 1 без предположения ограниченности сверху неверно даже в случае некасательных кривых. Для функций класса $\mathfrak{M}$ соответствующий пример приведен Миком [см. 3].

Следствие 1. Пусть $u(z)$ — супергармоническая функция в $D: |z| < 1$, принадлежащая $\mathfrak{M}^0$ ($0 \leq \theta < \pi$ — фиксировано). Если $u(z)$ имеет асимптотическое значение α на кривой L , некасательной к $C: |z| = 1$ в точке $\tau = e^{i\theta}$ и если $u(z) > \alpha$ в окрестности $N_\delta(\tau)$, то α является угловым пределом функции $u(z)$ в точке τ .

Следствие 2. Пусть $u(z)$ — гармоническая функция в D , принадлежащая $\mathfrak{M}^0$, $0 \leq \theta < \pi$. Если $u(z)$ имеет асимптотическое значение α вдоль кривой L , некасательной к $C: |z| = 1$ в точке $\tau = e^{i\theta}$ и если α исключительное значение $u(z)$, то α является угловым пределом $u(z)$ в точке τ .

Действительно, так как $u(z)$ непрерывна в D , то исключительное значение α является либо верхней, либо нижней границей для функции $u(z)$ и соответственно с этим применяем либо теорему 1 либо следствие 1.

3°. В этом пункте мы рассмотрим граничное поведение полигармонических функций n -го порядка, принадлежащих классам $\mathfrak{M}^0$, $0 \leq \theta < \pi$. По определению, функцию $u(z)$ называют полигармонической

функцией n -го порядка, если она удовлетворяет уравнению $\Delta^n u = 0$, где Δ^n обозначает n раз примененный оператор Лапласа (см. [4]). Свойство полигармоничности инвариантно относительно конформных отображений. Имеет место следующая

Теорема 2. Пусть полигармоническая функция $u(z)$ принадлежит $\mathfrak{M}^1$, $0 \leq \theta < \pi$. Если существует β_0 , $0 < \beta_0 < \frac{\pi}{2}$ такое, что $u(z) \rightarrow \alpha$ при $z \rightarrow \tau = e^{i\theta}$ (или $\tau = -e^{i\theta}$) внутри $H(\tau, \beta_0)$, то α будет угловым граничным значением функции $u(z)$ в точке $\tau = e^{i\theta}$ (или $\tau = -e^{i\theta}$).

Доказательство. Пусть $(\tau = 1$ и $\beta_0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ такое, что $H(1, \beta_0) \subset H(1, \beta)$, а $\{z_n\}$ — произвольная последовательность точек в $H(1, \beta)$ такая, что $z_n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Для произвольного n , $n = 1, 2, \dots$ опустим из точки z_n на диаметр Λ° неевклидовы перпендикуляр E_n и обозначим через A_n и B_n два гиперцикла неевклидова расстояния $\rho = 1$ от E_n . Определим G_{n, β_0} ($G_{n, \beta}$) — открытое множество в D , ограниченное A_n , B_n и двумя граничными гиперциклами $H(1, \beta_0)$ ($H(1, \beta)$). Пусть r_n — пересечение E_n с Λ° и для любого n , $n = 1, 2, \dots$ обозначим

$$S_n(\omega) = \frac{\omega + r_n}{1 + r_n \omega}$$

Прообраз $S_n^{-1}(G_{n, \beta_0}) = G'_{n, \beta_0}$ при любом n , $n = 1, 2, \dots$ есть область в D , ограниченная 4 гиперциклами, 2 из которых симметричны относительно Λ° и 2 других симметричны относительно $-1 < i y < 1$, где $\omega = x + iy = S_n^{-1}(z)$. Аналогичное заключение справедливо и для $S_n^{-1}(G_{n, \beta}) = G'_{n, \beta}$. Таким образом,

$$G'_{n, \beta_0} = G'_{n+1, \beta_0} = G'_{\beta_0} \quad G'_{n, \beta} = G'_{n+1, \beta} = G'_\beta, \quad n = 1, 2, \dots \text{ и}$$

$$\bar{G}_{\beta_0} = \bar{G}_\beta \subset D.$$

Так как $u(z) \in \mathfrak{M}^1$, то существует подпоследовательность $[u(S_{n_j}(z))]$, которая сходится равномерно на $\bar{G}'_\beta$ или сходится равномерно к $\pm \infty$ на G'_β . Если α конечно, то подпоследовательность не может расходиться равномерно на G'_β , так как $u(S_{n_j}(0)) = u(r_{n_j})$ и при $n_j \rightarrow \infty$ $u(r_{n_j}) \rightarrow \alpha$. Равномерный предел полигармонических функций n -го порядка есть также полигармоническая функция n -го порядка (см. [4], § 3, теорему 1). Поэтому предельная функция $U(z)$ будет полигармонической функцией n -го порядка в G'_β . Для произвольной точки $\omega_0 \in G'_\beta$ и для любого j , $j = 1, 2, \dots$, имеем $S_{n_j}(\omega_0) \in G_{n_j, \beta_0}$ и $S_{n_j}(\omega_0) \rightarrow 1$ при $j \rightarrow \infty$. Из условия теоремы 2 следует, что $u(S_{n_j}(\omega_0)) \rightarrow \alpha$ при $j \rightarrow \infty$, откуда $U(\omega_0) = \alpha$ и следовательно $U = \alpha$ на G'_β . Так как G'_β есть открытое непустое множество в G'_β , то и в силу принципа единственности

для полигармонических функций $u(z) \equiv \alpha$ на G'_β . Равномерная сходимость $[u(S_{n_j}(z))]$ к α на G'_β дает $u(z_{n_j}) \rightarrow \alpha$ при $j \rightarrow \infty$, откуда и следует, что $u(z_n) \rightarrow \alpha$ при $n \rightarrow \infty$. Теорема полностью доказана.

Замечание 3. Теорема 2 верна, в частности, для субгармонических функций $u(z)$, являющихся одновременно и полигармоническими функциями n -го порядка. Для всех нормальных субгармонических функций теорема 2 неверна. Соответствующий пример построил Мик (см. [3]).

Замечание 4. Теорема 2 содержит в себе один результат Мика [3], полученный для гармонических функций класса $\mathcal{M}$.

4°. В работе [6] рассматривалось асимптотическое поведение неотрицательных субгармонических функций $u(z)$ класса $\mathcal{M}$, для которых $\log u(z)$ также является субгармонической функцией (короче, логарифмически субгармонических функций класса $\mathcal{M}$). Анализируя доказательство теоремы 1 из [6] можно заключить, что оно останется справедливым для функций классов $\mathcal{M}^\theta$. Сформулируем этот результат в виде следующего утверждения.

Теорема 3. Если логарифмически субгармоническая функция $u(z)$ класса $\mathcal{M}^\theta$, $0 \leq \theta < \pi$, имеет асимптотическое значение 0 (или ∞) вдоль некоторой жордановой дуги γ , лежащей в D и стремящейся к точке $\tau \in C: |\tau| = 1$ некасательным образом, то $u(z)$ имеет угловой предел 0 (или ∞) в точке τ .

5°. Обозначим $\mathcal{M}^* = \bigcap_{\theta \in [0, \pi)} \mathcal{M}^\theta$. Тогда $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}^*$, и рассмотрим граничное поведение субгармонических функций $u(z)$ класса $\mathcal{M}^*$, удовлетворяющих интегральному условию

$$\int_0^{2\pi} |u(e^{i\theta})| d\theta = O(1), \text{ при } r \rightarrow 1. \quad (1)$$

Согласно классическому результату Дж. Литтлвуда субгармоническая функция $u(z)$ при условии (1) представима в виде разности

$$u(z) = v(z) - \omega(z) \quad (2)$$

гармонической функции $v(z)$, удовлетворяющей условию (1) и потенциала Грина $\omega(z)$

$$\omega(z) = \iint_{|a| < 1} \log \left| \frac{1 - a \cdot z}{z - a} \right| d\mu(a).$$

При условии (1) Миком [8] доказано существование конечных угловых пределов почти всюду на $\Gamma: |z| = 1$ у субгармонических функций $u(z)$ класса $\mathcal{M}$. По существу Мик доказал утверждение, которое сформулируем в виде следующей леммы.

Лемма. Пусть субгармоническая функция $u(z)$ класса $\mathcal{M}$ представима в виде (2). Тогда в каждой точке $\tau = e^{i\theta} \in C: |\tau| = 1$, в кото-

рой $v(z)$ имеет угловой предел, а $w(z)$ радиальный предел, существует конечный угловой предел у функции $u(z)$.

В основе доказательства леммы лежит свойство нормальности $u(z)$ на последовательностях вида

$$S_n^0(z) = \frac{z + r_n e^{i\theta}}{1 + r_n e^{-i\theta} \cdot z}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $\{r_n\}$ — произвольная последовательность, стремящаяся к 1 и что, согласно (2) $u(z) \leq v(z)$ в D . Принимая во внимание предыдущие рассуждения получим следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть $u(z)$ — субгармоническая в D функция, принадлежащая $\mathfrak{M}^*$ и удовлетворяющая условию (1). Тогда $u(z)$ имеет конечные угловые граничные значения почти всюду на $\Gamma: |z|=1$.

Следствие 1. Если функция $u(z)$, принадлежащая $\mathfrak{M}^*$ ограничена сверху, то она имеет почти всюду на $\Gamma: |z|=1$ конечные угловые граничные значения. Действительно, в силу субгармоничности $u(z)$ $e^{u(z)}$ также субгармоническая функция, причем $e^{u(z)} \in \mathfrak{M}^*$ и $e^{u(z)}$ — ограниченная функция. Остается применить теорему 4.

Следствие 2. Если функция $u(z)$, принадлежащая $\mathfrak{M}^*$ ограничена снизу и имеет гармоническую мажоранту в D , то $u(z)$ имеет почти всюду на $\Gamma: |z|=1$ угловые граничные значения.

Можно допустить без нарушения общности, что $u(z) > 0$ в $|z| < 1$. Тогда для гармонической мажоранты $v(z)$ имеем, что

$$0 \leq \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) d\theta \leq \int_0^{2\pi} v(re^{i\theta}) d\theta = 2\pi v(0), \quad 0 \leq r < 1$$

и применяя теорему 4, получим утверждение следствия 2.

6°. **Теорема 5.** Если субгармоническая функция $u(z)$ из класса $\mathfrak{M}^*$, $0 \leq \theta < \pi$, имеет ограниченное сверху множество $C(u, |z_n|)$ на некоторой некасательной к $\Gamma: |z|=1$ в точке $\tau = e^{i\theta} \in \Gamma$ последовательности $\{z_n\}$, $z_n \in D$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = e^{i\theta}$ (или $-e^{i\theta}$), обладающей свойством $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(z_n, z_{n+1}) \leq M < \infty$, то $u(z)$ ограничена сверху в любом угле с вершиной в точке $\tau = e^{i\theta}$ (или $-e^{i\theta}$).

Доказательство. Не нарушая общности допустим, что $\tau = 1$. Поскольку $\{z_n\}$ — некасательная последовательность, то найдется угол Δ , содержащий эту последовательность. Допустим, что $u(z)$ неограничена сверху в Δ . Тогда существует последовательность $\{a_n\}$ такая, что при $n \rightarrow \infty$ $u(a_n) \rightarrow +\infty$. Для всякого $n = 1, 2, \dots$ обозначим через E_n неевклидов перпендикуляр, опущенный из точки z_n на диаметр Λ^0 и через E'_n — неевклидов перпендикуляр из точки a_n на диаметр Λ^0 . Обозначим точки пересечения Λ^0 с E_n и E'_n через r_n и r'_n . Проведя те же рассуждения, что и в теореме 1 получаем, что пре-

дельная функция $U(z) \equiv +\infty$ на компакте K . Но в силу условия при достаточно больших $n_k u(S_k(z'_{n_k}))$, где z'_{n_k} — прообразы точек z_{n_k} при отображении $S_k(z)$, ограничены. Полученное противоречие доказывает ограниченность сверху $u(z)$ в любом угле, содержащем последовательность $\{z_n\}$. Пусть Δ_0 — произвольный угол с вершиной в точке $\tau = e^{i\theta}$. Можно найти угол Δ' с вершиной в τ такой, что все точки Δ_0 и Δ , где Δ — угол, содержащий $\{z_n\}$, в некоторой окрестности τ будут лежать в Δ' . Так как $\Delta' \supset \Delta$, то $u(z)$ ограничена сверху в Δ' и следовательно в $\Delta_0 \cap \Delta'$. В силу субгармоничности $u(z)$ и того, что $\Delta_0 \setminus \Delta'$ есть замкнутое подмножество в D , следует ограниченность сверху $u(z)$ в $\Delta_0 \setminus \Delta'$. Значит $u(z)$ ограничена сверху в Δ_0 , что и требовалось доказать.

Замечание 5. Теорема 5 не была известна и для субгармонических функций класса $\mathfrak{M}$.

Анализируя доказательство теоремы 5 заключаем, что справедлива следующая

Теорема 6. Пусть непрерывная в $D: |z| < 1$ функция $u(z) \in \mathfrak{M}^0$, $0 < \theta < \pi$ фиксировано, имеет ограниченное множество $C(u, \{z_n\})$ на некоторой некасательной к $\Gamma: |z| = 1$ в точке $\tau = e^{i\theta} \in \Gamma$ последовательности $\{z_n\}$, $z_n \in D$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = e^{i\theta}$ (или $-e^{i\theta}$), для которой $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(z_n, z_{n+1}) \leq M < \infty$, тогда $u(z)$ ограничена в любом угле с вершиной в точке $\tau = e^{i\theta}$, (или $-e^{i\theta}$).

В заключение приношу благодарность В. И. Гаврилову за постоянное внимание к работе.

Армянский государственный педагогический институт

им. Х. Абовяна

Поступила 10.VI.1979

Ս. Լ. ԲԵՐԲԵՐԻԱՆ. Միավոր շրջանի ավտոմորֆիզմների վրա նորմալ բնառների վրա առաջացող սուբհարմոնիկ ֆունկցիաների եզրային հատկությունների մասին (ամփոփում)

Հոդվածում ուսումնասիրվում է եզրային վարքը այն սուբհարմոնիկ և պոլիհարմոնիկ ֆունկցիաների, որոնք առաջացնում են նորմալ ընտանիքների միավոր շրջանի ավտոմորֆիզմների ենթախմբերի վրա: Տրվում են բավարար պայմաններ, որոնց դեպքում գոյություն ունեն անկյունային սահմաններ: Քննարկվում է այն հարցը, քի երբ սուբհարմոնիկ ֆունկցիան կլինի սահմանափակ վերին ցանկացած Շտուլցի անկյան մեջ:

S. L. BERBERIAN. On boundary properties of subharmonic functions which generate normal families on subgroups of automorphisms in the unit disk (summary)

The paper deals with the boundary behaviour of subharmonic and polyharmonic functions generate which generate normal families on subgroups of automorphisms in the unit disk. Some sufficient conditions for the existence of angular limits are investigated. A sufficient condition for a subharmonic function to be bounded in Stolz angles is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Гаврилов. Нормальные функции и почти-периодические функции, ДАН СССР, 240, № 4, 1978.

2. Е. Ф. Буркова, В. И. Гаврилов. О мероморфных функциях, порождающих нормальные семейства на подгруппах автоморфизмов единичного круга, ДАН СССР (в печати).
3. J. Muck. Of Fatous points of normal subharmonic functions, *Mathematica Japonica*, 22, № 3, 1977, 309—314.
4. Н. И. Привалов и Б. Пчелин. К общей теории полигармонических функций, *Мат. сб.*, 2, № 4, 1937, 745—758.
5. F. Bagemihl, W. Seidel. Sequential and continuous limits of meromorphic functions, *Annal. Acad. Scin. Fenn.*, Ser. AI, № 280, 1960.
6. D. Rung. Asymptotic values of normal subharmonic functions, *Math. Zeitsehr.*, Bd. 84, Hf. 1, 1964, 9—14.
7. В. С. Захарян. О радиальных предельных значениях одного класса функций, мероморфных в круге, *Изв. АН СССР, сер. матем.*, 27, № 4, 1969, 801—818.
8. J. Muck. Subharmonic versions of Fatous theorem, *Proc. of the Amer. Math. Soc.*, 30, № 2, 1971, 313—317.
9. В. И. Гаврилов. О голоморфных функциях, ограниченных на последовательностях точек, *Сибир. матем. журн.*, VI, № 6, 1965.
10. F. Bagemihl. Some boundary properties of normal functions bounded on nontangential arcs., *Arch. Math.*, 14, № 6, 1963, 399—406.
11. Н. И. Привалов, *Субгармонические функции*, М.—Л., 1937.