

Б. С. КАШИН

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ МАТРИЦ ОГРАНИЧЕННЫХ
 ОПЕРАТОРОВ ИЗ ПРОСТРАНСТВА l_2^n в l_2^m

Введение. Пусть l_p^n , $1 \leq p \leq \infty$, $n=1, 2, \dots$ — пространство векторов $x = \{x_i\}_{i=1}^n$ с нормой $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$ [при $1 \leq p < \infty$ и $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$], а B_p^n — единичный шар в l_p^n . Для каждого линейного оператора $T: R^n \rightarrow R^m$ положим $\|T\|_{(p,q)} = \sup_{y \in B_p^n} \|T(y)\|_q$. Если рассмотреть в R^n базис $\{z_j\}_{j=1}^n$ с $z_j = \{0, \dots, 1, \dots, 0\}$, $1 \leq j \leq n$, то очевидно возникает взаимно-однозначное соответствие, при котором каждому линейному оператору T отвечает его матрица $T' = \{t_{ij}\}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ в базисе $\{z_j\}$, т. е. матрица с n строками и m столбцами, j -я строка которой совпадает с вектором $T(z_j) \in R^m$.

Для матрицы T' положим по определению

$$\|T'\|_{(p,q)} = \|T\|_{(p,q)} = \sup_{\{y_j\} \in B_p^n, \{x_i\} \in B_q^m} \left| \sum_{i,j} t_{ij} x_i y_j \right|, \quad (1)$$

где $1 \leq p, q \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Отметим, что введенная норма матрицы $T' = \|T\|_{(p,q)}$ совпадает с (p, q) нормой билинейной $\sum t_{ij} x_i y_j$, определенной в [1]. Данная работа, состоящая из трех параграфов, является развитием заметки автора [2] и содержит доказательства тех утверждений, которые в [2] только сформулированы. В п° 1 и 2 изучаются некоторые свойства матриц операторов $T: l_2^n \rightarrow l_2^m$ с нормой $\|T\|_{(2,2)} \leq 1$, в частности, некоторые свойства ортонормированных матриц. В п° 3 рассматриваются свойства $m \times n$ матриц, связанные с оценками поперечников и оцениваются поперечники октаэдра B_1^m , $1 \leq m < \infty$, в метрике l_q^m , $2 < q < \infty$.

Укажем еще некоторые обозначения, использованные ниже: через E_m^n , $n \leq m$ обозначается множество всех n -элементных наборов чисел $\{i_s\}_{s=1}^n$ с $1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m$. Для каждой матрицы $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ определим матрицу $A^* = \{a_{ij}^*\}_{i,j=1}^n$, положив

$$a_{ij}^* = \begin{cases} a_{ij}, & \text{при } i > j \\ 0, & \text{при } i < j \end{cases} \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Для данного конечного множества G через $|G|$ будем обозначать число элементов в нем. Наконец, если S^n — множество всех перестановок набора чисел $1, 2, \dots, n$ и $\{k_j\}_{j=1}^n = \sigma \in S^n$, то через A_σ обозначается матрица $\{a_{i, k_j}\}_{i, j=1}^n$, т. е. матрица, полученная путем перестановки в порядке σ строк матрицы A .

1°. Для матрицы $A = \{a_{ij}\}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ с $|A|_{(2, 2)} \leq 1$ и набора $\Omega \in E_m^n$, через $A(\Omega)$ будем обозначать квадратную матрицу порядка $n - |\Omega|$ — $\{a_{ij}\}$, $i \in \Omega$, $1 \leq j \leq n$. Нас будет интересовать поведение норм $|A(\Omega)|_{(2, 2)}$ и $|A(\Omega)|_{(2, q)}$, $1 \leq q < 2$.

Легко видеть, что матрица $A_n = \{a_{ij}\}$, $1 \leq i \leq 2n-1$, $1 \leq j \leq n$ с $a_{ij} = 1$ при $1 \leq i = j \leq n$ и $a_{ij} = 0$ — в остальных случаях обладает тем свойством, что

1) $|A_n|_{(2, 2)} = 1$; 2) для любого набора $\Omega \in E_{2n-1}^n$, $|A_n(\Omega)|_{(2, 2)} = 1$.

Вместе с тем в [2] доказана

Теорема А. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такая постоянная $\rho(\varepsilon) > 0$, что для любой матрицы $A = \{a_{ij}\}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ с $\frac{n}{m} < \rho(\varepsilon)$ найдется набор целых чисел $\Omega \in E_m^n$, для которого $|A(\Omega)|_{(2, 2)} \leq \varepsilon$.

При этом, в доказательстве теоремы А в [2] не давалась оценка величины $\rho(\varepsilon)$ в зависимости от ε . В этом параграфе будет, в частности, получена такая оценка.

Отметим, что если для $m \times n$ матрицы A с $|A|_{(2, 2)} \leq 1$ рассмотреть среднее значение нормы $|A(\Omega)|_{(2, q)}$ по всем наборам Ω :

$$E_1(A, q) = \frac{1}{C_m^n} \sum_{\Omega \in E_m^n} |A(\Omega)|_{(2, q)},$$

то очевидно, что, при $q = 2$, $E_1(A, 2) \leq 1$, но для того, чтобы получить для каждой $m \times n$ матрицы A с $|A|_{(2, 2)} \leq 1$ оценку $E_1(A, 2) \leq \gamma < 1$, где γ — абсолютная [постоянная необходимо, чтобы число n было гораздо меньше m . Это следует из того, что как нетрудно проверить, для матриц $A_{n, 1} = \{a_{ij}\}$, $1 \leq i \leq [n^{2-1}]$, $1 \leq j \leq n$, $\varepsilon > 0$, где $a_{ij} = 1$ при $1 \leq i = j \leq n$ и $a_{ij} = 0$ — остальных случаях, справедливо соотношение:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_1(A_{n, 1}, 2) = 1.$$

Если при q , $1 \leq q < 2$ для данной $m \times n$ матрицы A и набора $\Omega \in E_m^n$ рассмотреть величину $|A(\Omega)|_{(2, q)}$, то так как $|x|_{1/n} \leq n^{1/q-1/2} |x|_{1/2}$ при $x \in R^n$, то $|A(\Omega)|_{(2, q)} \leq n^{1/q-1/2} |A|_{(2, 2)}$, поэтому

$$E_1(A, q) \leq \max_{\Omega \in E_m^n} |A(\Omega)|_{(2, q)} \leq n^{1/q-1/2} |A|_{(2, 2)}. \quad (2)$$

В отличие от величины $E_1(A, 2)$ для $E_1(A, q)$, $1 \leq q < 2$ уже при $m \geq Cn^*$ можно получить нетривиальную, т. е. лучшую чем $\gamma n^{1/q-1/2} |A|_{(2,2)}$, $\gamma < 1$, оценку. Исходя из этой оценки доказывается и уточнение теоремы А (см. теорему 2 этой работы). Справедлива

Теорема 1. Для q , $1 \leq q < 2$ существует постоянная B_q , такая, что для любой $m \times n$ матрицы A с $|A|_{(2,2)} \leq 1$ и любого $y < 1$ имеет место оценка

$$|\{Q \in E_m^n : |A(Q)|_{(2,q)} \geq y n^{1/q-1/2}\}| \leq C_m^n \cdot B_q^n \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^n \cdot \left(\frac{y}{4}\right)^{\frac{2q}{2-q}}.$$

Из теоремы 1 вытекают

Следствие 1. Для любой пары чисел q , $1 \leq q < 2$ и $K > 0$ найдется постоянная $C(q, K)$, для которой, в предположениях теоремы 1

$$f(y) = \left| \left\{ Q \in E_m^n : |A(Q)|_{(2,q)} \geq C(q, K) \cdot \ln^{\frac{q-2}{2q}} \left(\frac{m}{n}\right) \cdot n^{1/q-1/2} \right\} \right| \leq C_m^n \cdot K^{-n}.$$

Следствие 2. Для $r \geq 1$ и $q \in [1, 2)$, в предположениях теоремы 1

$$E_r(A, q) \equiv ((C_m^n)^{-1} \sum_{Q \in E_m^n} |A(Q)|_{(2,q)}^{1/r}) < C'(r, q) \cdot \left(\ln \frac{m}{n}\right)^{\frac{q-2}{2q}} \cdot n^{1/q-1/2}.$$

Лемма 1. Для любой функции $f(x) \in L^2(0, 1)$ с $\|f\|_{L^1} < 1$, $\|f\|_{L^2} > y$, $1 \leq q < 2$ при любом $z < y$ справедлива оценка меры

$$mE \equiv m \{x \in (0, 1) : |f| > z\} \geq (y^q - z^q)^{\frac{2}{2-q}}.$$

Доказательство. Ясно, что

$$y^q \leq \|f\|_{L^2}^q = \int_{\mathbb{R}} |f|^q dx + \int_{[0,1] \setminus E} |f|^q dx \leq \int_0^1 \chi_E |f|^q dx + z^q, \quad (3)$$

где χ_E — характеристическая функция множества E . Применяя неравенство Гельдера (с показателями $2/2-q$ и $2/q$) находим

$$\int_0^1 \chi_E |f|^q dx < \left(\int_0^1 \chi_E^{\frac{2}{2-q}} dx \right)^{\frac{2-q}{2}} \cdot \left(\int_0^1 |f|^2 dx \right)^{1/2} \leq (mE)^{\frac{2-q}{2}}.$$

Из последнего неравенства и (3) следует, что $y^q \leq z^q + (mE)^{\frac{2-q}{2}}$.

* Через K, C, C_1, \dots в дальнейшем обозначаются положительные абсолютные постоянные.

Лемма 1 доказана.

Лемма 1'. Если для $q, 1 \leq q < 2$ и $y \in (0, 1)$ для вектора $x = \{x_i\} \in R^n$ имеем $\|x\|_2 \leq 1$, $\|x\|_q \geq y n^{1/q-1/2}$, то

$$\left| \left\{ i: |x_i| \geq \frac{1}{2} y n^{-1/2} \right\} \right| > n \left(\frac{y}{2} \right)^{\frac{2q}{2-q}}.$$

В самом деле, рассмотрим функцию $f(x)$ с $f(x) = x_i \sqrt{n}$ при $\frac{i-1}{n} < x \leq \frac{i}{n}$, $1 \leq i \leq n$. Тогда $\|f\|_2 \leq 1$, а

$$\|f\|_q = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i|^q n^{q/2} \right)^{1/q} = \|x\|_q n^{1/2-1/q} > y.$$

Поэтому по лемме 1

$$\left| \left\{ i: |x_i| > \frac{1}{2} y n^{-1/2} \right\} \right| = n \cdot m \left\{ x \in (0, 1): |f(x)| > \frac{y}{2} \right\} > \left(\frac{y}{2} \right)^{\frac{2q}{2-q}}.$$

Лемма 2. Для $x = \{x_i\} \in R^m$ с $\|x\|_2 \leq 1$, $1 \leq q < 2$ и $y \in (0, 1)$ справедливо неравенство

$$|G_y| = \left| \left\{ \Omega \in E_m^n: \left(\sum_{i \in \Omega} |x_i|^q \right)^{1/q} \geq y n^{1/q-1/2} \right\} \right| \leq C_m^n \cdot (B_q)^n \cdot \left(\frac{n}{m} \right)^{n \cdot \left(\frac{y}{2} \right)^{\frac{2q}{2-q}}}.$$

Доказательство. Рассмотрим множество $Q_y = \left\{ i \in [1, m]: |x_i| > \frac{1}{2} y \cdot n^{-1/2} \right\}$. Так как $\|x\|_2 \leq 1$, то

$$|Q_y| \leq \frac{4n}{y^2}. \quad (4)$$

В силу леммы 1' справедливо соотношение

$$G_y \subset \left\{ \Omega \in E_m^n: |\Omega \cap Q_y| > n \left(\frac{y}{2} \right)^{\frac{2q}{2-q}} \right\} = G'_y. \quad (5)$$

Для оценки $|G'_y|$ для данной четверки чисел m, n, r, p с $m \geq 2n$, $r \leq n$, $r \leq p$, $m \geq p \cdot 2$ оценим количество $|G(m, n, r, p)|$ наборов $\Omega \in E_m^n$ таких, что $|\Omega \cap [1, p]| > r$.

Имеем

$$|G(m, n, r, p)| = \sum_{s=r}^{\min(p, n)} C_p^s \cdot C_{m-p}^{n-s}.$$

Пользуясь оценкой $C_p^s < K^s \left(\frac{p}{s} \right)^s$, из последнего равенства находим,

$$|G(m, n, r, p)| \leq K^n \sum_{s=r}^{\min(p, n)} \left(\frac{p}{s}\right)^s \left(\frac{m-p}{n-s}\right)^{n-s} \leq$$

$$\leq K_1^n p^r (m-p)^{n-r} \cdot \max_{1 \leq s < n} \left(\frac{1}{s^s} \cdot \frac{1}{(n-s)^{n-s}}\right) \leq C^n n^{-n} p^r m^{n-r}. \quad (6)$$

В силу (4) и (5) $|G_y^*|$ не превосходит $|G(m, n, r, p)|$ с

$$r = \left[n \left(\frac{y}{2}\right)^{2q/2-q} \right], \quad p = \left[\frac{4n}{y^2} \right].$$

Повтому из (6) вытекает, что

$$\frac{1}{C_m^n} |G_y^*| \leq \frac{1}{C_m^n} C^n n^{-n} \left[\frac{4n}{y^2} \right]^{n \cdot \left(\frac{y}{2}\right)^{2q/2-q}} \cdot m^{n \cdot \left(\frac{y}{2}\right)^{2q/2-q}}. \quad (7)$$

Так как $C_m^n \geq C_1^{-n} \left(\frac{m}{n}\right)^n$, то правая часть в (7) не превосходит

$$C_1^n \exp \left\{ \ln \left(\frac{n}{my^2}\right) \cdot n \left(\frac{y}{2}\right)^{2q/2-q} \right\}. \quad (8)$$

В силу соотношения (5) и неравенства (7), учитывая (8) и тот факт, что $\sup_{0 < y < 1} y^{-2 \left(\frac{y}{2}\right)^{2q/2-q}} \leq C_q$, находим

$$|G_y| \leq (B_q^n) \cdot \exp \left[n \cdot \left(\frac{y}{2}\right)^{2q/2-q} \ln \frac{n}{m} \right] \cdot C_m^n; \quad B_q = C_q \cdot C_1.$$

Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 1. Хорошо известно, (см., напр., [3]), что при $n=1, 2, \dots$ на сфере $\{x: \|x\|_2^n = 1\}$ существует набор векторов $\Delta_n = \{e\}$ с $|\Delta_n| < C^n$ такой, что для всякого вектора x , $\|x\|_2^n = 1$, найдется вектор $e \in \Delta_n$ с $\|x - e\|_2^n \leq \frac{1}{4}$. Легко видеть, что для любого набора $\Omega \in E_m^n$

$$\|A(\Omega)\|_{(2, q)} \leq 2 \max_{\{e_j\} = e \in \Delta_n} \left(\sum_{i \in \Omega} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} e_j \right)^q \right)^{1/q}, \quad (9)$$

Повтому

$$\left\{ \Omega \in E_m^n : \|A(\Omega)\|_{(2, q)} \geq yn^{1/q-1/2} \right\} \subset \cup_{\{e_j\} = e \in \Delta_n} \left\{ \Omega \in E_m^n; \left(\sum_{i \in \Omega} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} e_j \right)^q \right)^{1/q} \geq \right.$$

$$\left. \geq \frac{1}{2} yn^{1/q-1/2} \right\}, \quad (10)$$

следовательно

$$f(y) \leq C^n \max_{\{e_j\} - e \in E_m} \left| \left\{ \Omega \in E_m^n : \left(\sum_{i \in \Omega} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} e_j \right)^q \right)^{1/q} \geq \frac{1}{2} y n^{1/q-1/2} \right\} \right|. \quad (11)$$

Так как $\|A\|_{(2,2)} \leq 1$, то для любого вектора

$$e = (e_j), \left(\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} e_j \right)^2 \right)^{1/2} \leq \|e\|_{l_2^n},$$

и оценивая правую часть в(11) с помощью леммы 2, получим (см. (11)):

$$f(y) \leq C^n \cdot (B_q^n)^n C_m^n \left(\frac{n}{m} \right)^n \left(\frac{y}{4} \right)^{\frac{2q}{2-q}} = C_m^n B_q^n \left(\frac{n}{m} \right)^n \left(\frac{y}{4} \right)^{\frac{2q}{2-q}}.$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Существует такая абсолютная постоянная $B > 0$, что для любой $m \times n$ матрицы $A = (a_{ij})$ с $\|A\|_{(2,2)} \leq 1$ найдется набор $\Omega \in E_m^n$, для которого $\|A(\Omega)\|_{(2,2)} \leq B \left(\ln \frac{m}{n} \right)^{-1/2}$.

В доказательстве теоремы 2 используется, кроме следствия 1, следующий результат Гротендика [4], сформулированный здесь в нужном нам частном случае.

Теорема В. (Гротендик). Существует абсолютная постоянная C , такая, что для любого линейного оператора $T: l_2^n \rightarrow L^1(0,1)$ найдется множество

$$E \subset (0,1), mE > \frac{3}{4} \text{ с } \sup_{y \in B_2^n} \|T(y)\|_{L^1(E)} \leq C \cdot \|T\|.$$

Следствие В. Для любой матрицы $B = (b_{ij})_{j=1}^n_{i=1}^{2n}$ найдется набор $\Omega, \Omega \subset [1, 2n], |\Omega| \geq n$ такой, что

$$\| (b_{ij})_{i \in \Omega, 1 \leq j \leq n} \|_{(2,2)} < \frac{4C}{n^{1/2}} \|B\|_{(2,1)}. \quad (12)$$

Для доказательства следствия В рассмотрим оператор $T: l_2^n \rightarrow L^1$, переводящий вектор $y = (y_j) \in l_2^n$ в функцию $f(z)$, где

$$f(z) = \sum_{j=1}^n y_j b_{ij} \text{ при } \frac{i-1}{n} < z \leq \frac{i}{n}, 1 \leq i \leq n.$$

Найдем, пользуясь теоремой В, множество $E \subset [0,1], mE \geq \frac{3}{4}$, для которого $\|T(y)\|_{L^1(E)} \leq C \sup_{y \in B_2^n} \|T(y)\|_{L^1(0,1)}$ и положим

$$\Omega = \left\{ i \in [1, 2n]; m \left(E \cap \left(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right) \right) \geq \frac{1}{2n} \right\}.$$

Легко видеть, что $|\Omega| \geq n$ и что для набора Ω выполнено (12).

Доказательство теоремы 2. Ясно, что можно считать, что $m \geq 4n$. Из следствия 1 (при $q=1$, $k=2$) вытекает существование такой постоянной C , что для матрицы $A' = \{a'_{ij}\}$ $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq 2n$, где $a'_{ij} = a_{ij}$ при $1 \leq j \leq n$ и $a'_{ij} = 0$ при $j > n$, найдется набор $\Omega' \in E_m^{2n}$ с

$$\|A'(\Omega')\|_{(2,1)} \leq \frac{C_1 n^{1/2}}{\ln^{1/2} \frac{m}{n}}. \quad (13)$$

Применяя теперь следствие В к матрице $A(\Omega') = \{a_{ij}\}$ $1 \leq j \leq n$, $i \in \Omega'$, для которой, в силу (13), $\|A(\Omega')\|_{(2,1)} \leq C_1 n^{1/2} \ln^{1/2} \frac{m}{n}$, найдем набор $\Omega \subset \Omega'$, $\Omega \subset E_m^n$ с $\|A(\Omega)\|_{(2,2)} \leq \frac{4CC'}{\ln^{1/2} \frac{m}{n}}$. Теорема 2 доказана.

2°. В теории ортогональных рядов весьма давно известна следующая задача, восходящая к А. Н. Колмогорову: пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in (0, 1)$ — ортонормированная система функций. Существует ли перестановка натурального ряда $\sigma = \{k_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которой система $\{\varphi_{k_n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является системой сходимости (т. е. всякий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_{k_n}(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$$

сходится почти всюду)? „Конечномерный“ вариант этой задачи имеет следующий вид: существует ли абсолютная постоянная C такая, что для любого ортонормированного набора $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^N$, $x \in (0, 1)$ найдется такая перестановка $\{k_n\} = \sigma \in S^N$, что

$$\sup_{\{a_n\} \in B_2^N} \sup_{N(x), 1 \leq N(x) < N} \sup_{y > 0} \frac{1}{y^2} m \left\{ x: \left| \sum_{n=1}^{N(x)} a_n \varphi_{k_n}(x) \right| > y \right\} \leq C? \quad (14)$$

А. Гарсиа в книге [5] высказывает гипотезу о справедливости оценки, более сильной чем (14), а именно, что

$$\inf_{\{k_n\} = \sigma(\Phi) \in S^N} \sup_{\{a_n\} \in B_2^N} \sup_{N(x), 1 \leq N(x) < N} \left\| \sum_{n=1}^{N(x)} a_n \varphi_{k_n}(x) \right\|_{L^2(0,1)} \leq C. \quad (15)$$

Напомним, что в силу леммы Меньшова—Радемахера (см. [6], стр. 188) для любого ортонормированного набора

$$\sup_{\{a_n\} \in B_2^N} \sup_{N(x), 1 \leq N(x) < N} \left\| \sum_{k=1}^{N(x)} a_k \varphi_k(x) \right\|_{L^2(0,1)} \leq C \ln N. \quad (16)$$

Сам А. Гарсиа в работе [7] доказал следующий результат:

Теорема С (Гарсиа). Для любого ортонормированного набора $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^N$ и любого набора $\{a_n\} \in B_2^N$ найдется перестановка $\{k_n\} = \sigma = \sigma(\Phi, \{a_n\})$, для которой

$$\sup_{N(x), 1 \leq N(x) \leq N} \left\| \sum_{n=1}^{N(x)} a_{k_n} \varphi_{k_n}(x) \right\|_{L^p(0,1)} \leq C. \quad (17)$$

(Заметим, что доказательство этого результата основано на оценке для данного набора чисел

$$\{b_n\}_{n=1}^N, \sum_{n=1}^N b_n^2 = 1, \sum_{n=1}^N b_n = 0$$

среднего

$$S_p(\{b_n\}) = \left(\frac{1}{N!} \sum_{\sigma = \{k_n\} \in S^N} \sup_{1 \leq s \leq N} \left| \sum_{n=1}^s b_{k_n} \right|^p \right)^{1/p}.$$

Первоначально рассуждение А. Гарсиа были сложными, в [5] им было дано простое доказательство оценок для $S_p(\{b_n\})$, вполне аналогичное доказательству классического неравенства А. Н. Колмогорова для мажоранты частных сумм ряда по системе независимых функций (см. [8], стр. 68).

Функция распределения

$$f(y, \{b_n\}) = \left| \left\{ \sigma \in S^N : \sup_{1 \leq s \leq N} \left| \sum_{n=1}^s b_{k_n} \right| > y \right\} \right|$$

ведет себя во многом сходно с функцией распределения суммы независимых случайных величин. Можно показать, например, что для любого набора $\{b_n\}_{n=1}^N, \sum_{n=1}^N b_n = 0$

$$\frac{1}{N!} f(y, \{b_n\}) \leq C_m \left\{ x \in (0, 1) : \left| \sum_{n=1}^N b_n r_n(x) \right| > C_1 y \right\}; y > 0,$$

где $\{r_n(x)\}_{n=1}^N$ — система Радемахера.

Из сравнения задачи А. Н. Колмогорова или предположения Гарсиа (14) с теоремой Гарсиа (см. (17)) видно, что оценка (17) дает решение более простой задачи. Другим возможным упрощением задачи Колмогорова является получение для данного ортонормированного набора $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^N$ и данной функции $N(x), 1 \leq N(x) \leq N$ оценок величины

$$\inf_{\{k_n\} = \sigma(\varphi, N(x))} \sup_{\{a_n\} \in B_2^N} \left\| \sum_{n=1}^{N(x)} a_n \varphi_{k_n}(x) \right\|_{L^p(0,1)}. \quad (18)$$

В п° 2 получены результаты, связанные с оценкой величины (18). Рассматривается модельная задача об оценке для данной матрицы $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ величины

$$\inf_{\sigma \in S^n} \| (A_\sigma)^* \|_{2,q}$$

(обозначения A_σ и A^* введены в начале этой работы).

Теорема 3. Для любой матрицы $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ с $\|A\|_{(2,2)} \leq 1$ и числа q с $1 \leq q < 2$ найдется такая перестановка строк σ , что $\|(A_\sigma)^*\|_{(2,q)} \leq C_q n^{1/q-1/2}$.

Прежде чем доказывать теорему 3 отметим, что из (16) следует (см. также [9]), что для любой $n \times n$ матрицы A

$$\|A^*\|_{(2,2)} \leq C \ln n \|A\|_{(2,2)}. \tag{19}$$

Поэтому для любой $n \times n$ матрицы A и $q \in [1, 2)$

$$\|A^*\|_{(2,q)} \leq n^{1/q-1/2} \|A^*\|_{(2,2)} \leq C (\ln n) \cdot n^{1/q-1/2} \|A\|_{(2,2)}. \tag{20}$$

Обычный в этих вопросах пример матрицы Гильберта $H_n = \{h_{ij}\}$ с $h_{ij} = \frac{1}{i-j}$ при $1 \leq i, j \leq n, i \neq j$ и $h_{ij} = 0, 1 \leq i \leq n$, для которой $\|H_n\|_{(2,2)} \leq 2\pi$ (см. [1]), показывает, что оценка (20) неулучшаема.

Лемма 3 (см., напр., [8], стр. 76, п. 8). Пусть $\{f_i(x)\}_{i=1}^s$ — набор независимых функций, заданных на отрезке $[0, 1]$ и таких, что $m\{x : f_i(x) = 1\} = \lambda > 0, m\{x : f_i(x) = 0\} = 1 - \lambda, 1 \leq i \leq s$. Тогда

$$m \left\{ x : \left| \sum_1^s f_i(x) \right| \leq \frac{\lambda s}{4} \right\} < \gamma^s; 0 < \gamma < \gamma(\lambda) < 1.$$

Из леммы 1 непосредственно вытекает

Лемма 3'. Пусть $\{f_i(x)\}_{i=1}^s, x \in (0, 1)$ — такой набор функций, принимающих только значения 0 и 1, что для каждого набора $\{e_i\}_{i=1}^k, 1 \leq k \leq s$ с $e_i = 0$ или 1

$$m \{ (x : f_i(x) = e_i, 1 \leq i \leq k) \cap \{x : f_{k+1}(x) = 1\} \} \geq \lambda m \{x : f_i = e_i, 1 \leq i \leq k\},$$

где $\lambda > 0$. Тогда

$$m \left\{ x : \sum_1^s f_i(x) \leq \frac{\lambda}{4} s \right\} < \gamma^s, 0 < \gamma = \gamma(\lambda) < 1.$$

Доказательство теоремы 3. 1. Обозначим через ρ абсолютную постоянную $\rho(1/2)$ (см. теорему А). Для каждой матрицы $B = \{a_{ij}\}, b_1 \leq i, j \leq b_2$ с $1 \leq b_1 < b_2 \leq n$ и $b_2 - b_1 > \rho^{-1}$ определим ее разбиение на четыре подматрицы $(\hat{B})_r, r = 1, 2, 3, 4$, положив

$$(\hat{B})_1 = \{a_{ij}\}, q+1 \leq i, j \leq b_2; (\hat{B})_2 = \{a_{ij}\}, q+1 \leq i \leq b_2, b_1 \leq j \leq q,$$

$$(\hat{B})_3 = \{a_{ij}\}, b_1 \leq i, j \leq q, (\hat{B})_4 = \{a_{ij}\}, b_1 \leq i < q, q+1 \leq j \leq b_2,$$

где число $q = q(b)$ определяется из соотношений

$$b_2 - q \leq \rho(b_2 - b_1 + 1), b_2 - q + 1 > \rho(b_2 - b_1 + 1).$$

2. Построим последовательность разбиений $\Delta_s = \Delta_s(A), s = 0, 1, \dots, s_0$ данной матрицы A на подматрицы. Нулевое разбиение Δ_0

состоит из самой матрицы $A = B_1^0$. Если разбиение Δ_{s-1} , $s > 1$ построено и состоит из подматриц $[B_{i-1}^{s-1}]_{i-1}^{s-1}$, то для построения разбиения Δ_s , те из матриц разбиения Δ_{s-1} , которые пересекают диагональ $i=j$ матрицы A (все они по построению будут квадратными) и имеют порядок $\geq 1 + \rho^{-1}$ делятся на четыре части $(\widehat{B_{i-1}^{s-1}})_r$, $1 \leq r \leq 4$ по правилу, описанному в п. 1. На каком-то шаге с номером $s_0 \leq C \ln n$ указанный процесс остановится. Разбиение Δ_{s_0} обозначим через Δ .

3. Укажем искомую перестановку $[k_j]_{j=1}^n = \sigma_0 = \sigma_0(A) \in S^n$. Для этого предварительно построим набор перестановок σ_r , $1 \leq r \leq s_0$, причем σ_0 будет совпадать с σ_{s_0} . Для построения σ_1 , воспользовавшись теоремой А, примененной к матрице $\{a_{ij}\}$, $q+1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ с $q = q(A)$ (см п. 1^o), найдем такой набор $\mathcal{Q} \subset [1, n]$, $|\mathcal{Q}| = n - q$, что

$$\| [a_{ij}], q+1 \leq i \leq n, j \in \mathcal{Q} \|_{(2, 2)} \leq \frac{1}{2}$$

и в качестве σ_1 возьмем любую перестановку σ , для которой $\sigma(\mathcal{Q}) = [q+1, n]$.

Если перестановки $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{s-1}$, $s \leq s_0$ построены, то для построения σ_s рассмотрим все подматрицы $A_{\mu}^{s-1} = \{a_{i, \sigma_{s-1}(j)}\}$, $i_{\mu} + 1 \leq i$, $j \leq i_{\mu} + 1$, $1 \leq \mu \leq \mu_{s-1}$ разбиения Δ_{s-1} матрицы $\{a_{i, \sigma_{s-1}(j)}\}_{i=1}^n$, которые пересекают диагональ $i=j$ и имеют порядок $\geq 1 + \rho^{-1}$ и, также как при построении перестановки σ_1 , найдем, пользуясь теоремой А, такие наборы целых чисел $\mathcal{Q}_{\mu} \subset [i_{\mu} + 1, i_{\mu} + 1]$, $1 \leq \mu \leq \mu_{s-1}$, что

$$|\mathcal{Q}_{\mu}| = i_{\mu} + 1 - q(A_{\mu}^{s-1}) \quad (\text{см. п. 1}) \text{ и}$$

$$\begin{aligned} & \| [a_{i, \sigma_{s-1}(j)}], q(A_{\mu}^{s-1}) + 1 \leq i \leq i_{\mu} + 1, j \in \mathcal{Q}_{\mu} \|_{(2, 2)} \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \| A_{\mu}^{s-1} \|_{(2, 2)}; \quad 1 \leq \mu \leq \mu_{s-1}. \end{aligned} \quad (21)$$

Затем возьмем такую перестановку σ , что

$$\begin{aligned} 1) \quad & \sigma([i_{\mu} + 1, i_{\mu} + 1]) = [i_{\mu} + 1, i_{\mu} + 1], \quad 1 \leq \mu \leq \mu_{s-1}, \\ 2) \quad & \sigma(\mathcal{Q}_{\mu}) = [q(A_{\mu}^{s-1}) + 1, i_{\mu} + 1], \quad 1 \leq \mu \leq \mu_{s-1} \end{aligned} \quad (22)$$

и положим $\sigma_s = \sigma \cdot \sigma_{s-1}$.

4. Докажем, что перестановка $\sigma_{s_0} = \sigma_0 = [k_j]$ искомая, для этого оценим норму $\| [a_{ik}] \|$, $1 \leq i, j \leq n \|_{(2, q)}$. Пусть $\{(\widehat{R}_{\mu}^s)_2\}_{\mu=1}^{\mu_s}$ — набор матриц, построенных по правилу, описанному в п. 1 для каждой, пересекающей главную диагональ и имеющей порядок $\geq 1 + \rho^{-1}$, матрицы R_{μ}^s разбиения Δ_s матрицы $\{a_{i\alpha}(j)\}$, $1 \leq i, j \leq n$. Тогда легко видеть что матрица

$$Q = \bigcup_{s=1}^{s_0-1} \bigcup_{\mu=1}^{\mu_s} (\widehat{R}_{\mu}^s)_2$$

имеет вид

$$Q = [a_{ij}], \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq j_i, \quad \text{где } |j_i - i| \leq \frac{1}{\rho}, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (23)$$

Из (23) и оценки $\|A\|_{(2,2)} \leq 1$ следует, что

$$\|Q - (A_{\alpha})^*\|_{(2,2)} \leq C,$$

а поэтому

$$\|Q - (A_{\alpha})^*\|_{(2,q)} \leq C n^{1/q-1/2}. \quad (24)$$

Оценим норму $\|Q\|_{(2,q)}$. Для этого сначала оценим $\left\| \bigcup_{\mu=1}^{\mu_s} (\hat{R}_{\mu}^s) \right\|_{(2,q)}$ при данном $s, 1 \leq s \leq s_0 - 1$. Если для каждой матрицы R_{μ}^s через $(\hat{R}_{\mu}^s)_{\alpha_k}$ (где $\alpha_k = \alpha_k(\mu, s) = 1$ или 3) обозначить ту матрицу разбиения $\Delta_{k+1}, 0 \leq k \leq s - 2$, которая содержит матрицу R_{μ}^s , то по построению перестановки σ_0

$$\|(\hat{R}_{\mu}^s)_{\alpha_k}\|_{(2,2)} \leq \|R_{\mu}^s\|_{(2,2)} \leq 2^{-\rho(\mu, s)}, \quad (25)$$

где $\rho(\mu, s) = \sum_{k \in (0, s-2]: \alpha_k=1} 1$.

Из леммы 3' нетрудно вывести, что при некоторых постоянных $\gamma, 0 < \gamma < 1$ и $c_0 > 0$ сумма порядков матриц

$$\sum_{\mu: \rho(\mu, s) < c_0 s} \text{rank}(R_{\mu}^s) \leq n \gamma^s. \quad (26)$$

Очевидно, что

$$\left\| \bigcup_{\mu=1}^{\mu_s} (\hat{R}_{\mu}^s) \right\|_{(2,q)} \leq \|R_s^*\|_{(2,q)} + \|R_s^*\|_{(2,q)}, \quad (27)$$

где

$$R_s^* = \bigcup_{\mu \in [1, \mu_s]: \rho(\mu, s) < c_0 s} R_{\mu}^s; \quad R_s^* = \bigcup_{\mu \in [1, \mu_s]: \rho(\mu, s) > c_0 s} R_{\mu}^s$$

Пользуясь для оценки нормы $\|R_s^*\|_{(2,q)}$ неравенством

$$\|B\|_{(2,q)} \leq (\text{rank } B)^{1/q-1/2} \|B\|_{(2,2)}, \quad (28)$$

неравенством $\|R_{\mu}^s\|_{(2,2)} \leq 1$ (вытекающим из того, что $\|R_{\mu}^s\|_{(2,2)} \leq \max_{\mu} \|A_{\mu}^s\|_{(2,2)} \leq \|A\|_{(2,2)} < 1$) и оценкой (26), получим

$$\|R_s^*\|_{(2,q)} \leq n^{1/q-1/2} \gamma^s (1/q-1/2); \quad 0 < \gamma < 1. \quad (29)$$

Для оценки $\|R_s^*\|_{(2,q)}$ используем неравенства (25) и (28) и найдем

$$\begin{aligned} \|R_s^*\|_{(2,q)} &\leq n^{1/q-1/2} \|R_s^*\|_{(2,2)} \leq n^{1/q-1/2} \max_{\mu: \rho(\mu, s) > c_0 s} \|(\hat{R}_{\mu}^s)_{\alpha_k}\|_{(2,2)} < \\ &\leq n^{1/q-1/2} \max_{\mu: \rho(\mu, s) > c_0 s} \|R_{\mu}^s\|_{(2,2)} \leq 2 n^{1/q-1/2} \cdot 2^{-c_0 s}. \end{aligned} \quad (30)$$

Из оценок (29), (30) и (27) следует, что

$$r_s \equiv \left\| \bigcup_{\mu=1}^{\mu_s} (\hat{R}_{\mu}^s) \right\|_{(2, q)} < 3 \cdot n^{1/q-1/2} \gamma_1^s \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2}\right); \quad 0 < \gamma_1 < 1, \quad (31)$$

а следовательно и

$$\|A_{(2, q)}\| \leq \sum_{s=1}^{s_0-1} r_s \leq 3n^{1/q-1/2} \sum_{s=1}^{\infty} \gamma_1^s \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2}\right) \leq \frac{3n^{1/q-1/2}}{1 - \gamma_1^{1/q-1/2}}. \quad (32)$$

Соединяя неравенства (32) и (24), получаем нужную оценку для $\|A_{(2, q)}\|$. Теорема 3 доказана.

В заключение п. 2° сформулируем одно утверждение, которое можно доказать, используя следствие 2 и разбиение матрицы $\{a_{k,l}\}$ на двоичные блоки.

Утверждение. Для любой матрицы $A = \{a_{i,j}\}_{i,j=1}^n$ с $\|A\|_{(2, 2)} \leq 1$

$$\frac{1}{n!} \cdot \sum_{\sigma \in \{k_l\} \in S^n} \| \{a_{k_l, j}\} \|_{(2, q)} \leq C_q (\ln^{3q+2q} n) \cdot n^{1/q-1/2}.$$

Утверждение дает для среднего значения по всем перестановкам столбцов матрицы A величины $\|A\|_{(2, q)}$ лучшую оценку, чем тривиально вытекающая из (19) оценка $C (\ln n) n^{1/q-1/2}$.

3°. В этом параграфе дается оценка n -поперечника по Колмогорову $d_n(B_1^m, l_q^m)$ октаэдра B_1^m в пространстве l_q^m , при этом метод доказательства имеет общие черты с использованным в п. 1°. Определение поперечника и ряд результатов об оценках поперечников конечномерных множеств содержится в работах [10] и [11].

Хорошо известно ([12], см. также [10], стр. 237), что справедливо равенство

$$d_n(B_1^m, l_2^m) = \left(\frac{m-n}{m}\right)^{1/2}. \quad (33)$$

Из равенства (33) следует, что при $m \geq 2n$ и $1 \leq q \leq 2$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq d_n(B_1^m, l_q^m) \leq 1. \quad (34)$$

Здесь мы получим равномерную по n и $m \geq 2n$ оценку для поперечника $d_n(B_1^m, l_q^m)$, $2 < q < \infty$. Рассуждения, приведенные в этом параграфе, применимы и если $m < 2n$, но мы ограничиваемся важным для приложений к оценкам поперечников функциональных классов случаем $m \geq 2n$.

Теорема 4. При $n=1, 2, \dots, m \geq 2n$ и $2 < q < \infty$ справедливы неравенства

$$\frac{1}{4} \min(1, m^{1/q} n^{-1/2}) \leq d_n(B_1^m, l_q^m) \leq C'(q) \cdot \min(1, m^{1/q} \cdot n^{-1/2}). \quad (35)$$

Доказательство. а) Оценка сверху. При $m > n^{q/2}$ оценка сверху очевидна, так как в этом случае $\min(1, m^{1/q} n^{-1/2}) = 1$, а поперечник $d_n(B_1^m, l_q^m) \leq 1$ для любых чисел m, n, q . При $m \leq n^{q/2}$, пользуясь очевидным неравенством $\|x\|_{1/m} \leq m^{1/q} \|x\|_{1/m}$ и оценкой поперечника $d_n(B_1^m, l_q^m)$, полученной в заметке автора [13], согласно которой, при $m \leq n^2$, $d_n(B_1^m, l_q^m) \leq n^{-1/2} C(\lambda)$, имеем

$$d_n(B_1^m, l_q^m) \leq m^{1/q} d_n(B_1^m, l_q^m) < C(q) \cdot m^{1/q} \cdot n^{-1/2}.$$

б) Оценка снизу. При $n = 1$ оценка легко проверяется непосредственно, поэтому в дальнейшем считаем, что $n > 1$, $m \geq 2n$.

Лемма 4. ([14], см. также [10], стр. 237). Для любой плоскости $L \subset R^m$, $\dim L = n$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^m \rho_{l_i}^2(L, z_i) \geq m - n,$$

где при

$$1 \leq i \leq m, z_i = \left\{ 0, \dots, \frac{1}{i}, \dots, 0 \right\}, \text{ а } \rho_{l_i}(L, z) = \inf_{x \in L} \|x - z\|_{l_i}.$$

Доказательство леммы очень просто, тем не менее она часто оказывается весьма полезной, в частности, из нее следует оценка снизу для $d_n(B_1^m, l_q^m)$ (см. (33)).

Лемма 4'. Для любых наборов векторов $\{e_i\}_{i=1}^{2n}$ и $\{\xi_i\}_{i=1}^{2n}$, $e_i, \xi_i \in R^n$ таких, что скалярное произведение $(e_i, \xi_i) = 1$, $1 \leq i \leq 2n$, справедливо неравенство

$$\sum_{i+j} |(e_i, \xi_j)|^2 \geq n. \quad (36)$$

В самом деле, рассмотрим матрицу A с $2n$ столбцами и n строками, при этом i -ый столбец этой матрицы совпадает с вектором e_i . Предположив, что оценка (36) не верна, мы получим, что для подпространства $L \subset R^{2n}$, натянутого на вектора—строки матрицы A $\sum_{i=1}^{2n} \rho_{l_i}^2(L, z_i) < n$, что противоречит лемме 4.

Пусть теперь число q , $2 < q < \infty$ фиксировано. Если для пары чисел (n, m) имеет место неравенство $d_n(B_1^m, l_q^m) > \frac{1}{4}$, то

$$\frac{1}{4} \min(1, m^{1/q-1/2}) \leq \frac{1}{4} < d_n(B_1^m, l_q^m),$$

т. е. в этом случае оценка снизу в (35) верна.

В случае, если $d_n(B_1^m, l_q^m) \leq \frac{1}{4}$, рассмотрим плоскость $L \subset R^m$, $\dim L = n$, для которой

$$\sup_{x \in B_1^m} \rho_{l,q}(L, x) = \max_{1 < l < m} \rho_{l,q}(L, z_l) = d_n(B_1^m, l_q^m). \quad (37)$$

Выбрав в L базис $\{y_i\}_{i=1}^n$, $y_i \in R^n$, плоскость L зададим матрицей с n строками $\{y_i\}_{i=1}^n$ и m столбцами $\{l_i\}_{i=1}^m$. Из (37) и неравенства $d_n(B_1^m, l_q^m) \leq \frac{1}{4}$ следует, что найдется набор векторов $\{\tilde{\xi}_i\}_{i=1}^m$, $\tilde{\xi}_i \in R^n$, такой, что

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & \sum_{j=1}^m |(\tilde{\xi}_i, e_j)|^q < d_n^q(B_1^m, l_q^m), \\ & 1 \leq i \leq m. \\ \text{б)} \quad & \frac{3}{4} \leq (\tilde{\xi}_i, e_i) = r_i \leq \frac{5}{4}, \end{aligned}$$

Следовательно, для набора векторов $\xi_i = \frac{1}{r_i} \tilde{\xi}_i$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & \sum_{j=1}^m |(\xi_i, e_j)|^q \leq \left(\frac{4}{3}\right)^q d_n^q(B_1^m, l_q^m); \\ & 1 \leq i \leq m, \\ \text{б)} \quad & (\xi_i, e_i) = 1. \end{aligned} \quad (38)$$

Рассмотрим сумму

$$S = \sum_{\substack{1 \leq i, j < m \\ i \neq j}} |(\xi_i, e_j)|^q.$$

Из (38) следует, что

$$S \leq m \left(\frac{4}{3}\right)^q d_n^q(B_1^m, l_q^m). \quad (39)$$

Теперь рассмотрим сумму

$$T = \sum_{i=1}^m \sum_{\substack{j \in I \\ i \neq j}} |(\xi_i, e_j)|^q,$$

где в сумме T внешнее суммирование производится по всем наборам $\Omega \in E_m^{2n}$. Член $|(\xi_i, e_j)|^q$ войдет в сумму T C_{m-2}^{2n-2} раз, поэтому

$$T \leq C_{m-2}^{2n-2} \cdot S \leq C_{m-2}^{2n-2} \cdot m \left(\frac{4}{3}\right)^q \cdot d_n^q(B_1^m, l_q^m). \quad (40)$$

Из (40) следует, что можно найти такой набор $\Omega^0 \in E_m^n$, что

$$P \equiv \sum_{\substack{i, j \in I \\ i \neq j}} |(\xi_i, e_j)|^q \leq T \cdot (C_m^{2n})^{-1} < \left(\frac{4}{3}\right)^q \cdot d_n^q(B_1^m, l_q^m) \cdot m \cdot \frac{C_{m-2}^{2n-2}}{C_m^{2n}}. \quad (41)$$

Так как $C_{m-2}^{2n-2} \cdot (C_m^{2n})^{-1} = 2n(2n-1) \cdot (m(m-1))^{-1}$, то правая часть в (41) не превосходит

$$\left(\frac{4}{3}\right)^q d_n^q(B_1^m, l_q^m) \cdot \frac{4n^2}{m-1} \quad (42)$$

Оценим теперь левую часть в (41) снизу. Пользуясь неравенством $|x|_{l_q^r} > r^{1/q-1/2} |x|_{l_2^r}$, $q > 2$, $r = 1, 2, \dots$, равенством (38) п. б) и леммой 4 получим:

$$P^{1/q} \geq (4n^2)^{1/q-1/2} \left(\sum_{\substack{i, j \in \mathbb{Z}^n \\ i \neq j}} (\xi_i, e_j)^2 \right)^{1/2} > (4n^2)^{1/q-1/2} \cdot n^{1/2} = 4^{1/q-1/2} \cdot n^{2/q-1/2}, \quad (43)$$

$$P > 4^{1-q/2} \cdot n^{2-q/2}.$$

Из соотношений (41) и (43) выводим, учитывая (42), что

$$\left(\frac{4}{3}\right)^q \cdot d_n^q(B_1^m, l_q^m) \frac{4n^2}{m-1} \geq 4^{1-q/2} \cdot n^{2-q/2},$$

т. е.

$$d_n^q(B_1^m, l_q^m) \geq (m-1) n^{-q/2} 4^{-q/2} \left(\frac{3}{4}\right)^q; \quad d_n(B_1^m, l_q^m) \geq n^{-1/2} \times \\ \times (m-1)^{1/q} \cdot \frac{3}{8} > \frac{1}{4} n^{-1/2} \cdot m^{q/2}.$$

Теорема 4 доказана.

Математический институт
АН СССР им. В. А. Стеклова

Поступила 1.IX.1979

Բ. Ս. ԿԱՇԻՆ. l_2^m ստացածնայունից l_2^m ստացածնայուն գործող սահմանափակ օպերատորների որոշ եռապայունների մասին (ամփոփում)

Հորվածում մասնավորապես որվում են հիրերտյան նորմի գնահատականներ որված օրթոգոնալ մատրիցի ենթամատրիցների համար: Բերվում են նաև գնահատականներ բազմաչափ օկտանդրների քննչականների համար:

B. S. KASHIN. On certain properties of matrices of bounded operators
from l_2^m into l_2^m (summary)

Estimates of the Hilbert norm of the submatrices of a given orthogonal matrix are presented. Estimates of the diameters of multidimensional octahedra are given.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Г. Харди, Д. Литтлвуд, Г. Полиа. Неравенства, М., ИИЛ, 1948.
2. Б. С. Кашин. Об одном свойстве билинейных форм, Сообщ. АН Груз. ССР, 93.
3. Л. Ф. Тот. Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве, М., Физматгиз, 1958.
4. A. Grothendieck. Resume de la theorie metrique des produits tensoriels topologiques, Bol. Soc. Mat. Sao Paulo, 8, № 1-2, 1956, 1-79.
5. A. Garsta. Topics an almost everywhere convergence, Chicago, Markham, 1970.
6. С. Качмаж, Г. Штейнгауз. Теория ортогональных рядов, М., Физматгиз, 1958.
7. A. Garsta. Rearrangements for Fourier series, Ann. of Math., 79, № 3, 1964, 623-629.

8. В. В. Петров. Суммы независимых случайных величин, М. Изд. «Наука», 1972.
9. Д. Е. Меньшов. Sur les series des fonctions orthogonales III, *Fung. Math.*, 10, 1927, 375—420.
10. В. М. Тихомиров. Некоторые вопросы теории приближений, М. Изд. МГУ, 1976.
11. Б. С. Кашин. Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций, *Изв. АН СССР, сер. матем.*, 41, № 2, 1977, 334—351.
12. С. Б. Стечкин. О наилучших приближениях заданных классов функций любыми полиномами, *УМН*, 9, № 1, 1954, 133—134.
13. Б. С. Кашин. О поперечниках октаэдров, *УМН*, 30, № 4, 1975, 251—252.
14. А. Н. Колмогоров, А. А. Петров, Ю. М. Смирнов. Одна формула Гаусса из теории метода наименьших квадратов, *Изв. АН СССР, сер. матем.*, 14, 1947, 561—566.