ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XV. № 5, 1980 Математика

С. А. АНТОНЯН

# РЕТРАКТЫ В КАТЕГОРИЯХ $G$-ПРОСТРАНСТВ

## Введение

В настоящей статье основные факты теории ретрактов распространяются на категорию $MG$ всех метризуемых $G$-пространств, т. е. метризуемых пространств, рассматриваемых со всевозможными действиями* как правило, компактной группы $G$.

Большинство доказываемых здесь результатов анонсировано нами в [1].

Частным случаем основной теоремы 1 является

Теорема 2. *Всякое полное выпуклое инвариантное множество $V$ локально выпуклого пространства $Z$, на котором линейно действует компактная группа $G$, является абсолютным экстензором для категории $MG$.*

*Если кроме того пространство $Z$ метрическое, а множество $V$ сепарабельное, то $V$ является абсолютным экстензором даже для категории $NG$ всех нормальных $G$-пространств.*

Как показывают примеры 1 и 2, условия компактности группы $G$ и полноты множества $V$ в этой теореме существенны. Лишь в случаях, либо конечности группы $G$, либо конечномерности пространства $Z$, нам удается освободиться от условия полноты множества $V$. Как показал Майкл [6], сепарабельность множества $V$ во второй части теоремы 2 необходима даже в случае тривиальной группы $G$.

Взяв группу $G$, состоящую из одного элемента, мы получим первый частный случай теоремы 2 — известную теорему Дугунджи ([3], стр. 86), о том, что всякое выпуклое множество локально выпуклого пространства является абсолютным экстензором для категории $M$ всех метризуемых пространств.

Взяв $G = Z_p$ — циклическую группу простого порядка $p$, мы получим второй частный случай — теорему Яворовского [13].

Положив $V = \mathbf{R}^n$ — евклидово пространство и взяв группу Ли $G$, ортогонально действующую на $\mathbf{R}^n$, мы получим третий частный случай — известную теорему Глисона [7]. Естественно полагать, что теорема 2 подобно теоремам Дугунджи и Глисона может иметь многочисленные применения. Во всяком случае последующее изложение нашей работы существенно на нее опирается.

Статья делится на 4 параграфа. В § 1 приводятся основные определения теории $G$-пространств, рассматривается естественное дей-

* Все основные определения см. в § 1.

ствие группы $G$ на пространстве отображений и приводится нужная для дальнейшего теорема Ю. М. Смирнова [11] в несколько уточненном виде. В § 2 доказывается необходимая для основной теоремы

Основная лемма 2. *Пусть $V$—полное выпуклое инвариантное множество локально выпуклого пространства $Z$, на котором линейно и непрерывно действует компактная группа $G$, а $C(G, V)$ — пространство непрерывных отображений $f: G \to V$, рассматриваемое с компактно-открытой топологией и с действием группы $G$, заданным формулой $(gf)(g') = gf(g')$ (см. лемму 1).*

*Тогда существует непрерывное отображение $\int : C(G, V) \to V$, удовлетворяющее трем условиям:*

$$\text{инвариантность)}\ \int {}_hf = \int f = \int f_h,$$

*где ${}_hf(g) = f(hg)$, а $f_h(g) = f(gh)$ для любого $h$ из $G$,*

$$\text{эквивариантность)} \int g * f = g \int f \text{ для любого } g \text{ из } G,$$

$$\text{нормировка)} \int f = v_0, \text{ если } f(G) = v_0 \in V.$$

Условия компактности группы $G$ и полноты множества $V$ здесь существенны. В случаях либо конечности группы $G$ либо конечномерности пространства $Z$ от полноты множества $V$ можно отказаться. § 3 посвящен основной теореме 1 и примерам.

В § 4 главные факты теории ретрактов переносятся на $G$-пространства.

Например, теорема об эквивалентности понятий быть абсолютным (окрестностным) ретрактом и быть абсолютным (соотв., окрестностным) экстензором [6] переносится на категорию $G$-пространств, метризуемых полной метрикой, при условии, что группа $G$ компактна (теорема 3). Теорема суммы [3] оказывается верной и в категории $MG$ при том же условии компактности группы $G$ (теорема 4). В том же предположении о группе $G$ остается верной и теорема Борсука о продолжении гомотопии [3].

Теорема 5. *Пусть $Y$ — абсолютный экстензор категории $MG$, а $h: A \times I \to Y$ — эквивариантная гомотопия между отображениями $h_0$ и $h_1$. Если $h_0$ имеет эквивариантное продолжение $H_0: X \to Y$, где $A$ замкнуто и инвариантно в $X \in MG$, то $h$ имеет такое эквивариантное продолжение $H: X \times I \to Y$, что $H_0(x) \equiv H(x, 0)$.*

Следует уточнить, что отрезок $I$ здесь рассматривается лишь с тривиальным действием группы $G$, а действие группы на произведении определяется обычным покоординатным способом. На самом деле, в тексте эта теорема доказана в значительно более широком случае, а именно, для такой полной подкатегории $KG$ категория нормальных $G$-пространств, которая вместе с каждым объектом содержит любое его замкнутое инвариантное множество, а также и произведение $X \times I$. Таких категорий $KG$ достаточно много.

Далее для категорий $MG$, $CG$ и т. п доказывается теорема 6 о том, что $G$-пространство является абсолютным экстензором в точности тогда, когда оно $G$-стягиваемо и является абсолютным окрестностным экстензором.

Теорема 7 дает простое необходимое условие для того, чтобы $G$-пространство $Y$ было абсолютным (окрестностным) ретрактом категории $MG$, где $G$—локально компактная $\sigma$-компактная группа. На этом основано построение примеров 1 и 2.

Аналогичные теоремы были ранее доказаны Яворовским [13] (в случае группы $G = Z_p$ и конечномерного компактного метризуемого пространства $Y$) и Ю. М. Смирновым [10] (для метризуемой группы $G$).

## § 1. Основные определения и факты

1. Действием группы $G$ на пространстве $X$* называют всякое непрерывное отображение $(g, x) \to gx$ топологического произведения $G \times X$ в пространство $X$, удовлетворяющее условиям

A) $$g(g'x) = (gg')x,$$

B) $$ex = x^{**}$$

для любых $g,\ g' \in G,\ x \in X$,

2. Если $G$ — группа, а $X$ — линейное пространство, то действие $(g, x) \to gx$ называют линейным, если выполнено условие

C) $$g(\lambda x + \mu y) = \lambda gx + \mu gy$$

для любого $g \in G$, любых чисел $\lambda$, $\mu$ и любых $x,\ y \in X$.

3. Если $G$ — группа, а $(X, \rho)$ — метрическое пространство, то действие $gx$ называют изометрическим, если $\rho(gx, gy) = \rho(x, y)$ для всех $g \in G$, $x, y \in X$. Метрика $\rho$ в этом случае называется инвариантной (относительно действия $gx$).

4. (Линейное) пространство $X$ с фиксированным на нем (линейным) непрерывным действием группы $G$ называют (линейным) $G$-пространством.

5. Непрерывное отображение $f: X \to Y$ $G$-пространств называют эквивариантным или $G$-отображением, если оно коммутирует с данными действиями, т. е. если $f(gx) = gf(x)$ для любых $x \in X$ и $g \in G$. Легко видеть, что все $G$-пространства и все $G$-отображения составляют категорию.

Легко также проверить, что если $G$ состоит из одного элемента, то категория $G$-пространств и $G$-отображений изоморфна категории топологических пространств и непрерывных отображений.

(Другие примеры $G$-пространств см. в [10]).

---

* Группой называем мультипликативную топологическую группу, а пространством — топологическое пространство.

** $e$ — единица группы $G$.

6. Множество $A$ $G$-пространства $X$ называют инвариантным, или $G$-множеством, если $ga \in A$ для любых $g \in G$ и $a \in A$. Ясно, что каждое инвариантное множество $A$ $G$-пространства $X$ само является $G$-пространством, если его рассматривать с ограничением действия группы $G$ на $A$.

7. Произведением $X \times Y$ $G$-пространств называют топологическое произведение $X \times Y$, рассматриваемое вместе с покоординатным действием $g(x, y) = (gx, gy)$ группы $G$.

8. Эквивариантную гомотопию или $G$-гомотопию $H: X \times I \to Y$ определяют как обычно, требуя естественно, чтобы $H$ было эквивариантным отображением, но при непременном условии, что группа $G$ действует на отрезке $I$ тривиально, т. е. $gt = t$ для любых $g \in G$ и $t \in I$. Стало быть, $H(gx, t) = gH(x, t)$ для любых

$$x \in X,\ t \in I,\ g \in G.$$

9. $G$-пространство $Y$ называют $G$-стягиваемым, если его тождественное отображение гомотопно некоторому эквивариантному постоянному отображению $f: Y \to Y$.

10. $G$-пространство $Y$ называют абсолютным (окрестностным) экстензором для некоторой категории $KG$ $G$-пространств (сокращенно $AE(KG)$, соотв. $ANE(KG)$), если для любого объекта $X$ из $KG$ всякий морфизм $f: A \to Y$, где $A$ замкнуто и инвариантно в $X$, имеет продолжение $F: X \to Y$ из категории $KG$ (соотв. $F: O \to Y$, где $O$—некоторая инвариантная окрестность множества $A$ в $X$, а $F \in KG$).

Мы будем рассматривать лишь такие категории $KG$, которые содержат все инвариантные замкнутые подпространства своих объектов, а также содержат все эквивариантные отображения своих объектов. Поэтому следующие два определения мы соответственно упростим.

11. Множество $A$ $G$-пространства $X$ называется $G$-ретрактом пространства $X$, если существует эквивариантная ретракция $r: X \to A$ (т. е. $r(a) = a$ для любого $a \in A$).

12. $G$-пространство $Y$ называется абсолютным (окресностным) ретрактом категории $KG$ (сокращенно $AR(KG)$, соотв. $ANR(KG)$), если $Y \in KG$ и при всяком замкнутом эквивариантном вложении $i: Y \to Z$ пространства $Y$ в пространство $Z$ из категории $KG$ образ $i(Y)$ является $G$-ретрактом пространства $Z$ (соотв. $G$-ретрактом некоторой своей инвариантной окрестности).

Нетрудно проверить, что если $Y \in KG$ и $Y \in AE(KG)$, то $Y \in AR(KG)$ (соотв., если $Y \in KG$ и $Y \in ANE(KG)$), то $Y \in ANR(KG)$).

Пусть $X$ и $Y$—произвольные топологические пространства. Через $C(X, Y)$ обозначим пространство всех непрерывных отображений $f: X \to Y$, взятое с компактно-открытой топологией ([5], стр. 84).

Лемма 1. *Пусть $X$ и $Y$—топологические пространства.* Тогда *каждое действие $gy$ группы $G$ на $Y$ порождает действие $g * f$ группы $G$ на $C(X, Y)$ согласно формуле*

D) $$(g * f)(x) = gf(x) \text{ для всех } x \in X.$$

*Причем, если $Y$ — топологическое линейное пространство, то действие $g * f$ линейно, как только линейно действие $gy$.*

Доказательство. Условия А) и В) из определения действия и линейность действия $g * f$ в случае линейности действия $gy$ легко проверяются. Далее из определения действия $g * f$ видно, что $g * f \in C(X, Y)$ для всех $g \in G$, $f \in C(X, Y)$. Остается только показать непрерывность отображения $(g, f) \to g * f$.

Пусть $g_0 \in G$, $f_0 \in C(X, Y)$, $g_0 * f_0 \in \Gamma_{K, V}$, где $K$ компактно в $X$, $V$ открыто в $Y$, а $\Gamma_{K, V} = \{f \in C(X, Y);\ f(K) \subset V\}$ — элемент псевдобазы компактно-открытой топологии пространства $C(X, Y)$. Тогда $g_0 f_0(x) \in V$ для любого $x \in K$. В силу непрерывности действия $gy$ для каждой точки $x \in K$ существуют такие окрестности $U_x$ точки $g_0$ в $G$ и окрестность $W_x$ точки $f_0(x)$ в $Y$, что $U_x \cdot W_x \subset V$*.

В силу компактности множества $f_0(K)$ существует конечное число множеств $W_{x_1}, \cdots, W_{x_n}$, покрывающих множество $f_0(K)$. Положим $W = \bigcup_{i=1}^{n} W_{x_i}$ и $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{x_i}$. Тогда если $g \in U$ и $y \in W$, то существует такой индекс $j$, $1 \leqslant j \leqslant n$, что $g \in U_{x_j}$ и $y \in W_{x_j}$, и следовательно, $gy \in U_{x_j} \times W_{x_j} \subset V$. Итак, $U \cdot W \subset V$. Теперь заметим, что $U$ — окрестность точки $g_0$ в $G$, а $\Gamma_{K, W}$ — окрестность точки $f_0$ в $C(X, Y)$.

Утверждаем, что $U * \Gamma_{K, W} \subset \Gamma_{K, V}$.

Действительно, если $g \in U$ и $f \in \Gamma_{K, W}$, то $(g * f)(x) = gf(x) \in UW \subset V$ для каждого $x \in K$, т. е. $g * f \in \Gamma_{K, V}$. Так как множества $\Gamma_{K, V}$ образуют псевдобазу топологии пространства $C(X, Y)$, то отображение $(g, f) \to g * f$ непрерывно в точке $(g_0, f_0)$. Поскольку эта точка была выбрана произвольно, то отображение $g * f$ непрерывно. ■

Теорема С. *Любое метризуемое $G$-пространство $X$ с компактной действующей группой $G$ можно эквивариантно и замкнуто вложить в нормированное линейное $G$-пространство $Z$, на котором $G$ действует линейно и изометрически. Причем, если $X$ полно в некоторой метрике, то $Z$ полно***.

Доказательство. Пусть $X$ и $Y$ — топологические пространства, а группа $G$ действует на $X$. На пространстве $C(G, Y)$ имеется действие $g_S f$, определенное формулой

E) $$(g_S f)(g') = f(g'g),\ g,\ g' \in G,\ f \in C(G, Y),$$

линейное, если $Y$ — линейное пространство [11]. Если $Y$ — нормированное линейное пространство, а группа $G$ — компактная, то $C(G, Y)$ относительно Sup-нормы будет нормированным линейным пространством, причем полным, если полно $Y$.

---

* Если $A \subset G$, $B \subset Y$, то через $AB$ обозначим множество $\{gy;\ g \in A,\ y \in B\}$.

** Эта теорема по существу принадлежит Ю. М. Смирнову [11]. Мною замечено лишь то, что группа $G$ действует на $Z$ изометрически, т. е. что метрика, определенная на $Z$, инвариантна.

Известно ([2], стр. 49), что если $X$ метрическое пространство, то существует замкнутое изометрическое вложение $i: X \to Y$ в некоторое нормированное линейное пространство $Y$, полное, если полно $X$. Искомое вложение $i_S: X \to Z = C(G, Y)$ Ю. М. Смирнов определяет формулой $i_S(x)(g) = i(gx)$. В [11] им доказано, что $i_S$ является замкнутым эквивариантным вложением. Легко проверить, что метрика супремума инвариантна, т. е., что

$$\|g_S f - g_S \varphi\| = \|f - \varphi\|, \quad g \in G, \ f, \ \varphi \in Z.$$

В самом деле

$$\|g_S f - g_S \varphi\| = \|g_S (f - \varphi)\| = \sup_{g' \in G} \|g_S (f - \varphi)(g')\| =$$

$$= \sup_{g' \in G} \|(f - \varphi)(g'g)\| = \sup_{h \in G} \|(f - \varphi)(h)\| = \|f - \varphi\| \blacksquare$$

Отметим необходимый для дальнейшего известный факт, непосредственно следующий из теоремы $C$.

Лемма 0. *Для любого метризуемого пространства $X$ с непрерывным действием компактной группы $G$ на $X$ существует инвариантная метрика.*

## § 2. Основная лемма

Лемма 2. *Пусть $V$—полное*) выпуклое инвариантное множество локально выпуклого пространства $Z$, на котором линейно действует компактная группа $G$. Тогда существует непрерывное отображение $\int : C(G, V) \to V$, удовлетворяющее условиям*

F) $\int_h f = \int f = \int f_h$ *для любого $f \in C(G, V)$ и любого $h \in G$, где $_hf(g) = f(hg)$, $f_h(g) = f(gh)$ для всех $g \in G$.*

G) $\int g * f = g \int f$ *для любого $f \in C(G, V)$ и любого $g \in G$, где действие $g * f$ определяется формулой $D$) из леммы 1.*

H) $\int f = v_0$, *если $f(G) = v_0$, $v_0 \in V$. При этом если либо группа $G$ конечна, либо пространство $Z$ конечномерно, то от полноты множества $V$ можно отказаться.*

Доказательство. Известно [4], [9], что на группе $G$ существует (единственный) интеграл по мере Хаара, т. е. такое непрерывное линейное отображение $\int : C(G, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$, где $\mathbf{R}$ — действительная прямая, которое удовлетворяет условиям $F$), $H$) и условию положительности:

$I$) $\int f > 0$, если $f \geqslant 0$.

Пусть $f \in C(G, V)$. Так как $G$ компактна, а $f$ непрерывно, то $f(G)$ компактно в $V$. Поэтому в силу выпуклости и полноты множества $V$, замыкание $\overline{\operatorname{conv} f(G)}$ выпуклой оболочки $\operatorname{conv} f(G)$ компактно (и лежит в $V$) ([8], стр. 92). Следовательно, мы находимся в условиях теоремы 3. 27 из [9]. По этой причине существует интеграл

* Полное в смысле индуцированной из $Z$ естественной равномерности.

$\int f \in \overline{\operatorname{conv} f(G)} \subset V$ однозначно определяемый формулой

$$J) \qquad z^*(\int f) = \int z^* \circ f,$$

где $z^*$ — произвольный элемент сопряженного к $Z$ пространства $Z^*$, слева стоит искомый интеграл от отображения $f$, а справа — интеграл по мере Хаара от непрерывной функции

$$z^* \circ f : G \to \mathbf{R}.$$

Покажем, что так определенное отображение $\int : C(G, V) \to V$ искомое.

Оно непрерывно ([4], стр. 67).

Проверим условия $F$), $G$) и $H$).

$F$). Пусть $h \in G$, $f \in C(G, V)$, а $z^* \in Z^*$. Легко видеть, что $z^* \circ {}_h f = {}_h(z^* \circ f)$ и $z^* \circ f_h = (z^* \circ f)_h$.

Поэтому в силу формулы $J$) имеем

$$z^*(\int {}_h f) = \int z^* \circ {}_h f = \int_h (z^* \circ f) = \int z^* \circ f = z^*(\int f) \text{ и}$$

$$z^*(\int f_h) = \int z^* \circ f_h = \int (z^* \circ f)_h = \int z^* \circ f = z^*(\int f).$$

Отсюда, в силу единственности интеграла, определяемого формулой $J$), заключаем, что $\int_h f = \int f = \int f_h$.

G). Пусть $gz$—линейное действие группы $G$ на пространстве $Z$. Для каждого $g \in G$ через $g^*$ обозначим линейное непрерывное отображение пространства $Z$ в себя, определенное формулой $g^*(z) = gz$ Ясно, что $z^* \circ g^* \in Z^*$ для любого $z^* \in Z^*$. Поэтому для каждого $\in C(G, V)$, $z^*(g \int f) = (z^* \circ g^*)(\int f) = \int (z^* \circ g^*) \circ f$. Но заметим, что $(z^* \circ g^*) \circ f = z^* \circ (g * f)$.

Следовательно, $z^*(g \int f) = \int z^* \circ (g * f) = z^*(\int g * f)$.

Поэтому из формулы $J$) и из единственности интеграла следует, что $g \int f = \int g * f$.

$H$). Пусть $f$—постоянное отображение группы $G$ в точку $v_0$. Тогда для любого $z^* \in Z^*$, $z^* \circ f$ — постоянная функция, равная $z^*(v_0) \in \in \mathbf{R}$, поэтому $\int z^* \circ f = z^*(v_0)$. Следовательно, $z^*(\int f) = \int z^* \circ f = z^*(v_0)$. Как и выше, отсюда следует, что $\int f = v_0$.

Для завершения доказательства отметим, что если либо группа $G$ конечна, либо пространство $Z$ конечномерно, то множество $\overline{\operatorname{conv} f(G)} = \operatorname{conv} f(G)$ компактно и без предположения полноты множества $V$. Поэтому в этом случае в лемме 2 от полноты множества $V$ можно отказаться. ■

## § 3. Основная теорема

Основная теорема 1. *Пусть $V$ — полное выпуклое инвариантное множество локально выпуклого пространства $Z$, на котором линейно действует компактная группа $G$, а $A$ — замкнутое инвариантное множество $G$-пространства $X$. Тогда всякое эквивариантное отображение $f : A \to V$, которое продолжается до непрерывного отображения $F : X \to V$, можно продолжить до экви-*

*вариантного отображения $f: X \to V$. Если либо группа $G$ конечна, либо пространство $Z$ конечномерно, то от полноты множества $V$ можно отказаться.*

Доказательство. Пусть $F: X \to V$ — произвольное непрерывное продолжение отображения $f$. Рассмотрим отображение $\varphi: G \times X \to V$, определенное формулой $\varphi(g, x) = g^{-1}F(gx)$, $g \in G$, $x \in X$. Оно непрерывно в силу непрерывности отображения $F$ и действий группы $G$ на пространствах $X$ и $Z$.

Отображение $\psi: X \to C(G, V)$ определим формулой

$$\psi(x)(g) = \varphi(g, x), \quad x \in X, \quad g \in G,$$

Оно непрерывно ([5], стр. 95).

Наконец, положим $\bar{f} = \int \circ \psi$, где $\int$ — отображение из леммы 2. Покажем, что $\bar{f}$ — искомое отображение из $X$ в $V$. Во-первых $\bar{f}$ — непрерывно, как композиция двух непрерывных отображений.

Пусть $a \in A$. Тогда для любого $g \in G$

$$\psi(a)(g) = \varphi(g, a) = g^{-1}F(ga) = g^{-1}f(ga) = g^{-1}gf(a) = f(a),$$

т. е. $\psi(a)$ — постоянное отображение группы $G$ в точку $f(a) \in V$. Поэтому, согласно условию $H$) из леммы 2 имеем $\bar{f}(a) = \int \psi(a) = f(a)$, т. е. $\bar{f}$ есть продолжение отображения $f$. Покажем эквивариантность отображения $\bar{f}: X \to V$. Пусть $g$, $h \in G$ и $x \in X$. Тогда

$$\psi(hx)(g) = \varphi(g, hx) = g^{-1}F(ghx) = h(gh)^{-1}F(ghx) =$$
$$= h\varphi(gh, x) = h(\psi(x)(gh)) = (h * \psi(x))(gh),$$

где $h * \psi(x)$ — действие группы $G$ на пространстве $C(G, Z)$ определенное формулой $D$).

Таким образом $\psi(hx) = (h * \psi(x))_h$. Поэтому согласно условиям $F$) и $G$) из леммы 2 имеем

$$\bar{f}(hx) = \int \psi(hx) = \int (h * \psi(x))_h =$$

$$= \int h * \psi(x) = h \int \psi(x) = h\bar{f}(x),$$

чем и доказана эквивариантность отображения $\bar{f}$.

Если либо группа $G$ конечна, либо пространство $Z$ конечномерно, то в лемме 2, а значит и в теореме 1, от полноты множества $V$ можно отказаться. ■

Теорема 2. *Всякое полное выпуклое инвариантное множество $V$ локально выпуклого пространства $Z$, на котором линейно действует компактная группа $G$, является абсолютным экстензором для категории $MG$.*

*Если кроме того пространство $Z$ метрическое, а множество $V$ сепарабельное, то $V$ является абсолютным экстензором даже для категории $NG$ всех нормальных $G$-пространств.*

Доказательство первой части теоремы 2 следует из основной теоремы 1 и из упомянутой во введении теоремы Дугунджи ([3], стр. 86).

Вторая же часть теоремы 2 следует из основной теоремы 1 и из теоремы Майкла [6] о том, что полное сепарабельное выпуклое множество $V$ локально выпуклого метрического пространства $Z$ является абсолютным экстензором для категории $N$ всех нормальных пространств. ■

Условия компактности группы $G$ и полноты множества $V$ в теореме 2, а значит и в теореме 1, существенны. Приведем соответствующие примеры.

Пример 1. Пусть $G = \mathbf{R}$ — аддитивная группа действительных чисел. Пространство $Z = C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ является локально выпуклым топологическим линейным пространством. Более того, оно полно ([8], стр. 96) и метризуемо ([8], стр. 34).

Формулой

$$(gf)(s) = f(g + s), \ g, \ s \in \mathbf{R}, \ f \in Z$$

определяется линейное действие $(g, f) \to gf$ группы $\mathbf{R}$ на пространстве $Z$ [11].

Пусть далее $f_0: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ — тождественное отображение. В качестве множества $V$ возьмем орбиту $\mathbf{R}(f_0) = \{gf_0;\ g \in \mathbf{R}\}$ точки $f_0$ в $Z$. Ясно, что $V$ полно, выпукло и инвариантно в $Z$. Легко заметить, что $V$ не имеет неподвижных относительно действия $gf$ точек, т. е. таких точек $\varphi \in V$, что $g\varphi = \varphi$ для всех $g \in \mathbf{R}$. Поэтому, согласно теореме 7 $V$ не является $AE(M\mathbf{R})$. ■

Пример 2. Пусть $\mathbf{C}$ — пространство комплексных чисел, $S$ — мультипликативная группа всех комплексных чисел по модулю равных единице, $S$ — компактная группа. Пространство $Z = C(S, \mathbf{C})$ является вещественным банаховым пространством.

Как и выше формулой

$$(gf)(s) = f(gs), \ g, \ s \in S, \ f \in Z$$

определяется линейное действие группы $S$ на банаховом пространстве $Z$ [11].

Пусть $f_0(z) = e^z$, $z \in S$, а $V$ — выпуклая оболочка орбиты

$$S(f_0) = \{gf_0;\ g \in S\},$$

$V$ — выпуклое, инвариантное и неполное множество в $Z$. Как и в примере 1, легко показать, что $V$ не содержит неподвижных относительно действия $gf$ точек.

Поэтому согласно теореме 7 $V$ не является $AE(MS)$. ■

## § 4. Ретракты и экстензоры в категории $MG$

Теорема 3. *Пусть группа $G$ компактна, а $Y$ — $G$-пространство, обладающее полной метрикой. Тогда $Y$ является абсолютным (окрестностным) экстензором для $MG$ в точности тогда, когда он является абсолютным (соотв., окрестностным) ретрактом для $MG$.*

Доказательство. Так как $Y$ обладает полной метрикой, то согласно теореме $C$ можно считать, что $Y$ является замкнутым $G$-подмножеством некоторого банахова пространства $Z$, на котором группа $G$ действует линейно.

Пусть $Y$ — абсолютный (окрестностный) ретракт для $MG$. Тогда существует $G$-ретракция $r: Z \to Y$ (соотв. $r: U \to Y$, где $U$ — некоторая инвариантная окрестность множества $Y$ в $Z$). Пусть теперь $f: A \to Y$, $G$ — отображение, где $A$ замкнуто и инвариантно в $X \in MG$.

По теореме 2 существует $G$-продолжение $\bar{f}: X \to Z$ отображения $f$. Взяв $V = \bar{f}^{-1}(U)$ мы получим инвариантную окрестность множества $A$ в $X$ и полагая $f' = r \circ \bar{f}$, получим $G$-продолжение $f': X \to Y$ (соотв. $f': V \to Y$) отображения $f$. Значит $Y$ — абсолютный (соотв., окрестностный) экстензор для $MG$.

Обратное верно всегда и доказывается без труда. ■

Теорема 4. *Пусть группа $G$ компактна, $X = X_1 \cup X_2$ и $X_0 = X_1 \cap X_2$, где $X_1$ и $X_2$ — инвариантные замкнутые множества метризуемого $G$-пространства $X$. Тогда*

1) *если* $X_0, X_1, X_2 \in AR(MG)$, *то* $X \in AR(MG)$;

2) *если* $X_0, X_1, X_2 \in ANR(MG)$, *то* $X \in ANR(MG)$;

3) *если* $X, X_0 \in AR(MG)$, *то* $X_1, X_2 \in AR(MG)$;

4) *если* $X, X_0 \in ANR(MG)$, *то* $X_1, X_2 \in ANR(MG)$.

Доказательство идейно не отличается от доказательства соответствующей теоремы в теории ретрактов ([3], стр. 101), поэтому мы приведем здесь лишь доказательство пункта 2).

Для доказательства пункта 2) достаточно показать, что если $X$ есть замкнутое $G$-подмножество метризуемого $G$-пространства $Y$ и $X_0, X_1, X_2 \in ANR(MG)$, то существует в $Y$ такая $G$-окрестность $U$ множества $X$, что $X$ является ее $G$-ретрактом.

В силу леммы 0 возьмем на $Y$ инвариантную метрику $\rho$ и положим

$$Y_0 = \{y \in Y;\ \rho(y, X_1) = \rho(y, X_2)\},$$

$$Y_1 = \{y \in Y;\ \rho(y, X_1) < \rho(y, X_2)\},$$

$$Y_2 = \{y \in Y;\ \rho(y, X_1) > \rho(y, X_2)\}.$$

В силу инвариантности метрики $\rho$ множества $Y_0$, $Y_1$ и $Y_2$ инвариантны в $Y$ и ясно, что $Y = Y_0 \cup Y_1 \cup Y_2$. Очевидно, что $X_0$ замкнуто и инвариантно в $Y_0$ и $X_i \cap Y_0 = X_0$, $i = 1, 2$.

Следовательно, существуют $G$-окрестность $W_0$ множества $X_0$ в пространстве $Y_0$ и замкнутая в $Y_0$, и $G$-ретракция

$$r_0: W_0 \to X_0.$$

Полагая

$$r_i(y) = \begin{cases} r_0(y), & \text{если } y \in W_0 \\ y, & \text{если } y \in X_i \end{cases}$$

мы получаем $G$-ретракцию $r_i$ замкнутого в $Y_0 \cup Y_i$ $G$-множества $X_i \cup W_0$ на множество $X_i$, $i=1, 2$. Так как $X_i \in ANR(MG)$, то $X_i \in ANE(MG)$ [12], и следовательно, существует непрерывное $G$-продолжение $r_i': V_i \to X_i$ $G$-отображения $r_i$ на некоторую инвариантную окрестность $V_i$ множества $X_i \cup W_0$ в $Y_0 \cup Y_i$.

Ясно, что в $V_i$ найдется такая замкнутая инвариантная окрестность $U_i$ множества $X_i$ в пространстве $Y_0 \cup Y_i$, что $U_i \cap Y_0 \subset W_0$. Поскольку $U_1 \cap U_2 \subset U_1 \cap Y_0 \subset W_0$, то формула $r(y)=r_i'(y)$ для $y \in U_i$, $i=1, 2$ определяет $G$-ретракцию $r$ инвариантной окрестности $U=U_1 \cup U_2$ множества $X$ в пространстве $Y$ на множество $X$. Таким образом, доказательство пункта 2) закончено. ■

$K$). Пусть $KG$ — такая полная подкатегория категории всех нормальных $G$-пространств, что вместе с каждым своим объектом $X$ она содержит и всякое его замкнутое инвариантное подпространство $A$, а также и произведение $X \times I$, где отрезок $I$ рассматривается лишь с тривиальным действием группы $G$, т. е. $gt = t$ для всех $g$ и $t$.

Теорема 5. *Пусть группа $G$ компактна, $Y \in ANE(KG)$, а $h: A \times I \to Y$ — эквивариантная гомотопия между отображениями $f_0, f_1: A \to Y$, а $F: X \to Y$ — эквивариантное продолжение отображения $f_0$. Тогда существует такое эквивариантное продолжение $H: X \times I \to Y$ гомотопии $h$, что $H(x, 0) = F(x)$ для всех $x \in X$.*

Доказательство. Очевидно, что множество $Z = X \times \{0\} \cup A \times I$ замкнуто и инвариантно в $X \times I$, а отображение $f: Z \to Y$, определенное формулами $f(x, 0)=F(x)$ для $x \in X$, $f(x, t)=h(x, t)$ для $x \in A$ и $t \in I$ — эквивариантно и непрерывно.

Так как $Y \in ANE(KG)$ и $X \times I \in KG$, то существует $G$-продолжение $\varphi: V \to Y$ отображения $f$ на некоторую инвариантную окрестность $V$ множества $Z$ в $X \times I$. В силу компактности отрезка $I$, существует такая окрестность $U$ множества $A$ в $X$, что $U \times I \subset V$. Так как группа $G$ компактна, то в силу предложения 1.14 из [7] окрестность $U$ можно взять инвариантной.

Поскольку $X$ — нормальное пространство, то существует такая непрерывная функция $\psi': X \to [0, 1]$, что $\psi'(x) = 0$ для $x \in X \setminus U$ и $\psi'(x)=1$ для $x \in A$. Положим $\psi(x) = \sup \{\psi'(gx);\ g \in G\}$.

Легко проверить, что функция $\psi: X \to [0, 1]$ непрерывна, причем $\psi(x) = 0$ для $x \in X \setminus U$ и $\psi(x) = 1$ для $x \in A$. К тому же $\psi$ инвариантна в том смысле, что $\psi(sx) = \psi(x)$ для любых $x \in X$ и $s \in G$. Действительно

$$\psi(sx) = \sup_{g \in G} \psi'(gsx) = \sup_{\sigma \in G} \psi'(\sigma x) = \psi(x).$$

Полагая $H(x, t) = \varphi(x, \psi(x) \cdot t)$, $x \in X$, $t \in I$ мы получим искомую, $G$-гомотопию.

Действительно, $H$ непрерывно в силу непрерывности $\varphi$ и $\psi$. Коммутирование с действиями следует из эквивариантности отображения $\varphi$ и инвариантности функции $\psi$. Значит $H$ эквивариантно. Остальное — простая проверка. ■

$L$) Пусть категория $G$-пространств $K$ удовлетворяет условию $K$) и вместе с каждым своим объектом $X$ содержит топологическую сумму (дискретное объединение) $X'=X\cup\{*\}$ пространства $X$ и одноточечного пространства $\{*\}$. Следует уточнить, что пространство $X'$ здесь рассматривается с действием $g\circ x'$ группы $G$ на нем, однозначно определенным действием $gx$ группы $G$ на $X$ по формуле

$$g\circ x=gx \text{ и } g\circ *=*,\ g\in G,\ x\in X.$$

Предложение 1. *Всякий абсолютный экстензор категории $KG$ $G$-стягиваем.*

Доказательство. Пусть $X\in KG$. Так как $X'\in KG$, $X$ замкнуто и инвариантно в $X'$ и $X\in AE(KG)$, то существует $G$-ретракция $r: X'\to X$. Положим $x_0=r(*)$. Ясно, что $gx_0=x_0$ для любого $g\in G$.

Пусть $A=X\times\{0\}\cup X\times\{1\}$. Отображение $h: A\to X$ определим формулами

$$h(x,\ 0)=x_0 \text{ и } h(x,\ 1)=x \text{ для всех } x\in X.$$

Ясно, что множество $A$ замкнуто и инвариантно в $X\times I$, а отображение $h$ непрерывно и эквивариантно (ведь $gx_0=x_0$, $\forall g\in G$). Так как $X\in AE(KG)$, то существует $G$-продолжение $H: X\times I\to X$ отображения $h$, которое является $G$-гомотопией между тождественным отображением $i: X\to X$ и постоянным $G$-отображением $h_0: X\to X$, где $h_0(x)=x_0$. Значит $X$ $G$-стягиваемо. ■

Предложение 2. *Пусть группа $G$ компактна, а $KG$—категория $G$-пространств, удовлетворяющая условию $K$). Тогда всякое $G$-стягиваемое $ANE(KG)$ есть $AE(KG)$.*

Доказательство. Пусть $Y$ $G$-стягиваемо и принадлежит $ANE(KG)$. Тогда существует $G$-гомотопия $H: Y\times I\to Y$ такая, что для любого $y\in Y$, $H(y,\ 1)=y$ и $H(y,\ 0)=y_0$, где $y_0$—некоторая точка из $Y$.

Пусть $f: A\to Y$ $G$-отображение, где $A$ замкнуто и инвариантно в $X\in KG$. Так как $Y\in ANE(KG)$, то существует $G$-продолжение $F: O\to Y$ отображения $f$, где $O$ — некоторая открытая инвариантная окрестность множества $A$ в $X$. В силу компактности группы $G$ и нормальности пространства $X$, как и в доказательстве теоремы 4 можно построить такую функцию $\psi: X\to[0,\ 1]$, что $\psi(gx)=\psi(x)$ для $g\in G$, $x\in X$, $\psi(x)=1$ для $x\in A$ и $\psi(x)=0$ для $x\in U$, где $U$ — некоторая открытая инвариантная окрестность множества $A$ в $X$, содержащаяся во множестве $O$.

Отображение $\bar f: X\to Y$ определим формулами $\bar f(x)=H(F(x),\psi(x))$ для $x\in O$ и $\bar f(x)=y_0$ для $x\in X\setminus O$. Легко видеть, что $\bar f$ — искомое продолжение.

Заметим, что категорий $KG$, удовлетворяющих условию $L$), достаточно много: это уже упоминавшиеся категории $MG$, $CG$, а также категория $CMG$ всех компактных метризуемых $G$-пространств и т. п.

Пусть $KG$ — одна из этих категорий. Из предложений 1 и 2 следует

Теорема 6. *Пусть группа $G$ компактна. Тогда $G$-пространство $Y \in KG$ принадлежит $AE(KG)$ в точности тогда, когда оно $G$-стягиваемо и принадлежит $ANE(KG)$.*

Теорема 7. *Пусть группа $G$ локально компактна и $\sigma$-компактна*, а $Y$ является абсолютным (окрестностным) ретрактом категории $MG$. Тогда для любого непустого множества $H$ из группы $G$ множество $Y[H] = \{y \in Y;\ hy = y,\ \forall h \in H\}$ не пусто (соотв. может быть пустым) и является абсолютным (соотв. окрестностным) ретрактом категории $M$ всех метризуемых пространств.*

Доказательство. Так как группа $G$ локально компактна и $\sigma$-компактна, то можно считать [12], что $Y$ — замкнутое инвариантное множество некоторого линейного локально выпуклого метризуемого пространства $Z$, на котором группа $G$ действует линейно. В силу последнего для любого множества $H$ из $G$, множество $Z[H]$ является линейным подпространством пространства $Z$ и следовательно не пусто.

Так как $Y \in AR(MG)$ (соотв. $Y \in ANR(MG)$), то существует $G$-ретракция $r: Z \to Y$ (соотв. $r: U \to Y$, где $U$ — некоторая инвариантная окрестность множества $Y$ в $Z$). Ясно, что $Y[H] \subset Z[H]$ (соотв. $Y[H] \subset U[H] = U \cap Z[H]$). Так как $r$ — $G$-ретракция, то ограничение $r' = r/Z[H]$ (соотв. $r' = r/U[H]$), является ретракцией $r': Z[H] \to Y[H]$ (соотв. $r': U[H] \to Y[H]$) и следовательно $Y[H]$ не пусто (соот. может быть пустым).

Но $Z[H]$ как линейное подпространство локально выпуклого метризуемого пространства $Z$ тоже локально выпукло и метризуемо, а множество $U[H] = U \cap Z[H]$ является инвариантной окрестностью множества $Y[H]$ в $Z[H]$. Следовательно, $Y[H]$ будучи ретрактом (соотв. окрестностным ретрактом) пространства $Z[H]$, является абсолютным (соотв. окрестностным) ретрактом категории $M$ всех метризуемых пространств ([3], стр. 95). ■

В заключение автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Ю. М. Смирнову за постоянное внимание к настоящей работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила 15.VI.1979

Ս. Հ. Անտոնյան. Ռետրակտները $G$-տարածությունների կատեգորիաներում *(ամփոփում)*

*Հոդվածում ապացուցվում են ռետրակտների տեսության հիմնական փաստերը մետրիզացվող $G$-տարածությունների կատեգորիայի համար։*

* Т. е. $G$ является счетным объединением своих компактных подмножеств.

S. A. ANTONIAN. *Retracts in the category of G-spaces* (summary)

In the paper the main results of the retract's theory for the category of all metrizable $G$-spaces are proved.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *С. А. Антонян.* Ретракты в категории $G$-пространств, Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Math., Astr., Phys.. 26, № 3, 1980, 764—780.
2. *C. Bessaga, A. Pelczynski.* Selected topics in infinite-dimensional topolody, Warszawa, 1975.
3. *К. Борсук.* Теория ретрактов, М., «Мир», 1971.
4. *Н. Бурбаки.* Интегрирование. Меры на локально компактных множествах, М., «Мир», 1977.
5. *К. Куратовский.* Топология, т. 2, М., «Мир», 1969.
6. *E. Michael.* Some extension theorems for continuons functions, Pac. J. Math., 3 1953, 789—806.
7. *R. Palais.* The classification of $G$-spaces, Mem. Amer. Math. Soc., 36, 1960.
8. *А. Робертсон, В. Робертсон.* Топологические векторные пространства, М., «Мир». 1967.
9. *У. Рудин.* Функциональный анализ, М., «Мир», 1975.
10. *Ю. М. Смирнов.* Множества $H$-неподвижных точек—абсолютные экстензоры, Мат. сб., 98 (140), 1975, 93—101.
11. *Ю. М. Смирнов.* Об эквивариантных вложениях $G$-пространств, УМН, 5 (191), 1976, 137—147.
12. *Yu. M. Smirnov.* Retracts in the categories of topological transformation groups Proc. Top. in Budapest, 1978.
13. *J. W. Jaworowski.* Equivariant extension of maps, Pac. J. Math., 45, 1, 1973, 229—244.