ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XV, № 5, 1980 Математика

Р. В. АКОПЯН

О РЕГУЛЯРНОСТИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ J-НЕОТРИЦАТЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

В этой работе вводится спектральное разложение J-неотрицательного оператора и изучается регулярность его спектральной функции на бесконечности.

Пусть H—гильбертово пространство, в котором наряду с обычным скалярным произведением (f, g) $(f, g\in H)$ введено индефинитное скалярное произведение

$$[f, g]=(Jf, g), \quad J=P_+ - P_-,$$

где $P_\pm$ — взаимно дополнительные ортопроекторы в H.

Для любого линейного оператора A, действующего в плотной области определения $D(A)$, соответствующий J-сопряженный оператор однозначно определяется при помощи равенства (см. [1])

$$[Af, g]=[f, A^+g], \quad f\in D(A).$$

Оператор A называется *J-самосопряженным*, если $A^+=A$. В дальнейшем под *J-неотрицательным* оператором понимается J-самосопряженный оператор, удовлетворяющий условию

$$[Af, f]\geqslant 0, \quad f\in D(A).$$

1°. Пусть A — J-неотрицательный оператор, имеющий хотя бы одну регулярную точку внутри верхней полуплоскости, тогда, как известно [1], все точки в верхней и нижней полуплоскости входят в резольвентное множество оператора A, кроме того оператор-функция

$$zR_z(A)=z(A-zI)^{-1}$$

является R-функцией, т. е.

$$\operatorname{Im}[zR_z(A)f, f]\geqslant 0$$

для $\operatorname{Im} z>0$ и $f\in H$. Действительно

$$[z(A-zI)^{-1}f, f]-\overline{[z(A-zI)^{-1}f, f]}=[z(A-zI)^{-1}f, f]-$$
$$-[\bar z f, (A-zI)^{-1}f]=[z(A-zI)^{-1}f, f]-[\bar z(A-\bar zI)^{-1}f, f]=$$
$$=[(z-\bar z)(A-zI)^{-1}A(A-\bar zI)^{-1}f, f]=(z-\bar z)[A(A-\bar zI)^{-1}f,$$
$$(A-\bar zI)^{-1}f].$$

Поэтому имеет место представление [2]:

$$zR_z(A)=\alpha+\beta z+\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda-z}-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)dF(\lambda), \tag{1}$$

где α — ограниченный J-самосопряженный оператор, β — ограниченный J-неотрицательный оператор, а $[F(\lambda)f, f]$, $f \in H$ — неубывающая функция, такая что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d[F(\lambda)f, f]}{1+\lambda^2} < \infty.$$

Из представления (1) следует, что если провести простой замкнутый контур $\Gamma(\nu, \mu)$, где $0 < \nu < \mu$ или $\nu < \mu < 0$, пересекающий точки ν, μ под прямым углом, то сингулярный интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\nu, \mu)} R_z(A)\, dz$$

существует.

Положим

$$E(\nu, \mu) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\nu, \mu)}' R_z(A)\, dz,$$

Легко подсчитать, что

$$E(\nu, \mu) = \int_{\nu}^{\mu}{}' \frac{dF(\lambda)}{\lambda}.$$

$E(\nu, \mu)$ будем называть спектральной мерой.

Если существуют пределы

$$s - \lim_{\substack{0<\nu<\mu \\ \mu \to +\infty}} E(\nu, \mu), \quad s - \lim_{\substack{\nu<\mu<0 \\ \nu \to -\infty}} E(\nu, \mu),$$

то спектральная мера $E(\nu, \mu)$ называется *регулярной на бесконечности* (см. [7]).

Очевидно, что для регулярности спектральной меры $E(\nu, \mu)$ на бесконечности, необходимо и достаточно, чтобы сходился интеграл

$$\int_{|\lambda|>1} \frac{d[F(\lambda)f, f]}{|\lambda|}, \; f \in H.$$

Спектральная мера $E(\nu, \mu)$ называется *регулярной в точке нуль*, [7], если существуют пределы

$$s - \lim_{\substack{0<\nu<\mu \\ \nu \to 0}} E(\nu, \mu), \quad s - \lim_{\substack{\nu<\mu<0 \\ \mu \to 0}} E(\nu, \mu).$$

Очевидно, что спектральная мера регулярна в точке нуль тогда и только тогда, когда сходится интеграл

$$\int_{0<|\lambda|<1} \frac{d[F(\lambda)f, f]}{|\lambda|}, \; f \in H.$$

Спектральная мера $E(\nu, \mu)$ называется регулярной, если она одновременно регулярна и в точке нуль и на бесконечности.

Введем на $D(A)$ новое скалярное произведение

$$(f, g)_1 = [Af, g]^*.$$

Легко убедиться, что в этом скалярном произведении оператор A является обычным самосопряженным оператором, и поэтому на $D(A)$ имеем представление

$$A(A - zI)^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF(\lambda)}{\lambda - z}.$$

Отсюда на $D(A)$ имеем

$$z(A - zI)^{-1} = -I + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF(\lambda)}{\lambda - z}. \tag{2}$$

Предположим, что спектральная мера регулярна на бесконечности. Тогда операторы

$$\alpha - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda dF(\lambda)}{1 + \lambda^2} \quad \text{и} \quad \beta$$

являются ограниченными операторами и сравнивая представление (1) и (2), получаем

$$\beta = O, \ \alpha - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda dF(\lambda)}{1 + \lambda^2} = -I.$$

Итак, в случае регулярности спектральной меры на бесконечности для резольвенты оператора A имеем представление

$$(A - zI)^{-1} = -\frac{I}{z} + \frac{1}{z} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF(\lambda)}{\lambda - z}. \tag{3}$$

Отметим, что в работах [3], [4] условия регулярности на бесконечности по ошибке пропущены.

Пусть спектральная мера оператора A регулярна на бесконечности. Определим функцию $E_1(\lambda)$, $\lambda \neq 0$ следующим образом:

$$E_1(\lambda) = s - \lim_{\mu \to -\infty} E(\mu, \lambda).$$

Легко подсчитать, что

$$E_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} \frac{dF(t)}{t} \quad \text{при} \quad \lambda < 0 \tag{4}$$

---

* Если Ker A содержит ненулевые элементы, надо рассматривать фактор пространство по Ker A.

и

$$E_1(\lambda)=I-\int_{\lambda}^{\infty}\frac{dF(t)}{t}\quad \text{при}\quad \lambda>0. \tag{5}$$

Положим

$$E(\lambda)=E_1(\lambda-0).$$

Как и в работе [5] устанавливается, что $E(\lambda)$ обладает следующими свойствами:

1. $E(\lambda)$ — J — ортогональный проектор, при $\lambda\neq 0$,
2. $E(\lambda)\cdot E(\mu)=E(\min(\lambda,\mu))$, $\lambda\neq 0$, $\mu\neq 0$,
3. $E(\lambda-0)=E(\lambda)$, $\lambda\neq 0$,
4. $s-\lim\limits_{\lambda\to-\infty}E(\lambda)=0$, $s-\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)=I$.

Пусть $E(\Delta)=E(\beta)-E(\alpha)$, где $\Delta=(\alpha,\beta)$, $\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$, тогда интегрируя (2) вдоль замкнутого контура, проходящего через точки α и β, получим

$$AE(\Delta)=F(\beta)-F(\alpha). \tag{6}$$

Заметим, что для $f\in D(A)$ существует $s-\lim\limits_{\lambda\to+\infty}F(\lambda)f=F(+\infty)f$, а функцию $F(\lambda)$ можно нормировать так, что

$$s-\lim_{\lambda\to+\infty}F(\lambda)=0.$$

Таким образом, из (6) следует, что для $f\in D(A)$

$$Af=F(+\infty)f. \tag{7}$$

Из (4) и (5) для $f\in D(A)$ имеем

$$F(-0)f=\int_{-\infty}^{0}\lambda dE(\lambda)f, \tag{8}$$

$$F(+\infty)f-F(+0)f=\int_{0}^{\infty}\lambda dE(\lambda)f. \tag{9}$$

Складывая (8) и (9) и учитывая (7), получим спектральное разложение оператора A

$$Af=Sf+\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dE(\lambda)f,\ f\in D(A), \tag{10}$$

где

$$S=F(+0)-F(-0).$$

Аналогично работе [5] доказывается, что

1. S — J-неотрицательный ограниченный оператор,
2. $S^2=O$,
3. $SE(\Delta)=E(\Delta)S=O$, $(0\overline{\in}\Delta)$,
4. $ASf=SAf=0$, для $f\in D(A)$.

2°. Имеет место следующая

Теорема 1. *Для того чтобы спектральная мера J-неотрицательного оператора A была регулярной на бесконечности необходимо и достаточно, чтобы сходился интеграл*

$$\int_1^\infty \operatorname{Re}\,[R_{iy}(A)f, f]\,dy, \quad \text{при} \quad f \in H. \tag{11}$$

Доказательство. Из (1) имеем

$$[iy\,R_{iy}(A)f, f] = [\alpha f, f] + iy\,[\beta f, f] + \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda - iy} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right) d\,[F(\lambda)f, f],$$

откуда

$$[R_{iy}(A)f, f] = -\frac{i\,[\alpha f, f]}{y} + [\beta f, f] + \frac{1}{iy}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\lambda + iy}{\lambda^2 + y^2} - \frac{\lambda}{1+y^2}\right) d\,[F(\lambda)f, f],$$

поэтому

$$\operatorname{Re}\,[R_{iy}(A)f, f] = [\beta f, f] + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda^2 + y^2}, \tag{12}$$

где

$$\sigma(\lambda) = [F(\lambda)f, f].$$

Из неотрицательности слагаемых в (12) следует, что интеграл в (11) сходится тогда и только тогда, когда $\beta = O$ и сходится интеграл

$$\int_1^\infty dy \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda^2 + y^2}. \tag{13}$$

Очевидно, что интеграл в (13) сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\sigma(\lambda) \int_1^\infty \frac{dy}{\lambda^2 + y^2}. \tag{14}$$

Легко убедиться, что функция

$$\int_1^\infty \frac{dy}{\lambda^2 + y^2} = \frac{1}{|\lambda|}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{|\lambda|}\right)$$

на сегменте $|\lambda| \leqslant 1$ ограничена, а при $|\lambda| > 1$

$$\frac{\pi}{4|\lambda|} \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{|\lambda|}\right) \leqslant \frac{\pi}{2|\lambda|}.$$

Поэтому интеграл в (14) сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл

$$\int\limits_{|\lambda|>1} \frac{d\sigma(\lambda)}{|\lambda|}.$$

Отметим, что техника, используемая при доказательстве этой теоремы незначительно отличается от доказательства известного признака И. С. Каца принадлежности функций классу R_1 [6].

Теорема 2. *Для того чтобы спектральная мера J-неотрицательного оператора A была регулярной в точке нуль необходимо и достаточно, чтобы при любом $f \in H$ сходился интеграл**

$$\int\limits_0^1 \mathrm{Re}\,[R_{iy}(A)f, f]\,dy. \tag{15}$$

Доказательство. Из (12) имеем

$$\mathrm{Re}\,[R_{iy}(A)f, f] = [\beta f, f] + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda^2+y^2},$$

и, следовательно, интеграл (15) сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda^2+y^2} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\sigma(\lambda) \int\limits_0^1 \frac{dy}{\lambda^2+y^2}. \tag{16}$$

Функция

$$\int\limits_0^1 \frac{dy}{\lambda^2+y^2} = \frac{1}{|\lambda|}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{|\lambda|}$$

при $|\lambda| \geqslant 1$ удовлетворяет оценке

$$\frac{1}{|\lambda|}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{|\lambda|} \leqslant \frac{1}{\lambda^2},$$

а при $0<|\lambda|<1$

$$\frac{\pi}{4|\lambda|} \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{|\lambda|} < \frac{\pi}{2|\lambda|}.$$

Поэтому интеграл в (16) сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл

$$\int\limits_{0<|\lambda|<1} \frac{d\sigma(\lambda)}{|\lambda|}.$$

---

*При $S \neq 0$ интеграл $\int\limits_0^1 \mathrm{Re}\,[R_{iy}(A)f, f]\,dy$ должен сходится на всех f, для которых $Sf = 0$.

Объединяя теоремы 1 и 2, сформулируем теорему.

Теорема 3. *Для того чтобы спектральная мера J-неотрицательного оператора A была регулярной необходимо и достаточно, чтобы при любом $f \in H$ сходился интеграл*

$$\int_0^\infty \mathrm{Re}\,[R_{iy}(A)\,f, f]\,dy.$$

В работе [7] было доказано, что регулярность в нуле спектральной меры может нарушаться уже при одномерных возмущениях. Здесь будет доказано, что регулярность на бесконечности сохраняется при любых ограниченных возмущениях.

Если спектральная мера J-неотрицательного оператора A регулярна на бесконечности, то из (3) при $y > 1$ следует, что

$$\|R_{iy}(A)\| \leqslant \frac{M}{y}. \tag{17}$$

Поэтому, если $\tilde{A} = A + K$, где K — ограниченный J-неотрицательный оператор, то

$$\|R_{iy}(\tilde{A})\| \leqslant \frac{M_1}{y}, \text{ при } \quad y > a > 0. \tag{18}$$

Действительно

$$(\tilde{A} - iy)^{-1} = (A + K - iy)^{-1} = (A - iy)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} [(A - iy)^{-1} K]^n,$$

при $M\|K\| < y$.

Таким образом, при $y > 2M\|K\| = a$ имеем

$$\|(\tilde{A} - iy)^{-1}\| \leqslant \frac{M}{y} \cdot \frac{1}{1 - \frac{M\|K\|}{y}} \leqslant \frac{2M}{y}.$$

Теорема 4. *Пусть A — J-неотрицательный оператор, спектральная мера которого регулярна на бесконечности, K — любой J-неотрицательный ограниченный оператор и $\tilde{A} = A + K$. Тогда спектральная мера оператора $\tilde{A}$ также регулярна на бесконечности.*

Доказательство. Имеем

$$(\tilde{A} - iy)^{-1} = (A - iy)^{-1} - (\tilde{A} - iy)^{-1} K (A - iy)^{-1}.$$

Для второго слагаемого, используя (17), (18) при $y > b > 0$, получим:

$$\|(\tilde{A} - iy)^{-1} K (A - iy)^{-1}\| \leqslant \frac{M_2}{y^2}.$$

Следовательно, для любого $f \in H$

$$\int_1^{\infty} \mathrm{Re}\,[R_{ly}(\tilde{A})\,f,\,f]\,dy$$

сходится.

В заключение выражаю благодарность М. Г. Крейну за обсуждение результатов этой работы.

Ереванский государственный университет

Поступила 10.XI.1979

Ռ. Վ. ՀԱԿՈԲՅԱՆ. *J-ոչ բացասական օպերատորի սպեկտրալ ֆունկցիայի ռեգուլյարությունը անվերջությունում (ամփոփում)*

Աշխատանքում ստացվում է J-ոչ բացասական օպերատորի սպեկտրալ վերլուծությունը և ուսումնասիրվում է նրա սպեկտրալ ֆունկցիայի ռեգուլյարությունը։

Ապացուցվում է, որ սպեկտրալ ֆունկցիայի ռեգուլյարությունը անվերջությունում կայուն է ցանկացած սահմանափակ գրգռումների նկատմամբ։

R. V. HAKOPIAN. *On the regularity of spectral function of J—nonnegative operator in the infinity* (summary)

The spectral resolution of J—nonnegative operator is obtained and the regularity of its spectral function is studied.

It is proved that fhe regularity of spectral function in the infinity is stable with respect to all bounded perturbation.

ЛИТЕРАТУРА

1. *H. Langer.* Spektraltheorie J-Selbstadjugierter Operatoren und einige Anwendungen auf die Schar $\lambda^2 I + \lambda B + C$, Habiltationsschrift Technische Universität, Dresden, 1965.
2. *Н. И. Ахиезер и И. М. Глазман.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, М., 1966.
3. *Р. В. Акопян.* О формуле следов в теории возмущений для J-неотрицательных операторов, ДАН Арм. ССР, 57, № 4, 1973, 193—199.
4. *Р. В. Акопян.* К теории возмущений J-положительного оператора, Функ. анализ и его прилож., 9, № 2, 1975, 61—62.
5. *М. Г. Крейн, Ю. Л. Шмулян.* J-полярные представления плюс-операторов, Мат. исслед., 1—1, 1966, 172—210.
6. *Ф. Аткинсон.* Дискретные и непрерывные граничные задачи, М., 1968.
7. *Р. В. Акопян.* К теории спектральной функции J-неотрицательного оператора, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем, 13, № 2, 1978, 114—121.