ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XV, № 5, 1980 Математика

Э. А. МИРЗАХАНЯН

О СВОЙСТВАХ ОДНОГО КЛАССА ОТОБРАЖЕНИЙ ПОДМНОЖЕСТВ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА

В этой статье проводится дальнейшее изучение введенного В. Г. Болтянским класса K_0 непрерывных отображений $f: M \to H$ подмножеств вещественного сепарабельного гильбертова пространства H. Определение и доказательства основных свойств класса K_0 содержатся в [1].

Приведем определение этого класса. Пусть G — открытое подмножество пространства H и $f: G \to H$ — непрерывное отображение. Будем говорить, что отображение f принадлежит классу K_0, если оно обладает следующим свойством: для любой точки $x_0 \in G$ и любого числа $\varepsilon > 0$ существуют такое конечномерное подпространство $L \subset H$, такая окрестность $U \subset G$ точки x_0 в H и такие действительные числа λ и $\delta > 0$ $(0 < \delta < \pi/2)$, что если $x, y \in U$ и угол между вектором $x-y$ и подпространством L не меньше $\pi/_2$, то выполнено соотношение

$$\|f(x) - f(y) - \lambda(x - y)\| \leqslant \varepsilon \|x - y\|.$$

Пусть теперь M — произвольное бесконечномерное подмножество пространства H. Мы будем говорить, что непрерывное отображение $f: M \to H$ принадлежит классу K_0, если существует открытое в H множество $G \supset M$ и непрерывное отображение $g: G \to H$, которое принадлежит классу K_0 и совпадает на M с отображением f. Фигурирующее в приведенном выше определении действительное число можно выбрать так, чтобы оно определялось только точкой x_0 и было пригодно для любого числа $\varepsilon > 0$. В этом случае число λ однозначно определяется точкой $x_0 \in G$. Получающаяся таким образом действительная функция $\lambda(x) = \lambda_f(x)$, заданная на G, непрерывна; она называется терминальной производной отображения f. Одним из важных свойств отображений $f: M \to H$, принадлежащих классу K_0, является локальное выполнение условия Липшица: для всякой точки $x_0 \in M$ существуют такие числа $r > 0$ и $c > 0$, что при $x, y \in M$, $\|x - x_0\| < r$, $\|y - x_0\| < r$ выполнено соотношение $\|f(x) - f(y)\| \leqslant c\|x - y\|$.

Лемма. *Пусть G — открытое подмножество пространства H, а $f: G \to H$ — отображение, принадлежащее классу K_0. Если точка $x_0 \in G$ обладает такой окрестностью $U_0 \subset G$, что $f(U_0) \subset X$, где множество X конечномерно или локально компактно, то терминальная производная $\lambda_f(x)$ отображения f в точке x_0 равна нулю.*

Доказательство. Предположим, что $\lambda_f(x_0)\neq 0$, и выберем $\varepsilon>0$ так, чтобы выполнялось соотношение $\varepsilon<|\lambda_f(x_0)|$. Так как f принадлежит классу K_0, то существуют такое конечномерное подпространтсво $L\subset H$ и такая окрестность $U\subset G$ точки x_0, что если $x, y\in U$, $x-y\perp L$, то выполняется соотношение

$$\|f(x)-f(y)-\lambda_f(x_0)(x-y)\|\leqslant\varepsilon\|x-y\|.$$

Из этого соотношения вытекает, что

$$\|f(x)-f(y)\|=\|f(x)-f(y)-\lambda_f(x_0)(x-y)+\lambda_f(x_0)(x-y)\|\leqslant\|f(x)-f(y)-$$
$$-\lambda_f(x_0)(x-y)\|+\|\lambda_f(x_0)(x-y)\|\leqslant\varepsilon\|x-y\|+|\lambda_f(x_0)|\,\|(x-y)\|=$$
$$=(\varepsilon+|\lambda_f(x_0|)\|x-y\|.$$

С другой стороны

$$\|\lambda_f(x_0)(x-y)\|=\|f(x)-f(y)-(f(x)-f(y)-\lambda_f(x_0)(x-y))\|\leqslant$$
$$\leqslant\|f(x)-f(y)\|+\|f(x)-f(y)-\lambda_f(x_0)(x-y)\|\leqslant\|f(x)-$$
$$-f(y)\|+\varepsilon\|x-y\|,$$

и потому

$$\|f(x)-f(y)\|\geqslant|\lambda_f(x_0)|\,\|(x-y)\|-\varepsilon\|x-y\|=(|\lambda_f(x_0)|-\varepsilon)\|x-y\|.$$

Итак, при $x, y\in U$, $x-y\perp L$ справедливы неравенства

$$(|\lambda_f(x_0)|-\varepsilon)\|x-y\|\leqslant\|f(x)-f(y)\|\leqslant(|\lambda_f(x_0)|+\varepsilon)\|x-y\|. \qquad (*)$$

Положим $V=U_0\cap U$, тогда V является окрестностью точки x_0 в H и $f(V)\subset X$, причем если $x, y\in V$, $x-y\perp L$, то выполнены неравенства ($*$). Таким образом, если через H^* обозначать плоскость, проходящую через точку x_0 и параллельную ортогональному дополнению подпространства L, то отображение f будет отображать множество $W=V\cap H^*$ гомеморфно на некоторое подмножество множества X.

В частности, если B—шар в плоскости H^*, имеюший центр x_0 и такой радиус r, что $B\subset W$, то f гомеоморфно отображает шар B на подмножество $f(B)\subset X$. Иными словами, множество X содержит подмножество, гомеморфное шару конечного дефекта, что однако невозможно, если множество X конечномерно или если оно локально компактно. Полученное противоречие показывает, что $\lambda_f(x_0)=0$. Итак лемма полностью доказана.

Из доказанной леммы непосредственно следует, что если G — открытое подмножество пространства H, $f\colon G\to X$—отображение класса K_0 и множество X конечномерно или локально компактно, то терминальная производная $\lambda_f(x)$ отображения f тождественно равна нулю на множестве G.

Следствие 1. *Если G открыто в H и отображение $f\colon G\to H$, принадлежащее классу K_0, является вполне непрерывным или локально конечномерным, то терминальная производная $\lambda_f(x)$ отображения f тождественно равна нулю на G.*

В самом деле, если отображение f вполне непрерывно, то для каждой точки $x_0 \in G$ существует такая шаровая окрестность $U \subset G$, что $f(U)$ содержится в компактном множестве, если же f—локально конечномерно, то для каждой точки $x_0 \in G$ существует такая окрестность $U \subset G$, что $f(U)$ конечномерно.

Следствие 2. *Пусть $f: M \to H$ — отображение, принадлежащее классу K_0, а $x_0 \in M$ — точка, обладающая такой окрестностью $U_0 \subset M$, относительно H, что $f(U_0) \subset X$, где множество X конечномерно или локально компактно. Тогда терминальная производная $\lambda_f(x)$ равна нулю в x_0.*

В самом деле, пусть $g: G \to H$ — отображение, принадлежащее классу K_0 и являющееся продолжением отображения f на открытое в H множество G. Поскольку $g(U_0) \subset X$, то, согласно доказанной лемме, $\lambda_g(x_0) = 0$ и потому $\lambda_f(x_0) = \lambda_g(x_0) = 0$.

Замечание. Утверждение доказанной леммы остается справедливым, если открытое в H множество G заменить открытым подмножеством подпространства $H' \subset H$, имеющего конечный дефект. Аналогичным образом, утверждение следствия 2 остается справедливым, если считать M множеством, лежащим в подпространстве H' конечного дефекта, а окрестность $U_0 \subset M$ точки x_0 рассматривать относительно H'.

Предложение 1. *Пусть $p: H \to M$ — ортогональный проектор пространства H на его замкнутое подпространство M. Отображение p принадлежит классу K_0 тогда и только тогда, когда подпространство M конечномерно или является подпространством конечного дефекта.*

Доказательство. Предположим, что M — конечномерное подпространство; из соотношения $\|p(x) - p(y)\| \leqslant \|x - y\|$ следует, что отображение p удовлетворяет условию Липшица на H, поэтому для доказательства принадлежности отображения p к классу K_0 достаточно, согласно [1], показать, что для любой точки $x_0 \in H$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют такое конечномерное подпространство $L \subset H$, такая окрестность $U \subset H$ точки x_0 и такое число λ, что если $x, y \in U$ и $x - y \perp L$, то выполнено соотношение $\|p(x) - p(y) - \lambda(x - y)\| \leqslant \varepsilon \|x - y\|$. Ясно, что если за U возьмем произвольную окрестность точки x_0 в H и положим $L = M$, $\lambda = 0$, то при $x, y \in U$, $x - y \perp L$ будем иметь $\|p(x) - p(y) - \lambda(x - y)\| = \|p(x - y)\| = \|0\| \leqslant \varepsilon \|x - y\|$. Таким образом, если M — конечномерное подпространство, то отображение p принадлежит классу K_0 (причем, согласно лемме, производная $\lambda_p(x)$ тождественно равна нулю на H.

Предположим теперь, что M является подпространством конечного дефекта. Как и в предыдущем случае заключаем, что отображение p удовлетворяет условию Липшица на H. Пусть $x_0 \in H$, а $\varepsilon > 0$ произвольное; пусть, далее, U — произвольная окрестность точки x_0

в H; обозначим через L ортогональное дополнение подпространства M в H и положим $\lambda = 1$. Тогда, если $x, y \in U$, $x - y \perp L$, будем иметь $\|p(x) - p(y) - \lambda(x-y)\| = \|(x-y) - (x-y)\| = \|0\| \leqslant \varepsilon \|x-y\|$. Итак, отображение p принадлежит классу K_0 и его терминальная производная $\lambda_p(x)$ тождественно равна 1 на H.

Пусть, наконец, M является бесконечномерным подпространством бесконечного дефекта и пусть N его ортогональное дополнение в H, а $q: H \to N$ — ортогональное проектирование на N. Предположим, что $p \in K_0$. Возьмем произвольную точку $x_0 \in H$ и положим $\varepsilon = \frac{1}{3}$. Тогда существует такое конечномерное подпространство $L \subset H$ и такая окрестность U точки x_0 в H, что если $x, y \in U$ и $x - y \perp L$, то

$$\|p(x) - p(y) - \lambda(x_0)(x-y)\| < \varepsilon \|x-y\|. \qquad (^{**})$$

Положим теперь $L_1 = p(L)$, $L_2 = q(L)$. Легко видеть, что если вектор e ортогонален каждому из подпространств L_1, L_2, то он ортогонален и подпространству L. В самом деле, если вектор f принадлежит L, то $f = p(f) + q(f)$; при этом $e \perp p(f)$ (поскольку $p(f) \in L_1$, а $e \perp L_1$), т. е. $e \cdot p(f) = 0$ и, точно так же, $e \cdot q(f) = 0$; следовательно, $e \cdot f = 0$, т. е. вектор e ортогонален каждому вектору $f \in L$ и потому $e \perp L$.

Пусть теперь $e_1 \neq 0$ — вектор, принадлежащий подпространству M и ортогональный подпространству L_1 (такой вектор существует, поскольку подпространство M бесконечномерно, а L_1 конечномерно). Пусть, аналогично, $e_2 \neq 0$ — вектор, принадлежащий подпространству M и ортогональный подпространству L_2. Так как $e_1 \in M$, то $e_1 \perp N$ и, в частности, $e_1 \perp L_2$ (поскольку $L_2 \subset N$). Следовательно, вектор e_1 ортогонален каждому из подпространств L_1, L_2 и потому $e_1 \perp L$. Точно так же $e_2 \perp L$. Мы можем при этом предполагать длины векторов e_1, e_2 настолько малыми, что точка $x' = x_0 + e_1$, $x'' = x_0 + e_2$ принадлежат окрестности U. Ясно, что $p(x') - p(x_0) = p(x_0 + e_1) - p(x_0) = p(x_0) + e_1 - p(x_0) = e_1$; $p(x'') - p(x_0) = p(x_0 + e_2) - p(x_0) = p_0(x_0) - p(x_0) = 0$.

Применяя соотношение $(^{**})$ к точкам $x = x'$, $y = x_0$, получаем

$$\|p(x') - p(x_0) - \lambda(x_0)(x' - x_0)\| \leqslant \varepsilon \|x' - x_0\|,$$

т. е. $\|e_1 - \lambda(x_0) e_1\| \leqslant \varepsilon \|e_1\|$, и потому $|1 - \lambda(x_0)| \leqslant \frac{1}{3}$ $\left(\text{поскольку } \varepsilon = \frac{1}{3}\right)$.

С другой стороны, применяя соотношение $(^{**})$ к точкам $x = x''$, $y = x_0$, получаем

$$\|p(x'') - p(x_0) - \lambda(x_0)(x'' - x_0)\| \leqslant \varepsilon \|x'' - x_0\|,$$

т. е. $\|\lambda(x_0) e_2\| \leqslant \varepsilon \|e_2\|$, и потому $|\lambda(x_0)| \leqslant \frac{1}{3}$.

Теперь получаем

$$1=|(1-\lambda(x_0))+\lambda(x_0)|\leqslant|1-\lambda(x_0)|+|\lambda(x_0)|\leqslant\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3},$$

что противоречиво. Полученное противоречие показывает, что отображение p в рассмотренном случае не может принадлежать классу K_0.

Предложение 2. *Два замкнутых шара B_1 и B_2 одного и того же конечного дефекта q гильбертова пространства H гомеоморфны между собой в классе K_0.*

Доказательство. Обозначим через H_i несущую плоскость шара B_i, а через O_i — его центр, $i=1, 2$. Рассмотрим параллельный перенос $\varphi: H\to H$ на вектор $a=O_2-O_1$ и положим $H_1^*=\varphi(H_1)$ и $B_1^*=\varphi(B_1)$. Тогда B_1^* есть шар с центром O_2, имеющий H_1^* своей несущей плоскостью. Пусть $H_3=H_1^*\cap H_2$; ясно, что подпространство H_3 имеет в каждом из подпространств H_1^*, H_2 один и тот же конечный дефект $s\geqslant 0$, и потому в H оно имеет дефект $q+s$. При $s=0$ плоскости H_1^* и H_2 совпадают, а шары B_1^* и B_2 являются концентричными с общим центром O_2. Рассмотрим гомотетию ψ в плоскости H_2 с центром в точке O_2 и коэффициентом $\lambda=\frac{r_2}{r_1}$, где r_1 и r_2 — радиусы шаров B_1 и B_2 соответственно. Отображения φ и ψ принадлежат классу K_0 и отображение $f=\psi\circ\varphi$ является искомым: оно принадлежит классу K_0 и гомеоморфно отображает шар B_1 на B_2.

Пусть теперь $s>0$. Тогда H_3 является собственным подпространством пространств H_1^* и H_2. Выберем произвольный ортонормированный базис $\{a_1, a_2,\cdots, a_n,\cdots\}$ пространства H_3 и дополним его до ортонормированного базиса $\{b_1, b_2,\cdots, b_s, a_1, a_2,\cdots\}$ пространства H_1^* и до ортонормированного базиса $\{b_1', b_2',\cdots, b_s', a_1, a_2,\cdots, a_n,\cdots\}$ подпространства H_2. Далее, базис $\{b_1, b_2,\cdots, b_s, a_1, a_2,\cdots\}$ пространства H дополним до ортонормированного базиса $\{c_1,\cdots, c_q, b_1,\cdots, b_s, a_1, a_2,\cdots\}$ всего пространства H, а базис $\{b_1',\cdots,b_s', a_1,\cdots\}$ пространства H_2 дополним до ортонормированного базиса $\{c_1',\cdots, c_q', b_1',\cdots, b_s', a_1,\cdots\}$ всего пространства H. Пусть $g: H\to H$ — линейное отображение, определяемое соотношениями

$$\left|\begin{array}{l} g(c_i)=c_i',\ i=1, 2,\cdots, q\\ g(b_j)=b_j',\ j=1, 2,\cdots, s\\ g(a_k)=a_k,\ k=1, 2,\cdots. \end{array}\right.$$

Отображение g принадлежит классу K_0 и отображение $f=\psi\circ g\circ\varphi$ является искомым (т. е. оно гомеоморфно отображает шар B_1 на B_2), чем и завершается доказательство.

Из доказанного предложения непосредственно следует, что два открытых шара, (а также две сферы), имеющих один и тот же конечный дефект в H, гомеоморфны друг другу в классе K_0.

Ниже приводятся два утверждения о принадлежности композиции двух отображений к классу K_0.

Предложение 3. *Пусть G и G' — открытые подмножества пространства H, $f: G \to G'$ — отображение, принадлежащее классу K_0, терминальная производная $\lambda_f(x)$ которого всюду на G равна нулю, а $g: G' \to H$ — отображение, локально удовлетворяющее на G' условию Липшица. Тогда композиция $h = g \circ f: G \to H$ принадлежит классу K_0 и терминальная производная $\lambda_h(x)$ всюду на G равна нулю.*

Доказательство. Пусть выбраны произвольная точка x_0 множества G и произвольное положительное число ε. По предположению существуют такая окрестность $V \subset G'$ точки $y_0 = f(x_0)$ и такое число $c > 0$, что для любых точек y_1, y_2 из V имеет место соотношение

$$\|g(y_1) - g(y_2)\| \leqslant c\|y_1 - y_2\|.$$

В силу непрерывности отображения f существует такая окрестность $U_0 \subset G$ точки x_0, что $f(U_0) \subset V$. Поскольку $f \in K_0$, то существуют такая окрестность $U \subset G$ точки x_0, такое конечномерное подпространство $L \subset H$ и такое число $\delta > 0 \left(\delta < \frac{\pi}{2}\right)$, что если x, $y \in U$ и угол между вектором $x - y$ и подпространством L не меньше $\frac{\pi}{2} - \delta$, то

$$\|f(x) - f(y) - \lambda_f(x_0)(x - y)\| = \|f(x) - f(y)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{c}\|x - y\|.$$

Положим $W = U \cap U_0$ и пусть x, $y \in W$ — такие точки, что угол между вектором $x - y$ и подпространством L не меньше $\frac{\pi}{2} - \delta$. Тогда будем иметь

$$\|h(x) - h(y) - 0\cdot(x - y)\| = \|g(f(x)) - g(f(y))\| \leqslant$$

$$\leqslant c\|f(x) - f(y)\| \leqslant c\cdot\frac{\varepsilon}{c}\|x - y\| = \varepsilon\|x - y\|.$$

Итак, отображение h принадлежит классу K_0 и терминальная производная $\lambda_h(x)$ всюду на G равна нулю.

Следствие 3. *Если f — линейный вполне непрерывный оператор, а g — линейный ограниченный оператор, то композиция $h = g \circ f$ принадлежит классу K_0 и $\lambda_h(x) \equiv 0$ на H.*

В самом деле, $f \in K_0$ и $\lambda_f(x) \equiv 0$ на G, а оператор g удовлетворяет условию Липшица на H.

Замечание. В предложении 3 условие $\lambda_f(x) \equiv 0$ на G существенно, т. е. из того, что отображение $f: G \to G'$ (где G, G' — открытые в H множества) принадлежит классу K_0, а $g: G' \to H$ локально удовлетворяет условию Липшица, вообще говоря (без наложения требования $\lambda_f(x) \equiv 0$), не вытекает, что $g \circ f \in K_0$. В самом деле, пусть f — тождественное отображение пространства H (так что $f \in K_0$ и $\lambda_f(x) \equiv 1$, т. е. условие $\lambda_f(x) \equiv 0$ не выполнено). Далее, пусть $g: H \to H$ — ортогональное проектирование на некоторое бесконечномерное замкнутое подпространство M, имеющее бесконечный дефект в H (так что g удовлетворяет условию Липшица). Тогда отображение $h = g \circ f = g$ не принадлежит классу K_0 (см. предлож. 1).

Автору неизвестно, будет ли композиция $f \circ g$ отображений $g: G \to G'$ и $f: G' \to H$ принадлежать классу K_0, если (как и в предложении 3) f принадлежит классу K_0 и $\lambda_f(x) \equiv 0$, а отображение g локально удовлетворяет условию Липшица. Однако при наложении на g некоторых дополнительных условий включение $f \circ g \in K_0$ может быть доказано. В частности, нетрудно доказать, что справедливо следующее утверждение: если $f: G' \to H$ принадлежит классу K_0 и $\lambda_f(x) \equiv 0$, а отображение $g: G \to G'$ является ортогональным преобразованием, то отображение $f \circ g$ принадлежит классу K_0 и его терминальная производная тождественно равна нулю.

Автор выражает признательность В. Г. Болтянскому за сделанные им полезные замечания.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 6.VII.1979

Է. Ա. ՄԻՐԶԱԽԱՆՅԱՆ. Հիլբերտյան տարածության ենթաբազմությունների արտապատկերումների մի դասի հատկությունների մասին (*ամփոփում*)

Հոդվածում տրվում է իրական սեպարաբել H *հիլբերտյան տարածության ենթաբազմությունների անընդհատ արտապատկերումների Վ. Գ. Բոլտյանսկու կողմից մտցված* K_0 *դասի հետագա հետազոտումը։*

K_0 *դասի սահմանումը և մի շարք հիմնական հատկությունների ապացույցը պարունակվում են (1)-ում։*

Ներկա հոդվածում բերվում են այդ դասի մի քանի նոր հատկություններ։ Մասնավորապես, ապացուցվում է, որ H *տարածության մի* M *փակ ենթաբազմության վրա օրթոգոնալ պրոեկտման օպերատորը պատկանում է* K_0 *դասին այն և միայն այն դեպքում, երբ* M*-ը վերջավոր չափանի է կամ ունի վերջավոր դեֆեկտ* H *տարածությունում։*

E. A. MIRZAKHANIAN. *On some properties of a class of mappings of subsets of a Hilbert space* (summary)

The paper deals with the class K_0, introduced by V. G. Boltyanski, of continuous mappings of subsets of a real separable Hilbert space H. The definition of the class K_0 and its main properties can be found in (1). In the present paper some other properties of this class are presented. Particularly, it is proved that an operator which carries out an orthogonal projection of the space H on its closed subspace M belongs to K_0 if and only if M is finite-dimensional or the defect of M in H is finite.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. Г. Болтянский*. Об одном классе отображений подмножеств гильбертова пространства, Изв. АН Арм. ССР, сер. Математика, IX, № 2, 1974, 107—120.
2. *Н. Бурбаки*. Топологические векторные пространства, ИИЛ, М., 1959.