

1993

Э. П. МЕЛИКСЕТЯН

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ В ОБЛАСТИ $|z| > 1$

В в е д е н и е

В настоящей работе рассматривается следующая граничная задача:

Найти в области $|D^+ : |z| > 1|$ дважды непрерывно дифференцируемое решение эллиптической системы

$$AU_{xx} + BU_{xy} + CU_{yy} = 0, \quad (1)$$

удовлетворяющее граничному условию

$$U(x, y)|_{\Gamma} = f(x, y), \quad \{\Gamma : |z| = 1\}, \quad (2)$$

где A, B и C — постоянные, вещественные квадратные матрицы n -го порядка, $f(z) = [f_1(z), \dots, f_n(z)]$, заданная на Γ , вещественная вектор-функция, $U(z) = \{U_1(z), \dots, U_n(z)\}$ — искомое, ограниченное в окрестности бесконечности решение; $z = x + iy$.

Задача (1) — (2) рассматривается в случаях, когда

- 1) $f(x, y)$ принадлежит классу непрерывных функций и
- 2) $f(x, y) \in L_1(\Gamma)$.

В первом случае граничное условие (2) понимается поточечно, то есть

$$\lim_{\substack{z \rightarrow t \\ |z| > 1}} U(z) = f(t), \quad t \in \Gamma, \quad (3)$$

а во втором случае условие (2) понимается в смысле L_1 , то есть

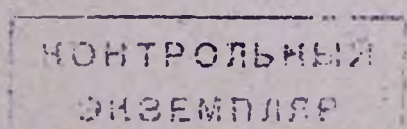
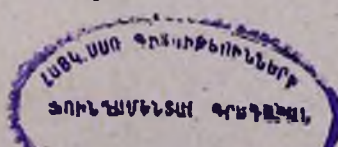
$$\lim_{\substack{R \rightarrow 1 \\ R > 1}} \int_{-\pi}^{\pi} |U(Rz) - f(z)| d\varphi = 0, \quad z = e^{i\varphi}. \quad (4)$$

В обоих случаях доказывается следующая

Теорема 1. Если задача Дирихле для системы (1) удовлетворяет условию Я. Б. Лопатинского, то задача (1) — (2) имеет и притом единственное решение.

Получена формула для решения задачи.

В § 1 доказывается лемма и приводится решение задачи (1) — (2) в классе непрерывных функций, а также показывается единственность полученного решения.



В § 2 задача (1)–(2) решается в случае, когда граничное условие понимается в смысле (4), то есть $f(x, y) \in L_1(\Gamma)$.

§ 1. Решение задачи (1)–(2) в классе непрерывных функций

Напомним, что система (1) называется эллиптической, если $\det C \neq 0$ и характеристическое уравнение

$$\det(A + B\lambda + C\lambda^2) = 0 \quad (5)$$

системы (1) не имеет действительных корней (см. [1], [2]).

Первоначально рассмотрим случай, когда характеристическое уравнение (5) системы (1) имеет только простые корни.

Обозначим через $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ корни характеристического уравнения (5) с положительными мнимыми частями: т. е. $\text{Im } \lambda_j > 0$ ($j = 1, \dots, n$). Напишем общее решение системы (1) в случае простых корней (см. [2])

$$U(x, y) = \text{Re} \sum_{j=1}^n \delta_j \varphi_j(x + \lambda_j y) + \alpha, \quad (6)$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — корни характеристического уравнения (5) с положительными мнимыми частями, $\varphi_j(x + \lambda_j y)$ — произвольные аналитические функции относительно аргумента $x + \lambda_j y$ при $|z| > 1$, исчезающие в бесконечности, а именно $\varphi_j(\xi)$ — аналитические функции относительно аргумента ξ в области D_j , являющейся образом D^+ при отображении $|\xi = x + \lambda_j y$, а α — произвольный действительный постоянный вектор.

Векторы $\delta_1, \dots, \delta_n$ являются решением алгебраического уравнения (см. [2])

$$(A + B\lambda_j + C\lambda_j^2) \delta_j = 0 \quad (j = 1, \dots, n). \quad (7)$$

Условие же Лопатинского для задачи Дирихле в этом случае совпадает с условием линейной независимости векторов $\delta_1, \dots, \delta_n$.

Представим общее решение $U(x, y)$, заданное формулой (6), в следующем виде:

$$U(z) = \text{Re} \sum_{j=1}^n \delta_j \omega_j(z + \mu_j \bar{z}) + \alpha, \quad (8)$$

где $\mu_j = \frac{i - \lambda_j}{i + \lambda_j}$, причем из условия $\text{Im } \lambda_j > 0$ следует, что $|\mu_j| < 1$, а $\omega_j(z + \mu_j \bar{z})$ — произвольные аналитические функции относительно аргумента $z + \mu_j \bar{z}$ при $|z| > 1$, исчезающие в бесконечности, а именно $\omega_j(\xi)$ — аналитические функции в области D_j , являющейся образом D^+ при отображении $\xi = z + \mu_j \bar{z}$.

Предположим сначала, что функции $\omega_j(z + \mu_j \bar{z})$ и $f(z)$ бесконечно дифференцируемые, соответственно, в области $D^+ + \Gamma$ и на Γ .

Используя граничное условие (2) из формулы (8) получим

$$\operatorname{Re} \sum_{j=1}^n \delta_j \omega_j(z + \mu_j \bar{z}) + \alpha = f(z), |z|=1. \quad (9)$$

Так как $\bar{z} = \frac{1}{z}$ на $|z|=1$, то из (9) имеем

$$\operatorname{Re} \sum_{j=1}^n \delta_j \omega_j\left(z + \frac{\mu_j}{z}\right) + \alpha = f(z), |z|=1, \quad (10)$$

где $\omega_j(z + \mu_j/z)$ — аналитические функции в области $|z| > 1$ относительно переменной $z = x + iy$.

Далее из (10) имеем (см. [3]), что

$$\sum_{j=1}^n \delta_j \omega_j\left(z + \frac{\mu_j}{z}\right) + \alpha = -\frac{1}{2\pi i} \int \frac{(t+z)f(t)}{(t-z) \cdot t} dt + iC, \quad (11)$$

где C — некоторый действительный постоянный вектор.

Из формулы (11), так как $\omega_j(\infty)=0$, получим

$$\alpha = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(t) dt}{t} + iC. \quad (12)$$

Поскольку α и $f(t)$ — действительные выражения, то отсюда будем иметь, что $C \equiv 0$.

Подставляя значение α из выражения (12) в формулу (11), получим

$$\sum_{j=1}^n \delta_j \omega_j\left(z + \frac{\mu_j}{z}\right) = -\frac{1}{\pi i} \int \frac{f(t) dt}{t-z}. \quad (13)$$

Обозначим через δ матрицу со столбцами $\delta_1, \dots, \delta_n$, а через $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ строки матрицы δ^{-1} . Тогда из выражения (13) имеем

$$\omega_j\left(z + \frac{\mu_j}{z}\right) = -\frac{\alpha_j}{\pi i} \int \frac{f(t) dt}{t-z}, \quad (14)$$

где α_j есть j -ая строка матрицы δ^{-1} .

Решим уравнение

$$z + \frac{\mu_j}{z} = \theta, \theta \in D_j, \quad (15)$$

относительно z , где z ищется в области $|z| > 1$.

Из уравнения (15) получим

$$z = \frac{\theta + \sqrt{\theta^2 - 4\mu_j}}{2} \equiv \beta_j(\theta), \text{ а } \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\theta^2 - 4\mu_j}}{\theta} = 1, \quad (16)$$

где для выражения $\sqrt{\theta^2 - 4\mu_j}$ выбирается та ветвь, которая непрерывна вне отрезка $(2\sqrt{\mu_j}, -2\sqrt{\mu_j})$.

Подставляя (16) в формулу (14), получим

$$\omega_j(\theta) = -\frac{\alpha_j}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{t - \beta_j(\theta)}, \quad \text{где } \{\beta_j(\theta): D_j \rightarrow D^+\}. \quad (17)$$

Используя (12) и (17), из формулы (8) имеем

$$U(z) = -\operatorname{Re} \sum_{j=1}^n \delta_j \frac{\alpha_j}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{t - \beta_j(z + \mu_j z)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{t}. \quad (18)$$

Представим выражение (18) следующим образом:

$$U(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(t+z)f(t) dt}{(z-t)t} - \operatorname{Re} \sum_{j=1}^n \frac{\delta_j \alpha_j}{\pi i} \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{t - \beta_j(z + \mu_j z)} - \frac{1}{t - z} \right) f(t) dt. \quad (19)$$

Покажем, что вектор-функция $U(z)$, заданная формулой (19), является решением задачи (1)–(2), когда $f(t)$ является непрерывной функцией.

Обозначим

$$V(z) \stackrel{\text{def}}{=} \omega(z + \mu_j \bar{z}) - \omega(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{t - \beta_j(z + \mu_j \bar{z})} - \frac{1}{t - z} \right) f(t) dt. \quad (20)$$

Покажем, что

$$V(z) \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow t_0, \quad \text{где } |z| > 1 \text{ и } t_0 \in \Gamma. \quad (21)$$

Из теоремы Коши о вычетах очевидно имеем

$$\int_{\Gamma} \left(\frac{1}{t - \beta_j(z + \mu_j \bar{z})} - \frac{1}{t - z} \right) f(t_0) dt = 0. \quad (22)$$

Легко проверить также, что имеют место следующие оценки:

$$|\beta_j(z + \mu_j \bar{z}) - z| \leq \operatorname{const} \cdot (|z|^2 - 1) \quad (23)$$

и

$$|t - \beta_j(z + \mu_j \bar{z})| > \operatorname{const} \cdot |t - z| \quad (24)$$

при $1 \leq |z| \leq 2$, $|t| = 1$.

Ясно, что (см. [3])

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|z|^2 - 1}{|t - z|^2} d\varphi = \operatorname{Re} \left(-\frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{(t+z) dt}{(t-z)t} \right) = 1, \quad t = e^{i\varphi}. \quad (25)$$

Теперь разобьем интеграл (20) на два, из которых первый распространен на дугу γ_1 контура Γ , для точек которой $|t - t_0| \leq \Delta$, где Δ некоторое число, подбор которого мы уточним далее, а второй интеграл распространен на оставшуюся часть Γ .

В результате из (20), используя (22), получим

$$\begin{aligned} V(z) &= \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{t - \beta_j(z + \mu_j \bar{z})} - \frac{1}{t - z} \right) (f(t) - f(t_0)) dt = \\ &= \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma_1} \left(\frac{1}{t - \beta_j(z + \mu_j \bar{z})} - \frac{1}{t - z} \right) (f(t) - f(t_0)) dt + \\ &+ \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma - \gamma_1} \left(\frac{1}{t - \beta_j(z + \mu_j \bar{z})} - \frac{1}{t - z} \right) (f(t) - f(t_0)) dt = J_1(z) + J_2(z). \end{aligned} \quad (26)$$

Зададимся числом $\varepsilon > 0$ и, пользуясь непрерывностью функции $f(t)$ в точке t_0 , выберем $\Delta > 0$ так, чтобы при $|t - t_0| < \Delta$ было $|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$. Имея в виду это, оценки (23), (24) и равенство (25), для интеграла $J_1(z)$ из (26) получим

$$|J_1(z)| \leq \frac{\text{const}}{\pi} \int_{\gamma_1} \frac{|f(t) - f(t_0)| \cdot (|z|^2 - 1)}{|t - z|^2} |dt| \leq C\varepsilon, \quad (27)$$

где $C > 0$ — некоторая постоянная.

С другой стороны, ясно, что $J_2(z)$ при таком фиксированном Δ стремится к нулю, при $z \rightarrow t_0 \in \Gamma$. Следовательно, можно указать такое $\delta > 0$, что

$$|J_2(z)| \leq \varepsilon \text{ при } |z - t_0| < \delta, |z| > 1. \quad (28)$$

Итак, из (27) и (28) следует справедливость (21). С другой стороны, известно (см. [3]), что

$$\text{Re} \left(-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(t+z)f(t)dt}{(t-z) \cdot t} \right) \rightarrow f(t_0) \text{ при } z \rightarrow t_0, |z| > 1. \quad (29)$$

Следовательно, из (21) и (29) имеем, что

$$U(z) \rightarrow f(t_0) \text{ при } z \rightarrow t_0 \in \Gamma, |z| > 1, \quad (30)$$

где вектор-функция $U(z)$ задается формулой (19).

Рассмотрим случай кратных корней характеристического уравнения (5).

Общее решение при кратных корнях дается формулой (см. [2])

$$U(x, y) = \text{Re} \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^{k_j} \delta_{jr} \left[\omega_{jr}(x + \lambda_j y) + \sum_{p=1}^{r-1} \beta_{jr}^{(p)} y^p \omega_{jr-p}^{(p)}(x + \lambda_j y) \right] + \alpha, \quad (31)$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — корни характеристического уравнения (5) с положительными мнимыми частями, $k_1, \dots, k_n$ — их кратность, $\omega_{jr}(x + \lambda_j y)$ — произвольные аналитические функции относительно аргумента $x + \lambda_j y$, а α — произвольный действительный постоянный вектор.

В формуле (31) n -мерные векторы δ_{jr} и числа $\beta_{jr}^{(p)}$ определяются через коэффициенты системы (1). Условие Лопатинского для системы (1) совпадает с условием линейной независимости векторов δ_{jr} ($j=1, \dots, n$; $r=1, \dots, k_j$). Числа $\beta_{jr}^{(p)}$ равны либо нулю, либо $1/p!$ (см. [2]).

Сначала рассмотрим случай, когда $\nu_0 = 1$ и $\beta_{jr}^{(p)} = \frac{1}{p!}$.

Тогда общее решение, заданное формулой (31), будет иметь следующий вид:

$$U(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{r=1}^n \delta_r \left[\omega_r(x + \lambda y) + \sum_{p=1}^{r-1} \frac{y^p}{p!} \omega_{r-p}^{(p)}(x + \lambda y) \right] + \alpha, \quad (32)$$

где $\operatorname{Im} \lambda > 0$, а верхний индекс функции $\omega_{r-p}(x + \lambda y)$ указывает порядок производной в точке $\xi = x + \lambda y$.

Отметим, что

$$x + \lambda y = \frac{z + \bar{z}}{2} + \lambda \frac{z - \bar{z}}{2i} = (z + \mu \bar{z})d, \quad \text{где } d = \frac{1 - \lambda i}{2}, \quad (33)$$

а $\mu = \frac{i - \lambda}{i + \lambda}$, причем из условия $\operatorname{Im} \lambda > 0$ имеем, что $|\mu| < 1$.

Построим аналитическую функцию $\beta(x + \lambda y)$ относительно $x + \lambda y$ в области $|z| > 1$, удовлетворяющую условию

$$\beta(x + \lambda y) = y \quad \text{на } |z| = 1. \quad (34)$$

Так как на $|z| = 1$ имеем $\bar{z} = \frac{1}{z}$, то

$$\beta\left(zd + \frac{\mu d}{z}\right) = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z}\right) \quad \text{при } |z| = 1,$$

где

$$d = \frac{1 - \lambda i}{2}, \quad \mu = \frac{i - \lambda}{i + \lambda}. \quad (35)$$

Отсюда получим

$$\beta\left(zd + \frac{\mu d}{z}\right) = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z}\right) \quad \text{при } |z| > 1. \quad (36)$$

Положим

$$zd + \frac{\mu d}{z} = x + \lambda y, \quad |z| = 1, \quad (37)$$

тогда

$$z = a(x + \lambda y), \quad (38)$$

где

$$\alpha(\tau) = \frac{\tau + \sqrt{\tau^2 - 4\mu d^2}}{2d}, \quad \tau = x + \lambda y, \quad \text{а} \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\tau^2 - 4\mu d^2}}{\tau} = 1 \quad (39)$$

и для выражения $\sqrt{\tau^2 - 4\mu d^2}$ выбирается та ветвь, которая непрерывна вне отрезка $(2d\sqrt{\mu}, -2d\sqrt{\mu})$. Подставив значение z из (38) в (36), получим

$$\beta(x + \lambda y) = \frac{1}{2i} \left(z(x + \lambda y) - \frac{1}{\alpha(x + \lambda y)} \right), \quad |z| > 1. \quad (40)$$

Отметим, что $\beta(x + \lambda y)$ — аналитическая функция относительно $x + \lambda y$ при $|z| > 1$.

Обозначим

$$\gamma(z) = y - \beta(x + \lambda y), \quad z = x + iy. \quad (41)$$

Ясно, что

$$\gamma(z) = 0 \quad \text{на} \quad |z| = 1, \quad (42)$$

$$|\gamma(z)| \leq \text{const} \cdot (|z|^2 - 1), \quad |t - \alpha(x + \lambda y)| \geq \text{const} \cdot |t - z|. \quad (43)$$

Из (41) имеем

$$y = \beta(x + \lambda y) + \gamma(z). \quad (44)$$

Подставим значение y из (44) в формулу (32), получим

$$U(z) = \text{Re} \sum_{r=1}^n \delta_r \left[\omega_r(x + \lambda y) + \sum_{p=1}^{r-1} \frac{(\beta(x + \lambda y) + \gamma(z))^p}{p!} \omega_{r-p}^{(p)}(x + \lambda y) \right] + \alpha. \quad (45)$$

Обозначим

$$\beta \stackrel{\text{def}}{=} \beta(x + \lambda y) \quad \text{и} \quad \gamma \stackrel{\text{def}}{=} \gamma(z). \quad (46)$$

Ясно, что

$$\frac{(\beta + \gamma)^p}{p!} = \frac{\beta^p}{p!} + \frac{\beta^{p-1} \gamma}{(p-1)!} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{\beta^{p-2} \gamma^2}{(p-2)!} + \dots + \frac{\gamma^p}{p!}. \quad (47)$$

Имея в виду (47), представим формулу (45) в виде

$$U(z) = \text{Re} \sum_{r=1}^n \delta_r \left[\left(\omega_r(x + \lambda y) + \sum_{p=1}^{r-1} \frac{\beta^p}{p!} \omega_{r-p}^{(p)}(x + \lambda y) \right) + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{r-1} \frac{\gamma^j}{j!} \sum_{p=j}^{r-1} \frac{\beta^{p-j}}{(p-j)!} \omega_{r-p}^{(p)}(x + \lambda y) \right] + \alpha. \quad (48)$$

Сделаем замену функций $\omega_1(x + \lambda y), \dots, \omega_n(x + \lambda y)$ на функции $\psi_1(x + \lambda y), \dots, \psi_n(x + \lambda y)$ по формуле

$$\psi_1(x + \lambda y) = \omega_1(x + \lambda y) \quad (49)$$

$$\psi_r(x + \lambda y) = \omega_r(x + \lambda y) + \sum_{p=1}^{r-1} \frac{\beta^p}{p!} \omega_{r-p}^{(p)}(x + \lambda y), \quad (50)$$

где $r = 2, \dots, n$.

Обозначим

$$\Phi_{j,r}(x+\lambda y) = \sum_{p=j}^{r-1} \frac{\beta_{p-j}}{(p-j)!} \cdot \omega_{r-p}^{(p)}(x+\lambda y), \quad (51)$$

где $j=0, \dots, n-1$; $r=1, \dots, n$; $j < r$.

В такой форме записи функции $\Phi_{01}(x+\lambda y), \dots, \Phi_{0n}(x+\lambda y)$ совпадают с функциями $\psi_1(x+\lambda y), \dots, \psi_n(x+\lambda y)$. Имеет место следующая

Лемма 1. При замене в выражении (50) функциями (51), функции $\Phi_{j,r}(x+\lambda y)$, ($j < r$, $r \leq n$), линейно выражаются (с гладкими ограниченными коэффициентами) через функции $\psi_m^{(l)}(x+\lambda y)$, где $m=1, \dots, n$; $l=0, \dots, j$.

Докажем это утверждение по индукции. Пусть утверждение верно для функций $\Phi_{k,r}(x+\lambda y)$, где k фиксировано, а $r=k+1, \dots, n$.

Докажем, что оно верно и для функций $\Phi_{k+1,r}(x+\lambda y)$, где $r=k+2, \dots, n$.

Преобразуем функции $\Phi_{k+1,r}(x+\lambda y)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi_{k+1,r}(x+\lambda y) &= \sum_{p=k+1}^{r-1} \frac{\beta_{p-k-1}}{(p-k-1)!} \cdot \omega_{r-p}^{(p)}(x+\lambda y) = \\ &= \left(\omega_{r-k-1}^{(k)}(x+\lambda y) + \frac{\beta}{1!} \omega_{r-k-2}^{(k+1)}(x+\lambda y) + \dots + \frac{\beta_{r-k-2}}{(r-k-2)!} \times \right. \\ &\quad \left. \times \omega_1^{(r-2)}(x+\lambda y) \right)' - \beta' \left(\omega_{r-k-2}^{(k+1)}(x+\lambda y) + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta_{r-k-3}}{(r-k-3)!} \omega_1^{(r-2)}(x+\lambda y) \right). \end{aligned} \quad (52)$$

Из формулы (52) следует, что

$$\Phi_{k+1,r}(x+\lambda y) = \Phi_{k,r-1}(x+\lambda y) - \beta' \Phi_{k+1,r-1}(x+\lambda y), \quad (53)$$

где $r=k+2, \dots, n$ и производные всюду берутся по переменной $\xi = x + \lambda y$.

Из рекуррентной формулы (53) следует, что функции $\Phi_{k+1,r}(x+\lambda y)$ выражаются через функции $\Phi_{k,r+2}(x+\lambda y), \dots, \Phi_{k,r-1}(x+\lambda y)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi_{k+1,r}(x+\lambda y) &= \sum_{j=k+2}^{r-1} a_k(x+\lambda y) \cdot \Phi_{k,j}(x+\lambda y) + a_0(x+\lambda y) \times \\ &\quad \times \Phi_{k+1,k+2}(x+\lambda y), \end{aligned} \quad (54)$$

где $a_k(x+\lambda y)$ — бесконечно дифференцируемые, ограниченные функции, являющиеся некоторыми степенями от функций $-\beta'(x+\lambda y)$.

Ясно, что

$$\Phi_{l,j+1}(x+\lambda y) = \omega_1^{(j)}(x+\lambda y) \equiv \psi_1^{(j)}(x+\lambda y), \quad (55)$$

где $j=0, \dots, n-1$.

Следовательно, утверждение верно и для функций $\Phi_{k+1, r}(x+\lambda y)$. Утверждение для $j=0$ верно, так как функции $\Phi_{01}(x+\lambda y), \dots, \Phi_{0n}(x+\lambda y)$ совпадают с функциями $\psi_1(x+\lambda y), \dots, \psi_n(x+\lambda y)$, следовательно по индукции оно верно при любом $k < n$. Следовательно, функции $\Phi_{kr}(x+\lambda y)$ выражаются линейной комбинацией, с гладкими ограниченными коэффициентами, через производные от функций $\psi_1(x+\lambda y), \dots, \psi_n(x+\lambda y)$ до порядка k .

Итак, лемма 1 доказана.

Учитывая лемму 1 сделаем в формуле (48) замену (50) и представим общее решение $U(z)$ в виде

$$U(z) = \operatorname{Re} \sum_{r=1}^n \partial_r \left[\psi_r(x+\lambda y) + \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{k=1}^j \sum_{l=1}^{r-1} \frac{\gamma^j(z)}{j!} a_{jrek}(z) \psi_e^{(k)}(x+\lambda y) \right] + \alpha, \quad (56)$$

где $\psi_r(x+\lambda y)$ — произвольные аналитические функции относительно аргумента $x+\lambda y$, исчезающие в бесконечности, $a_{jrek}(z)$ — некоторые ограниченные бесконечно дифференцируемые функции, а $\gamma(z)$ определяется формулой (41).

Первоначально предположим, что функции $\psi_r(x+\lambda y)$ и граничная функция $f(z)$ бесконечно дифференцируемы, соответственно в $D^+ + \Gamma$ и на Γ . Используя граничное условие (2) и (42) из формулы (56) получим

$$\operatorname{Re} \sum_{r=1}^n \partial_r \psi_r(x+\lambda y) + \alpha = f(z), \quad |z|=1. \quad (57)$$

Далее, из (57), аналогично случаю простых корней, имеем

$$\sum_{r=1}^n \partial_r \psi_r \left(zd + \frac{\mu d}{z} \right) + \alpha = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(t+z)f(t)}{(t-z) \cdot t} dt + iC. \quad (58)$$

Как и в случае простых корней из формул (12) и (13) при $\mu_j = \mu$ аналогично имеем

$$\psi_r \left(\left(z + \frac{\mu}{z} \right) d \right) = -\frac{\alpha_r}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{t-z}, \quad (59)$$

где α_r есть r -ая строка матрицы ∂^{-1} .

Положив $\left(z + \frac{\mu}{z} \right) d = \theta$ из (59) получим

$$\psi_r(\theta) = -\frac{\alpha_r}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{t - \alpha(x+\lambda y)}, \quad (60)$$

где $\alpha(\theta)$ определяется формулой (39).

Используя (12) и (60), из формулы (56) имеем

$$U(z) = -\operatorname{Re} \sum_{r=1}^n \partial_r \left[\frac{\alpha_r}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{t - \alpha(x+\lambda y)} + \dots \right] \quad (61)$$

$$+ \sum_{j=1}^{r-1} \sum_{k=1}^j \sum_{l=1}^{r-1} \frac{a_r}{j!} a_{jrek}(z) \cdot \frac{1}{\pi i} \int \frac{\gamma^k(z) f(t) dt}{[t - \alpha(x + \lambda_j y)]^{k+1}} + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(t) dt}{t}. \quad (61)$$

Тот факт, что вектор-функция $U(z)$, заданная формулой (61), является решением задачи (1)–(2), когда $f(t)$ непрерывная функция, доказывается аналогично случаю простых корней. Следовательно, функция $U(z)$, заданная формулой (61), является решением задачи (1)–(2) в случае кратных корней в классе непрерывных функций.

Следуя (39), (40) и (41) положим

$$a_j(\tau) = \frac{\tau + \sqrt{\tau^2 - 4d_j^2 \mu_j}}{2d_j}; \quad \beta_j(x + \lambda_j y) = \frac{1}{2i} \left(a_j(x + \lambda_j y) - \frac{1}{a_j(x + \lambda_j y)} \right), \quad |z| > 1,$$

$$\gamma_j(z) = y - \beta_j(x + \lambda_j y), \quad \text{где } \mu_j = \frac{i - \lambda_j}{i + \lambda_j}, \quad d_j = \frac{1 - \lambda_j \cdot i}{2}, \quad z = x + iy. \quad (62)$$

В общем случае, делая в (31) замену функций $\omega_{j,r}(x + \lambda_j y)$ на функции $\psi_{j,r}(x + \lambda_j y)$ по формуле

$$\omega_{j,r}(\tau + \lambda_j y) + \sum_{p=1}^{r-1} \beta_{j,r}^{(p)} \gamma_j^{(p)}(z) \omega_{j,r-p}^{(p)}(x + \lambda_j y) = \psi_{j,r}(x + \lambda_j y), \quad (63)$$

где $j=1, \dots, v_0$; $r=1, \dots, k_j$ — задача (1)–(2) исследуется аналогично случаю $v_0=1$ и доказывается справедливость теоремы 1.

Докажем единственность решения задачи (1)–(2). Для этого достаточно показать, что однородная задача (1)–(2) имеет только нулевое решение, а именно при $f(z)=0$, $U(z) \equiv 0$.

Пусть $U(z)$ удовлетворяет системе (1) и граничному условию

$$U(z) = 0 \quad \text{при } |z|=1, \quad (64)$$

которое понимается в смысле (3).

Рассмотрим вектор-функцию

$$V_h(z) = U(hz) \quad \text{при } h > 1. \quad (65)$$

Вектор-функция $V_h(z)$ в области $|z| \geq 1$ имеет ограниченные производные, удовлетворяет системе (1) и граничному условию

$$V_h(z) = U(hz) \quad \text{при } |z|=1. \quad (66)$$

Тогда $V_h(z)$ через свое граничное условие определяется единственным образом некоторой формулой (см. [4])

$$V_h(z) = \int_{|t|=1} K(z, t) U(ht) dt, \quad (67)$$

где $K(z, t)$ — непрерывная функция по t и z при $t \neq z$ и не зависит от граничного условия. Переходя в (67) к пределу при $h \rightarrow 1$ и имея в виду (64) и (65), получим, что $U(z) \equiv 0$ при $|z| > 1$.

Тем самым единственность доказана, а вместе с ней и полностью теорема 1. Если же нарушается условие Лопатинского, то в работе (см. [4]) показано, что однородная задача (1)–(2) имеет бесконечное число линейно независимых решений.

Замечание. Скажем, что $f(t)$ имеет в граничной точке t_0 слабую особенность, если в окрестности этой точки имеет место оценка

$$|f(t)| \leq \frac{\text{const}}{|t - t_0|^\alpha}, \text{ где } 0 \leq \alpha < 1. \quad (68)$$

Аналогично доказывается справедливость теоремы 1 и формулы решения задачи (1)–(2), если граничная функция $f(t)$ имеет в конечном числе точек границы слабую особенность.

Тогда допускается, чтобы решение $U(z)$ в этих точках также имело бы слабую особенность.

Теперь рассмотрим задачу (1)–(2), когда $f(t) \in L_1(\Gamma)$ в смысле определения (4).

§ 2. Решение задачи (1)–(2) в случае, когда граничная функция $f(t)$ принадлежит $L_1(\Gamma)$

Пусть $f(t) \in L_1(\Gamma)$ и характеристическое уравнение (5) имеет только простые корни.

Докажем, что вектор-функция $U(z)$, определенная формулой (19), также является решением задачи (1)–(2) в этом случае, где граничное условие (2) понимается в смысле определения (4).

Из формулы (19) имеем

$$U(Rz) = \text{Re} \left(-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(t + Rz) f(t) dt}{(t - Rz) \cdot t} \right) + \\ + \text{Re} \sum_{j=1}^n \frac{\partial_j \alpha_j}{\pi i} \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{t - \beta_j (Rz + \mu_j \bar{R}z)} - \frac{1}{t - Rz} \right) f(t) dt. \quad (69)$$

В силу теоремы Коши

$$\text{Re} \sum_{j=1}^n \frac{\partial_j \alpha_j}{\pi i} \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{t - \beta_j (Rz + \mu_j \bar{R}z)} - \frac{1}{t - Rz} \right) f(z) dt = 0. \quad (70)$$

Ясно также, что

$$f(z) = \text{Re} \left(-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(t + Rz) f(z) dt}{(t - Rz) \cdot t} \right). \quad (71)$$

Используя (70) и (71), из (69) получим

$$U(Rz) - f(z) = \text{Re} \left(-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(f(t) - f(z))(t + Rz) dt}{(t - Rz) t} + \right.$$

$$+ \operatorname{Re} \sum_{j=1}^n \delta_j \frac{\alpha_j}{\pi i} \int \left(\frac{1}{t - \beta_j (Rz + \mu_j \bar{Rz})} - \frac{1}{t - Rz} \right) (f(t) - f(z)) dt. \quad (72)$$

Из (72) имеем

$$U(Rz) - f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{R^2 |z|^2 - 1}{|t - Rz|^2} (f(t) - f(z)) d\varphi + \\ + \operatorname{Re} \sum_{j=1}^n \frac{\delta_j \alpha_j}{\pi i} \int \frac{(\beta_j (Rz + \mu_j \bar{Rz}) - Rz)(f(t) - f(z))}{(t - Rz)(t - \beta_j (Rz + \mu_j \bar{Rz}))} dt, \quad (73)$$

Из (23) и (24) следует, что

$$|\beta_j (Rz + \mu_j \bar{Rz}) - Rz| \leq \operatorname{const} \cdot (R^2 - 1) \text{ при } |z| = 1 \quad (74)$$

и

$$|t - \beta_j (Rz + \mu_j \bar{Rz})| \geq \operatorname{const} \cdot |t - Rz| \text{ при } |t| = 1. \quad (75)$$

Используя оценки (74) и (75), из (73) получим

$$|U(Rz) - f(z)| \leq C \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - 1}{|t - Rz|^2} |f(t) - f(z)| d\varphi, \quad (76)$$

при $|z| = 1$ и $t = e^{i\varphi}$, где C — некоторая постоянная. Пусть $z = e^{i\psi}$. Сделаем в (76) замену переменной, положим

$$\varphi = \psi + \theta. \quad (77)$$

Тогда из (76) получим

$$|U(Rz) - f(z)| \leq C \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - 1}{|\zeta - R|^2} |f(\zeta) - f(z)| d\theta, \quad (78)$$

где $\zeta = e^{i\theta}$.

Используя (78), имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} |U(Rz) - f(z)| d\psi \leq C \int_0^{2\pi} \left(\frac{R^2 - 1}{|\zeta - R|^2} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\zeta) - f(z)| d\psi \right) d\theta, \quad (79)$$

где $z = e^{i\psi}$, $\zeta = e^{i\theta}$.

Так как $f(z) \in L_1(\Gamma)$, то для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta > 0$, что если $|\theta| \leq \delta$ и $(\zeta = e^{i\theta})$, то (см. [5])

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(\zeta) - f(z)| d\psi < \varepsilon. \quad (80)$$

С другой стороны мы имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - 1}{|\zeta - R|^2} d\theta = 1, \quad \zeta = e^{i\theta}. \quad (81)$$

Представим выражение (79) следующим образом:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \left(\frac{R^2 - 1}{|\zeta - R|^2} \int_{-\pi}^{\pi} |f(z\zeta) - f(z)| d\psi \right) d\theta = \\ & = \int_{-\delta}^{\delta} \left(\frac{R^2 - 1}{|\zeta - R|^2} \int_{-\pi}^{\pi} |f(z\zeta) - f(z)| d\psi \right) d\theta + \\ & + \int_{\delta < |\theta| < \pi} \left(\frac{R^2 - 1}{|\zeta - R|^2} \int_{-\pi}^{\pi} |f(z\zeta) - f(z)| d\psi \right) d\theta = J_1(R) + J_2(R). \end{aligned} \quad (82)$$

Ясно, что при фиксированном δ интеграл $J_2(R) \rightarrow 0$ при $R \rightarrow 1$. Поэтому для $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta_1 > 0$, что

$$|J_2(R)| < \varepsilon \text{ при } |R - 1| < \delta_1. \quad (83)$$

Из неравенства (80) и равенства (81) следует, что

$$|J_1(R)| < 2\varepsilon. \quad (84)$$

Итак, из (79), (83) и (84) вытекает (4).

Следовательно, утверждение о том, что вектор-функция $U(z)$, определенная формулой (19), является решением задачи (1)–(2) при $f(t) \in L_1(\Gamma)$, доказано.

Аналогично доказывается, что формула (61) при $f(t) \in L_1(\Gamma)$ является решением задачи (1)–(2) в общем случае.

Единственность решения задачи при $f(t) \in L_1(\Gamma)$ доказывается аналогично § 1, только с учетом того, что граничное условие (64) понимается в смысле (4).

В заключение выражаю глубокую благодарность моему научному руководителю профессору Н. Е. Товмасяну за постановку задачи и постоянное внимание при ее выполнении.

Ереванский политехнический институт

им. К. Маркса

Поступила 15.IV.1978

Է. Պ. ՄԱՆԻՔՄԱՆԻԱՆ. Դիրիխլեի խնդիրը էլիպտական սիստեմի երկրորդ կարգի դիֆֆերենցիալ հավասարումների համար, $|z| > 1$ տիրույթում (ամփոփում)

Աշխատանքում դիտարկվում է հետևյալ եզրային խնդիրը. գտնել $|z| > 1$ տիրույթում

$$AU_{xx} + BU_{xy} + CU_{yy} = 0 \quad (1)$$

էլիպտական սիստեմի երկու անգամ անընդհատորեն դիֆերենցիալ լուծումը, որը բավարարում է

$$U(x, y)|_{\Gamma} = f(x, y), \quad \{\Gamma: |z| = 1\} \quad (2)$$

եզրային պայմանին:

Խնդիր (1)–(2)-ը դիտարկվում է, երբ $f(x, y) \in C$ և $f(x, y) \in L_1(\Gamma)$: Ապացուցված է հետևյալ թեորեման.

Եթե Դիրիխլեի խնդիրը (1) սիստեմի համար բավարարում է անպատիսկու պայմանին, ապա (1)–(2) խնդիրը ունի լուծում և այդ լուծումը միակն է: Ստացված է լուծման բանաձևը:

E. P. MELIKSETIAN. *On Dirichlet problem for second order elliptical systems of differential equations in the unit disk* (summary)

In the article the following problem is considered. In the unit disk $|z| > 1$ find the solution of the system

$$AU_{xx} + BU_{xy} + CU_{yy} = 0 \quad (1)$$

satisfying the boundary condition

$$U(x, y)|_{\Gamma} = f(x, y), \quad \{\Gamma: |z| = 1\} \quad (2)$$

where the vector function $f(x, y) \in L_1(\Gamma)$ and $f(x, y) \in C$.

Theorem: if the Lopatinsky conditions are satisfied then the Dirichlet problem has a unique solution. A formula for solution is obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Г. Петровский. Лекции об уравнениях с частными производными, Физматгиз, М., 1961.
2. А. В. Бицадзе. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., «Наука», 1966.
3. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного, М., «Наука», 1973.
4. Н. Е. Товмасян. Об одном методе решения дифференциальных уравнений второго порядка на плоскости, Мат. сб., 89 (131), № 4 (12), 1972.
5. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа, М., «Наука», 1976.