ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XV. № 4, 1980 Математика

Г. Р. ОГАНЕСЯН

О НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ С ЗАДАННЫМИ ВРОНСКИАНАМИ

Рассмотрим задачу Коши для функции $u(t, x)$:

$$[\partial_t^2 + b(t, x)\,\partial_x^2 + q(t, x)]\,u(t, x) = f(t, x),\ t > 0, \tag{1}$$

$$u(0, x) = f_1(x),\ \partial_t u(0, x) = f_2(x), \tag{2}$$

здесь

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t},\ \ \partial_x = \frac{\partial}{\partial x};\ t,\ x \in R^1.$$

Если функции b, q, f_1, f_2 и f аналитичны по всем своим аргументам, то теорема Коши—Ковалевской гарантирует существование единственного аналитического решения в окрестности любой начальной точки $(0, x_0)$. Известно также (см. [1]), что требование аналитичности по временной переменной t можно ослабить. Именно, если, например, в (1)—(2) b, q и f—непрерывные функции от t, значения которых суть аналитические функции от x, то в окрестности точки $(0, x_0)$ существует единственное решение u, представляющее собой непрерывно дифференцируемую функцию от t, значения которых—аналитические функции от x. Если коэффициент q уравнения (1) имеет особенность при $t = 0$, точнее нарушается условие

$$\int\limits_0^T |\tau q(\tau, x)|\,d\tau < \infty, \tag{3}$$

то задача Коши (1)—(2) плохо поставлена. Это объясняется тем, что задача (1)—(2) становится существенно сингулярной и решения уравнения (1) могут себя плохо вести при $t \to 0$ (обращаться в нуль или вообще не иметь следа на отрезке прямой $t = 0$).

Для таких задач Бицадзе [2] предложил ставить задачу Коши с весом. Для уравнений и систем первого порядка с коэффициентами, имеющими фуксовы (регулярные) особенности варианты теоремы Коши—Ковалевской были доказаны в работах Бауенди и Галауика [3], [4].

В настоящей статье предлагается постановка начальной задачи (на начальной гиперплоскости вместо данных Коши задаются некоторые вронскианы), которая позволяет методом последовательных приближений доказать аналог теоремы Коши—Ковалевской для уравнений и систем с произвольными (регулярными или нерегулярными) особенностями при $t=0$. Отметим, что аналогичная постановка задачи встречалась у Коропа [5] и Марченко [6] при изучении обратной задачи рассеяния для оператора Штурма-Лиувилля с особенностью, а также у Нерсесяна [7] при изучении корректности задачи Коши для симметрических систем. Однако, в отличие от [7], мы не делаем никаких упрощающих предположений относительно структуры матрицы A (см. 22)).

§ 1. Обозначения

Обозначим некоторую малую окрестность начала координат через $V=V_t\{(x_0, x), 0<x_0<t, x\in S\subset\subset R^n\}$, а через S_t — сечение этой окрестности гиперплоскостью $x_0=t$. Если $f(t, x_1,\cdots, x_n)$ — комплекснозначная бесконечно дифференцируемая по пространственным переменным x функция, то шкала банаховых пространств Жевре определяется следующим образом:

$$G_\gamma=G(\gamma, s)=\{f, \|f\|_{\gamma, s}<\infty\},$$

$$\|f\|_s=\|f\|_{\gamma, s}\equiv\left\{\sum_\alpha [s^{|\alpha|}|\alpha|!^{-\gamma}\|\partial_x^\alpha f\|]^2\right\}^{1/2}, \tag{4}$$

где α — мультииндекс, $\alpha\in Z_+^n$, $\|f\|$ — L_2-норма по переменным x. Нормы вектор-функций F размерности l и матричных функций A размера $l\times l$ определяются, как обычно, формулами

$$\|F\|^2=\sum_{i=1}^{l}\|F_i\|^2, \quad \|A\|=\sup_{\|F\|=1}\|AF\|.$$

Через $GS(\gamma, \rho, m)$ мы обозначим класс символов Жевре, состоящий из множества функций $h(t, x, \xi)$, представимых в виде

$$h(t, x, \xi)=h_1(t, \xi)+h_2(t, x, \xi), \quad \xi\in R^n, \tag{5}$$

и таких, что

$$N(h, \gamma, \rho, m, q, l)<\infty, \quad q, l\in Z_+^n, \tag{6}$$

где

$$N=N_1+N_2,$$

$$N_1=\sup_\xi\{(1+|\xi|^2)^{\frac{|q|-m}{2}}|\partial_\xi^q h_1|\},$$

$$N_2=\sup_{x,\xi,p}\{\rho^{|p|}|p|!\,(1+|\xi|^2)^{\frac{|q|-m}{2}}|x^l\,\partial_x^p\,\partial_\xi^q\,h_2|\}.$$

Обозначим через $C_t^m(B)$ множество m раз дифференцируемых функций от t со значениями в банаховом пространстве B.

§ 2. Постановка задачи и основные результаты

Если известна фундаментальная система решений $\{\psi_k(t, x)\}_1^m$ обыкновенного дифференциального уравнения

$$L\psi = \sum_{k=0}^{m} l_k(t, x)\, \partial_t^k \psi = 0,\ l_m \equiv 1,\ l_j(t) \in C^m(0, T], \tag{7}$$

то общее решение неоднородного уравнения

$$Lu = g(t, x) \tag{8}$$

можно найти, например, методом вариации произвольных постоянных (см. [8]):

$$u(t, x) = \hat{u}(t, x) + \sum_{k=1}^{m} f_k(x)\, \psi_k(t, x), \tag{9}$$

где $f_k(x)$—произвольные функции

$$\hat{u}(t, x) = \int_0^t K(t, \tau, \psi)\, g(\tau, x)\, d\tau, \tag{10}$$

$$K(t, \tau, \psi) = \sum_{k=1}^{m} \frac{W_j(\tau, \psi)}{W(\tau, \psi)}\, \psi(t, x),$$

$$K_j(t, \tau) \equiv \partial_t^j K(t, \tau),\ j = 0, 1, \cdots, m-1,$$

вронскиан $W(t, \psi)$ представляет собой определитель матрицы, первая строка которой состоит из элементов $\psi_1, \cdots, \psi_m$, а последующие строки являются последовательными производными первой строки до порядка $m-1$ включительно, т. е.

$$W(t, \psi) = W(t, \psi_1, \cdots, \psi_m) = \det\left(\partial_t^{p-1} \psi_q\right)_{p, q=1}^{m},$$

а $W_j(t, \psi)$—определитель, получаемый из $W(t, \psi)$ в результате замены j-го столбца на $(0, \cdots, 0, 1)$.

Пусть K^n—интегральные операторы, определяемые формулой

$$K^n f = \int_0^t \|K(t, t_1)\|_{s_1} \int_0^{t_1} \|K(t_1, t_2)\|_{s_2} \cdots$$

$$\cdots \int_0^{t_{n-1}} \|K(t_{n-1}, t_n)\, f(t_n, x, r_\alpha)\|_{s_n}\, dt_n \cdots dt_1, \tag{11}$$

где

$$r_\alpha = r_\alpha(t_n) = \sum_{k=1}^{m} \partial_x^\alpha [\psi_k(t_n; x)\, f_k(x)],\ |\alpha| \leqslant \beta. \tag{12}$$

Введем обозначение

$$V_k(t, u, \psi) = \frac{W(t, \psi_1, \cdots, \psi_{k-1}, u, \psi_{k+1}, \cdots, \psi_m)}{W(t, \psi)}. \tag{13}$$

Рассмотрим начальную нелинейную задачу

$$Lu = f(t, x, \partial_x^\alpha u),\ |\alpha| \leqslant \beta,\ t > 0, \tag{14}$$

$$\lim_{t \to 0} V_k(t, u, \psi) = f_k(x),\ k = 1, 2, \cdots, m, \tag{15}$$

при следующих условиях:

Существуют постоянные γ, $M > 0$ такие, что для всех s', s $(0 < s' < s < 1)$, $t \in [0, T]$ и $\omega_{1,2} \in G(\gamma, s)$ справедливы неравенства

$$\| f(t, x, \partial_x^\alpha \omega_1) - f(t, x, \partial_x^\alpha \omega_2) \|_{s'} \leqslant \frac{c}{(s - s')^{\beta\gamma}} \| \omega_1 - \omega_2 \|_s, \tag{16}$$

$$K_j K^{n-1} f(t, x, r_\alpha) \leqslant \frac{(tM)^{nm}}{nm!},\ j = 0, \cdots, m-1,\ n = 1, 2, \cdots, \tag{17}$$

$$\int_0^T \frac{W_k(\tau, \psi)}{W(\tau, \psi)} f(\tau, x, r_\alpha)\, d\tau < \infty,\ k = 1, \cdots, m. \tag{18}$$

Справедлива

Теорема 1. *Если выполнены условия* (16)—(18) *и*

$$0 < \gamma \leqslant \frac{m}{\beta}, \tag{19}$$

то для некоторого положительного числа T существует единственная функция $u(t, x)$, которая для любого s $(0 < s < 1)$ принадлежит $C^m(G_{\gamma, s})$ в области V_T и является решением задачи (14)—(15), *причем*

$$\sum_{j=0}^{m-1} \| \partial_t^j u \|_s \leqslant \text{const}.$$

Замечание. Вместо условия (17) достаточно потребовать, чтобы

$$f \in C^\infty(G_\gamma),\ f_k \in G_\gamma,\ K_j K^{n-1}(1) \leqslant \frac{(tM)^{nm}}{nm!}. \tag{17'}$$

Перейдем к рассмотрению начальной задачи для систем уравнений. Рассмотрим начальную задачу для нелинейной системы

$$[\partial_t - A(t, x)]\, v(t, x) = F(t, x, \partial_x v),\ (t, x) \in V_{t_0}, \tag{20}$$

$$\lim_{t \to 0} Qv = v_0(x), \tag{21}$$

где F, v, v_0—вектор-функции размерности l, A — заданная матричная функция размера $l \times l$, а матричная функция Q является решением задачи Коши

$$\partial_t Q(t, x) + Q(t, x) A(t, x) = 0, \tag{22}$$

$$\lim_{t \to t_0} Q = E \text{ (единичная матрица)}. \tag{23}$$

Из формулы Лиувилля

$$\det Q(t, x) = \exp\left\{\int_t^{t_0} S_p A(\tau, x)\, d\tau\right\} \tag{24}$$

следует, что условие $A(\tau) \in C(0, t_0]$ влечет

$$\left|\int_t^{t_0} Sp\, A(\tau)\, d\tau\right| < \infty,$$

что обеспечивает невырожденность матрицы Q ($\det Q \neq 0$) при $t > 0$.

Мы будем предполагать, что при $A \in C_t\ (G_\gamma)$ в области V_{t_0} существует невырожденное решение $Q \in C_t\ (G_\gamma)$ задачи (22)—(23).

Вариант такого типа теоремы существования решения Q уравнения (22), когда матричная функция $A(t)$ имеет особенность при $t = 0$ (точнее, когда $A(t)$ —однозначная аналитическая в кольце $0 < t < t_0$ матричная функция) был доказан Гамбургером (см. [9], теорема 10.1).

Введем следующие вспомогательные интегральные операторы

$$\tilde{R}(s_1, s_2, Q)\ f = \int_0^t \|Q(\tau)\|_{s_1} \|Q^{-1}(\tau)\|_{s_2} f(\tau)\, d\tau,$$

$$\tilde{R}_1(s, Q)\, f = \int_0^t \|Q f\|_s (\tau)\, d\tau, \tag{25}$$

$$R_n(Q) = \tilde{R}(s_1, s_2, Q) \cdots \tilde{R}(s_{n-1}, s_n, Q)\, \tilde{R}_1(s_n, Q).$$

Теорема 2. *Если для всех* s', s_1, s_2 $(0 < s_1 < s_2 < 1)$, $v_{1,2} \in G(\gamma, s_2)$ *выполнены условия*

$$\int_0^{t_0} \|Q(\tau)\, F(\tau, x, \partial_x (Q^{-1} v_0))\|_{s'}\, d\tau < \infty, \tag{26}$$

$$\|F(t, x, \partial_x v_1) - F(t, x, \partial_x v_2)\|_{s_1} \leqslant \frac{c}{(s_2 - s_1)^{\beta\gamma}} \|v_1 - v_2\|_{s_2}, \tag{27}$$

$$\gamma > 0, \ \beta\gamma \leqslant 1, \tag{28}$$

$$\|Q^{-1}(t)\|_{s_1} R_n F(t, x, \partial_x (Q^{-1} v_0)) \leqslant \frac{(tM)^n}{n!}, \tag{29}$$

то начальная задача (20)—(21) *имеет единственное решение* $v \in C_t(G(\gamma, s))$ $(0 < s < 1)$, *причем*

$$\|v\|_s \leqslant \text{const}.$$

В некоторых случаях при постановке начальной задачи вместо точного решения Q уравнения (22) возможно использование приближенного асимптотического решения Q_1. Пусть $A_1(t, x)$ — матричная функция, близкая (в некотором смысле см. приводимое ниже условие (34)) к $A(t, x)$, а Q_1 — матричная функция, являющаяся решением задачи Коши

$$\partial_t Q_1(t, x) + Q_1 A_1(t, x) = 0, \tag{30}$$

$$\lim_{t \to t_0} Q_1 = E \text{ (единичная матрица)}. \tag{31}$$

Пусть выполнены следующие условия:

$$\int_0^{t_0} \| Q_1(\tau) \{ F(\tau, x, \partial_x (Q_1^{-1} v_0)) + (A_1 - A) Q_1^{-1} v_0 \} \|_s d\tau < \infty, \tag{32}$$

$$\| Q_1^{-1}(t) \|_{s_1} R_n \{ F(t, x, \partial_x (Q_1^{-1} v_0)) + (A_1 - A) Q_1^{-1} v_0 \} \leqslant \frac{(tM)^n}{n!}, \tag{33}$$

$$\int_0^{t_0} \| Q_1(\tau) [A(\tau) - A_1(\tau)] Q_1^{-1}(\tau) \|_s d\tau < \infty. \tag{34}$$

Справедлива следующая

Теорема 3. *В условиях* (27), (28), (32)—(34) *начальная задача*

$$(\partial_t - A) v = F(t, x, \partial_x v), \tag{35}$$

$$\lim_{t \to 0} Q_1 v = v_0(x) \tag{36}$$

имеет единственное решение $v \in C_t(G(\gamma, s))$, $0 < s < 1$, *причем*

$$\| v \|_s \leqslant \text{const}.$$

Замечание. Вместо условий (33) достаточно потребовать условий

$$F(\tau, x, \partial_x (Q_1^{-1} v_0)) + (A_1 - A) Q_1^{-1} v_0 \in C_t(G_\gamma), \tag{33}$$

$$\| Q_1^{-1}(t) \|_{s_1} R_n(1) \leqslant \frac{(tM)^n}{n!}. \tag{33''}$$

Отметим, что теорема 3 отвечает также на вопрос о том какие возмущения оператора A не влияют на постановку начальной задачи.

Приведем линейные варианты теорем 1.3.

Теорема 4. *Если* $\lambda_j(t, x, D_x)$ — *псевдодифференциальные операторы с символами классов* $GS\left(\gamma, \rho, \frac{\beta j}{m}\right)$, $j = 1, \cdots, m$ *и*

$$0 < \gamma \leqslant \frac{m}{\beta}, \tag{19}$$

$$K_p^n \left| f(t, x) + \sum_{k, j = 1}^{m} \lambda_j [f_k (\partial_t^{m-j} \psi)] \right| \leqslant \frac{(tM)^{n(m-p)}}{(n(m-p))!}, \tag{37}$$

$p = 1, \cdots, m-1$; $n = 1, 2, \cdots,$

то начальная задача

$$Lu = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t, x, D_x)\, \partial_t^{m-j} u + f(t, x), \tag{38}$$

$$\lim_{t\to 0} V_k(t, u, \psi) = f_k(x),\ k = 1, \cdots, m \tag{39}$$

имеет (при некотором $T>0$) *единственное решение* $u \in C_t^m(G_\gamma)$ *при* $(t, x) \in V_T$.

Замечание. Вместо (37) достаточно потребовать, чтобы

$$f \in C_t(G_\gamma),\ f_k \in G_\gamma,\ K_p^n(1) \leqslant \frac{(tM)^{n(m-p)}}{[n(m-p)]!}. \tag{37'}$$

При этом для решений задачи (38)—(39) справедлива оценка ($0<s'<<s<1$)

$$\|u\|_{s'} \leqslant c \left\| f(t, x) + \sum_{k,\ j=1}^{m} \lambda_j \left[f_k (\partial_t^{m-j} \psi_k)\right] \right\|_{s,\infty}. \tag{40}$$

Теорема 5. *В условиях* (28), (34) *и*

$$\|Bv\|_{s_1} \leqslant \frac{c}{(s_2-s_1)^{\beta\gamma}} \|v\|_{s_2},\ 0<s_1<s_2<1, \tag{41}$$

$$\|Q_1^{-1}(t)\|_{s_1} R_n\left[F(t, x) + (B + A_1 - A)\, Q^{-1} v_0\right] \leqslant \frac{(tM)^n}{n!}, \tag{42}$$

начальная задача

$$(\partial_t - A)\, v = B(t, x, D_x)\, v + F(t, x),\ (t, x) \in V_{t_0}, \tag{43}$$

$$\lim_{t\to 0} Q_1 v = v_0(x), \tag{44}$$

имеет единственное решение $v \in C_t(G(\gamma, s))$, $(t, x) \in V_T$ [*при некотором* $T>0$, $0<s<1$.

Замечание. Теорема 5 остается справедливой, если вместо (41), (42) выполнены условия

$$b(t, x, \xi) \in GS(\gamma, \rho, \beta) \quad (\text{см. } [10]), \tag{41'}$$

$$\|Q_1^{-1}(t)\|_{s_1} = R_n(Q_1)(1) \leqslant \frac{(tM)^n}{n!},\ F + (B + A_1 - A)\, Q_1^{-1} v_0 \in C_t(G_\gamma). \tag{42'}$$

При этом имеет место оценка ($0< s' < s <1$)

$$\|v\|_{s'} \leqslant c\, \|F + (B + A_1 - A)\, Q_1^{-1} v_0\|_{s,\infty}. \tag{45}$$

§ 3. Сведение к однородным начальным условиям

Основные неравенства

Лемма 1. *Заменой неизвестной функции*

$$u(t, x) = \omega(t, x) + \sum_{j=1}^{m} \psi_j(t, x) f_j(x) \tag{46}$$

начальные однородные задачи (14)—(15), (38)—(39) *сводятся, соответственно, к однородным задачам*

$$L\omega = f\left(t, x, \partial_x^{\alpha} \omega + \sum_{k=1}^{m} \partial_x^{\alpha} (\psi_k f_k)\right) \equiv \tilde{f}\,(t, x, \partial_x^{\alpha} \omega), \tag{14'}$$

$$\lim_{t \to 0} V_k(t, \omega, \psi) = 0, \ k = 1, \cdots, m; \tag{15'}$$

$$L\omega = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(t, x, D_x)\, \partial_t^{m-j} \omega + \hat{f}(t, x), \tag{38'}$$

$$\lim_{t \to 0} V_k(t, \omega, \psi) = 0, \ k = 1, \cdots, m, \tag{39'}$$

где

$$\hat{f}(t, x) = f(t, x) + \sum_{k, j=1}^{m} \lambda_j \left[f_k(x)\, (\partial_t^{m-j} \psi_k)\right].$$

Доказательство леммы 1 проводится непосредственной подстановкой выражения (46) в соответствующие уравнения и начальные условия.

Лемма 2. *Заменой вектор-функции*

$$v = v_1 + Q_1^{-1} v_0 \tag{47}$$

неоднородные начальные задачи (35)—(36), (43)—(44) *сводятся, соответственно, к однородным задачам*

$$(\partial_t - A)\, v_1 = F(t, x, \partial_x (v_1 + Q_1^{-1} v_0)) + (A_1 - A)\, Q_1^{-1} v_0 \equiv \bar{F}(t, x, \partial_x v_1), \tag{35'}$$

$$\lim_{t \to 0} Q_1 v_1(t, x) = 0; \tag{36'}$$

$$(\partial_t - A)\, v_1 = B(t, x, D_x)\, v_1 + F(t, x) + (B + A_1 - A)\, Q_1^{-1} v_0, \tag{43'}$$

$$\lim_{t \to 0} Q_1 v_1 = 0. \tag{44'}$$

Доказательство леммы 2 проводится непосредственной подстановкой с учетом правила дифференцирования обратной матрицы:

$$\partial_t (Q^{-1}) = -Q^{-1} (\partial_t Q)\, Q^{-1}.$$

Лемма 3. *При условии* (18) *для решений* $\omega \in C_t^m(G_T)$ *начальной задачи*

$$L\omega = \tilde{f}\,(t, x, \partial_x^{\alpha} \omega), \tag{48}$$

$$\lim_{t \to 0} V_k(t, \omega, \psi) = 0, \ k = 1, 2, \cdots, m \tag{49}$$

справедливы оценки $(j=0, 1, \cdots, m-1)$

$$\|\partial_t^j \omega\|_s \leqslant c \int_0^t \|K_j(t, \tau, \psi) \tilde{f}(\tau, x, \partial_x^\alpha \omega)\|_s \, d\tau \tag{50}$$

с постоянной c, *не зависящей от* ω, s.

Доказательство. Из представления решения (9)—(10) и условия (18) следует, что

$$V_k(t, \hat{\omega}, \psi) = \sum_{j=1}^m \int_0^t d\tau \frac{W(t, \psi_1, \cdots, \psi_{k-1}, \psi_j, \psi_{k+1}, \cdots, \psi_m) W_j(\tau, \psi)}{W(t, \psi) W(\tau, \psi)} \tilde{f}(\tau) =$$

$$= \int_0^t \frac{W_k(\tau, \psi)}{W(\tau, \psi)} \tilde{f}(\tau) \, d\tau \to 0, \text{ при } t \to 0.$$

Поэтому, при однородных начальных условиях (49) имеем также

$$\lim_{t\to 0} V_k(t, \omega - \hat{\omega}, \psi) = 0, \; k = 1, \cdots, m. \tag{51}$$

Дифференцируя равенство (9) $(j-1)$ раз по t получаем систему уравнений

$$\partial_t^{j-1}(\omega - \hat{\omega}) = \sum_{k=1}^m f_k(x) \partial_t^{k-1} \psi_k, \; j = 1, \cdots, m.$$

Из этих уравнений, по правилу Крамера, получаем

$$f_k(x) = V_k(t, \omega - \hat{\omega}, \psi) \equiv 0, \; k = 1, \cdots, m,$$

ввиду (51).

Итак, для решения ω задачи (48) — (49) справедливо представление

$$\omega = \hat{\omega} = \int_0^t K(t, \tau, \psi) \tilde{f}(\tau, x, \partial_x^\alpha \omega] \, d\tau.$$

Пользуясь определением (10) функции K нетрудно доказать, что

$$\lim_{\tau\to t} \partial_t^{j-1} K(t, \tau, \psi) = \delta_{mj}, \; j = 1, \cdots, m. \tag{52}$$

Поэтому

$$\partial_t^j \omega = \int_0^t K_j(t, \tau, \psi) \tilde{f}(\tau, x, \partial_x^\alpha \omega) \, d\tau, \tag{53}$$

откуда и следуют оценки (50).

Приведем аналог леммы 3 для систем.

Лемма 4. *Для решений* $v \in C_l(G_T)$ *начальной задачи*

$$(\partial_t - A) v = F(t, x), \; (t, x) \in V_T, \tag{54}$$

$$\lim_{t\to 0} Q(v-\overset{*}{v})=0, \tag{55}$$

где

$$\overset{*}{v}(t,\ x)=\int_0^t Q^{-1}(t,\ x)\,Q(\tau,\ x)\,F(\tau,\ x)\,d\tau,$$

справедлива оценка

$$\|Qv\|_s < c\int_0^t \|Q(\tau)\,F(\tau)\|_s\,d\tau \tag{56}$$

с постоянной c, не зависящей от v и s.

Так как далее мы приводим более общий вариант леммы 4, то доказательство этой леммы мы опускаем.

Лемма 5. *При условиях* (34) *и*

$$\int_0^t \|QF(\tau)\|_s\,d\tau < \infty \tag{57}$$

для решений $v\in C_t(G_T)$ начальной задачи

$$(\partial_t - A)\,v = F(t,\ x) \tag{58}$$

$$\lim_{t\to 0} Q_1 v = 0 \tag{59}$$

справедлива оценка

$$\|Q_1 v(t)\|_s \leqslant c\int_0^t \|Q_1(\partial_t - A)\,v\|_s\,d\tau,\ 0<s<1, \tag{60}$$

с постоянной c, не зависящей от v и s.

Доказательство. По предположению матрица Q_1 является решением уравнения (30), поэтому подействовав слева на уравнение (58) матрицей Q_1, мы получим

$$Q_1\,(\partial_t - A)\,v = Q_1F$$

или

$$\partial_t(Q_1 v) = Q_1F + Q_1\,(A-A_1)\,v.$$

После интегрирования

$$Q_1v = v_0(x) + \int_0^t \{Q_1\,F(\tau) + Q_1\,(A-A_1)v\}\,d\tau. \tag{61}$$

Из условий (34), (57) леммы следует, что

$$v_0(x) = \lim_{t\to 0} Q_1 v = 0.$$

Поэтому из (61) получаем следующее интегральное неравенство

$$\|Q_1 v\|_s \leqslant \int_0^t \{\|Q_1 F\|_s + \|Q_1 (A - A_1) Q_1^{-1}\|_s \|Q_1 v\|_s\} d\tau,$$

обращая которое с помощью леммы Гронуолла (см. [9]), получаем оценку (60).

§ 4. Доказательство теоремы 1

Введем последовательные приближения для задачи (14')—(15')

$$\omega_0 = 0, \ L\omega_1 = \tilde{f}(t, x, 0),$$

$$L\omega_n = \tilde{f}(t, x, \partial_x^\alpha \omega_{n-1}), \ n = 2, 3, \cdots \tag{62}$$

с начальными нулевыми условиями

$$\lim_{t \to 0} V_k(t, \omega_n, \psi) = 0, \ k = 1, \cdots, m, \ n = 1, 2, \cdots. \tag{62'}$$

Для разностей

$$u_1 = \omega_1, \ u_n = \omega_n - \omega_{n-1}, \ n = 2, 3 \cdots$$

получаем уравнения

$$Lu_1 = \tilde{f}(t, x, 0),$$

$$Lu_n = \tilde{f}(t, x, \partial_x^\alpha \omega_{n-1}) - \tilde{f}(t, x, \partial_x^\alpha \omega_{n-2}) \tag{63}$$

с нулевыми начальными условиями

$$\lim_{t \to 0} V_k(t, u_n, \psi) = 0, \ n = 1, 2, \cdots. \tag{63'}$$

Пусть задана возрастающая последовательность чисел

$$0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_n < 1, \ s_i - s_{i-1} = \frac{1 - s_n}{n}, \ n = 2, 3, \cdots. \tag{64}$$

В условиях теоремы 1 для задач (63)—(63') применением оценки (50) имеем

$$\|\partial_t^j u_n\|_{s_1} \leqslant c \int_0^t \|K_j(t, t_1) L u_n\|_{s_1} dt_1 \leqslant$$

$$\leqslant c \int_0^t \|K_j(t, t_1)\|_{s_1} \cdot \|\tilde{f}(\partial_x^\alpha \omega_{n-1}) - \tilde{f}(\partial_x^\alpha \omega_{n-2})\| dt_1.$$

Ввиду (16) имеем далее

$$\|\partial_t^j u_n\|_{s_1} \leqslant \frac{c}{(s_2 - s_1)^{\beta_1}} \int_0^t \|K_j(t, t_1)\|_{s_1} \|u_{n-1}\|_{s_2} dt_1 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c}{[(s_2 - s_1)(s_3 - s_2)]^{\beta\gamma}} \int\limits_0^t \|K_j(t, t_1)\|_{s_1} \int\limits_0^{t_1} \|K(t_1, t_2)\|_{s_2} \|u_{n-2}\|_{s_3} \, dt_2 dt_1.$$

В результате многократного применения этих оценок получаем

$$\|\partial_t^j u_n\|_{s_1} \leqslant \frac{c}{[(s_2 - s_1) \cdots (s_n - s_{n-1})]^{\beta\gamma}} K_j K^{n-1} \tilde{f}(t, x, 0) \leqslant$$

$$\leqslant c^n n^{n\beta\gamma} \frac{(tM)^{nm}}{(nm)!} \leqslant n^{n(\beta\gamma - m)} (tM_1)^n \leqslant (tM_1)^n,$$

ввиду условий (17), (19), (64).

Итак

$$\|\partial_t^j u_n\|_{s_1} \leqslant (t M_1)^n, \quad j = 0, 1, \cdots, m-1.$$

Из последней оценки следует сходимость ряда $\omega_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$, $n \to \infty$ по норме $\sum\limits_{j=0}^{m-1} \|\partial_t^j(\cdot)\|_s$ к решению $\omega \in C_t^{m-1}(G_\gamma)$ задачи (14′)—(15′).

§ 5. Доказательство теоремы 3

Введем последовательные приближения

$$z_0 \equiv 0, \ (\partial_t - A) z_1(t, x) = \tilde{F}(t, x, 0),$$

$$(\partial_t - A) z_n = \tilde{F}(t, x, \partial_x z_{n-1}) \tag{65}$$

для задач (35)—(36) с нулевыми начальными условиями

$$\lim_{t \to 0} Q_1 z_n(t, x) = 0. \tag{65′}$$

Для разностей

$$y_1 = z_1, \ y_n = z_n - z_{n-1}$$

получаем системы уравнений

$$(\partial_t - A) y_1 = \tilde{F}(t, x, 0),$$

$$(\partial_t - A) y_n = \tilde{F}(t, x, z_{n-1}) - \tilde{F}(t, x, z_{n-2}) \tag{66}$$

с начальными условиями

$$\lim_{t \to 0} Q_1 y_n = 0, \ n = 1, 2, \cdots. \tag{66′}$$

С помощью оценки (60) леммы 5 имеем

$$\|y_n\|_{s_1} \leqslant \|Q^{-1}(t)\|_{s_1} \|Q_1 y_n\|_{s_1} <$$

$$\leqslant \|Q_t^{-1}(t)\|_{s_1} \int\limits_0^t \|Q_1(t_1)(\partial_t - A) y_n\|_{s_1} dt_1$$

или

$$\|y_n\|_{s_1} \leqslant \|Q_1^{-1}(t)\|_{s_1} \cdot \frac{c}{(s_2 - s_1)^{\beta\gamma}} \cdot \int_0^t \|Q_1(t_1)\|_{s_1} \|y_{n-1}\|_{s_1} dt_1 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c}{(s_2 - s_1)^{\beta\gamma}} \|Q_1^{-1}(t)\|_{s_1} \int_0^t \|Q_1(t_1)\|_{s_1} \|Q_1^{-1}(t_1)\|_{s_1} \|Q_1 y_{n-1}\|_{s_1} dt_1$$

ввиду условия (27). Многократным применением этих оценок получаем

$$\|y_n\|_{s_1} \leqslant \frac{c}{[(s_2 - s_1) \cdots (s_n - s_{n-1})]^{\beta\gamma}} \|Q_1^{-1}(t)\|_{s_1} R_n \tilde{F}(t, x, 0) \leqslant$$

$$\leqslant n^{n\beta\gamma} \frac{(tM_1)^n}{n!} \leqslant n^{n(\beta\gamma-1)} (tM_2)^n \leqslant (tM_2)^n$$

ввиду (28), (33). Итак ряд $\sum_1^\infty y_k$ сходится к решению $v_1 \in C_t(G_\gamma)$ задачи (35′)—(36′). Применение леммы 2 завершает доказательство теоремы 3.

§ 6. Доказательство теоремы 4

Введем на первом этапе последовательные приближения

$$Lu_1 = \hat{f}(t, x), \ Lu_n = \lambda_1(t, x, D_x)\, \partial_t^{m-1} u_{n-1}, \tag{67}$$

с нулевыми начальными условиями

$$\lim_{t \to 0} V_k(t, u_n, \psi) = 0, \ k = 1, \cdots, m, \ n = 1, 2, \cdots. \tag{67′}$$

Для псевдодифференциальных операторов $\lambda_j(t, x, D_x)$, $j = 1, \cdots, m$, с символами $\lambda_j(t, x, \xi) \in GS\left(\gamma, \rho, \frac{\beta j}{m}\right)$ справедливы оценки (см. [10])

$$\|\lambda_j(t, x, D_x) f\|_{s'} \leqslant c\,(s - s')^{-\frac{\gamma\beta j}{m}} \|f\|_s \tag{68}$$

для произвольной функции $f \in G(\gamma, s)$, $0 < s' < s < 1$.

Поэтому применяя оценки (50) имеем

$$\|\partial_t^{m-2} u_n\|_{s_1} \leqslant \int_0^t \|K_{m-2}(t, t_1)\, Lu_n\|_{s_1} dt_1 \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t \|K_{m-2}(t, t_1)\|_{s_1} \|\lambda_1 \partial_{t_1}^{m-1} u_{n-1}\|_{s_1} dt_1 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c}{(s_2-s_1)^{\beta\gamma/m}} \int_0^t \|K_{m-2}(t, t_1)\|_{s_1} \|\partial_{t_1}^{m-1} u_{n-1}\|_{s_2} dt_1 \leqslant \cdots \leqslant$$

$$\leqslant c\,[(s_2-s_1)\cdots(s_n-s_{n-1})]^{-\frac{\beta\gamma}{m}} K_{m-2}\, K_{m-1}^{n-1} \hat{f}(t, x).$$

Учитывая далее условия (19), (37) теоремы 4, получаем

$$\|\partial_t^{m-2} u_n\|_{s_1} \leqslant (tc)^n \int_0^t \|K_{m-2}(t, t_1)\|_{s_1} \|\hat{f}\|_{s_n, \infty} dt_1,$$

откуда следует сходимость ряда $\sum_1^\infty u_n$ к решению u задачи

$$Lu = f + \lambda_1 \partial_t^{m-1} u, \tag{69}$$

$$\lim_{t\to 0} V_k(t, u, \psi) = 0, \quad k=1,\cdots, m, \tag{69'}$$

причем для решений u этой задачи справедлива оценка

$$\|\partial_t^{m-2} u\|_s \leqslant \int_0^t \|K_{m-2}(t, t_1)\|_s \|(L-\lambda_1 \partial_{t_1}^{m-1})\, u\|_{s', \infty} dt_1. \tag{70}$$

На втором этапе введем последовательные приближения

$$(L-\lambda_1 \partial_t^{m-1})\, u_1 = \hat{f}(t, x), \quad (L-\lambda_1 \partial_t^{m-1})\, u_n = \lambda_2 \partial_t^{m-2} u_{n-1} \tag{71}$$

с нулевыми начальными условиями (67').

С помощью оценок (70) имеем $(s < s_1 < s_2 < \cdots)$

$$\|\partial_t^{m-3} u_n\|_s \leqslant \int_0^t \|K_{m-3}(t, t_1)\|_{s_1} \|(L-\lambda_1 \partial_{t_1}^{m-1})\, u_n\|_{s_1} dt_1 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c}{(s_2-s_1)^{2\beta\gamma/m}} \int_0^t \|K_{m-3}(t, t_1)\|_{s_1} \|\partial_{t_1}^{m-1} u_{n-1}\|_{s_2} dt_1 \leqslant$$

$$\leqslant c\,(s_2-s_1)^{-\frac{2\beta\gamma}{m}} \int_0^t K_{m-3}(t, t_1)\|_{s_1} \int_0^t \|K_{m-2}(t_1, t_2)\|_{s_1} \times$$

$$\times \|(L-\lambda_1 \partial_{t_2}^{m-1})\, u_{n-1}\|_{s_2} \|dt_2 dt_1 \leqslant c n^{\frac{2n\beta\gamma}{m}} \int_0^t \|K_{m-3}\|_{s_1} K_{m-2}^{n-1} \hat{f}\, dt_1 \leqslant$$

$$\leqslant (t^2 c)^n\, n^{2n\left(\frac{\beta\gamma}{m}-1\right)} \int_0^t \|K_{m-3}(t, t_1)\|_{s_1} \|\hat{f}\|_{s_n, \infty} dt_1$$

или

$$\|\partial_t^{m-3} u_n\|_s \leqslant (tM)^n \int_0^t \|K_{m-3}(t, t_1)\|_{s_1} \|\hat{f}\|_{s_n} \cdot dt_1,$$

откуда следует существование решения $u = \sum_1^\infty u_n$ задачи

$$Lu = \lambda_1 \partial_t^{m-1} u + \lambda_2 \partial_t^{m-2} u + \hat{f}(t, x), \tag{72}$$

$$\lim_{t \to 0} V_k(t, u, \psi) = 0, \quad k = 1, \cdots, m, \tag{72'}$$

причем для решений этой задачи справедлива оценка $(0 < s < s_1 < 1)$

$$\|\partial_t^{m-3} u\|_s \leqslant \int_0^t \|K_{m-3}(t, t_1)\|_{s_1} \|(L - \lambda_1 \partial_{t_1}^{m-1} - \lambda_2 \partial_{t_1}^{m-2}) u\|_{s_1} \cdot dt_1. \tag{73}$$

Продолжая эту процедуру по индукции, на последнем этапе введем последовательные приближения

$$\left(L - \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j \partial_t^{m-j}\right) u_1 = \hat{f}, \quad \left(L - \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j \partial_t^{m-j}\right) u_n = \lambda_m u_{n-1} \tag{74}$$

с нулевыми начальными условиями (67′), причем по индуктивному предположению существует решение задачи

$$\left(L - \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j \partial_t^{m-j}\right) u = \hat{f}(t, x), \tag{75}$$

$$\lim_{t \to 0} V_k(t, u, \psi) = 0, \quad k = 1, \cdots, m, \tag{75'}$$

причем каждое решение задачи (75)—(75′) удовлетворяет оценке $(s < s_1)$

$$\|\partial_t u\|_s \leqslant c \int_0^t \|K_1(t, t_1)\|_{s_1} \left\| \left(L - \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j \partial_{t_1}^{m-j}\right) u \right\|_{s_1} \cdot dt_1. \tag{76}$$

Итак для задач (74) справедливы оценки

$$\|u_n\|_s \leqslant \int_0^t \|K(t, t_1)\|_{s_1} \|(L - \sum_j \lambda_j \partial_{t_1}^{m-j}) u_n\|_{s_1} dt_1 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c}{(s_2 - s_1)^{\beta\gamma}} \int_0^t \|K(t, t_1)\|_{s_1} \|u_{n-1}\|_{s_2} dt_1$$

ввиду (50) и (76). Далее как и раньше с учетом условий (19), (37) получаем

$$\|u_n\|_1 \leqslant c^n \, n^{n/3\gamma} \, K^n \hat{f} \leqslant (Mt)^n, \tag{77}$$

откуда и следует сходимость ряда $\sum\limits_{1}^{\infty} u_n$ к решению u задачи (38′) — (39′). Теорема 4 доказана.

§ 7. Примеры

Пример 1. Для оператора второго порядка

$$P_2 = \partial_t^2 + b\,(t,\ x)\ \partial_x^2 + \frac{d}{4\,t^2},\ d \neq 0,\ d \in R \tag{78}$$

фундаментальная система $\psi_{1,\,2} \in \operatorname{Ker}\left(\partial_t^2 + \dfrac{d}{4t^2}\right)$ имеет вид

$$\psi_1(t) = t^{\sigma},\ \psi_2(t) = \begin{cases} t^{1-\sigma}, & d \neq 1 \\ \sqrt{t}\ln t, & d = 1, \end{cases}$$

где

$$\sigma = \frac{1 - \sqrt{1-d}}{2},$$

$$W(t,\ \psi) = \begin{cases} 1 - 2\sigma, & d \neq 1 \\ 1, & d = 1. \end{cases}$$

Для начальной задачи

$$P_2\, u = f, \tag{79}$$

$$\lim_{t\to 0} W(t,\ \psi_1, u) = f_1(x),\ \lim_{t\to 0} W(t,\ u,\ \psi_2) = f_2(x) \tag{80}$$

справедлива теорема 1. Если $d > -8$, то непосредственный подсчет показывает, что третье из условий (17′) выполнено, поэтому для задачи (79)—(80) справедлив вариант теоремы 1 с условиями

$$f \in C_t^0(G_T),\ f_{-,\,2} \in G_T \tag{81}$$

вместо условий (17) (см. замечание к теореме 1).

Замечание. Если для уравнения (1) выполнено условие (3), то энергетическим методом нетрудно доказать существование решений задач Коши

$$[\partial_t^2 + q\,(t,\ x)]\,\psi_1(t,\ x) = 0, \tag{82}$$

$$\psi_1(0,\ x) = 0,\quad \psi_{1t}(0,\ x) = -1; \tag{83}$$

$$[\partial_t^2 + q\,(t,\ x)]\,\psi_2(t,\ x) = 0, \tag{84}$$

$$\psi_2(0,\ x) = -1,\quad \psi_{2t}(0,\ x) = 0. \tag{85}$$

Выбирая в качестве фундаментальной системы $(\psi_1,\ \psi_2)$ эти решения, начальная задача с заданными вронскианами

$$[\partial_t^2 + b(t, x)\,\partial_x^2 + q(t, x)]\,u = f(t, x) \tag{86}$$

$$\lim_{t\to 0} W(t, \psi_1, u) = f_1(x), \ \lim_{t\to 0} W(t, u, \psi_2) = f_2(x) \tag{87}$$

переходит в обычную задачу Коши (1)—(2).

Если же условие (3) нарушено, то из вышеприведенного примера 1 видно, что ядро оператора $\partial_t^2 + q$ может не содержать функции $\psi(t, x)$ с ненулевым конечным следом на отрезке прямой $t=0$.

Пример 2. Рассмотрим начальную задачу для системы первого порядка

$$(\partial_t - A)\,v = B\,\partial_x v + F, \tag{88}$$

$$\lim_{t\to 0} Q_1 v = 0, \tag{89}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ q_0 = \frac{n(n-1)}{t^2} + b(t),\ n>1$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dfrac{n(n-1)}{t^2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{90}$$

$${}^t v = (v_1, v_2, v_3).$$

Матрица Q_1 находится из уравнения (30) и имеет вид

$$Q_1 = \begin{pmatrix} \varphi_1 & 0 & -\varphi_{1t} \\ 0 & 1 & 0 \\ \varphi_2 & 0 & -\varphi_{2t} \end{pmatrix}, \quad Q_1^{-1} = \frac{1}{2n-1}\begin{pmatrix} -\varphi_{2t} & 0 & \varphi_{1t} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\varphi_2 & 0 & \varphi_1 \end{pmatrix}, \tag{91}$$

$$\varphi_1 = t^n, \ \varphi_2 = t^{1-n}, \ \det Q_1 = 2n-1.$$

Для начальной задачи (88)—(89) справедлива теорема 5, причем условие (34) упрощается и имеет вид

$$\int_0^T \frac{b(t)}{t^{2(n-1)}}\,dt < \infty. \tag{92}$$

Это условие указывает класс возможных возмущений матрицы A_1.

Отметим, что остается открытым вопрос о том может ли показатель γ (класса Жевре, которому принадлежит решение) зависить от весовых функций $\psi_1, \cdots, \psi_m$. Это было бы так, если можно было бы выбрать функции $f, \psi_1, \cdots, \psi_m$ так, чтобы вместо (17) имели место неравенства

$$K_j K^{n-1} f(t, x, r_\alpha) \leqslant \frac{(tM)^p}{p!} \tag{93}$$

с $p \neq mn$.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 25.III.1979

Գ. Ռ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ. Վրոնսկիաններով սկզբնական խնդրի մասին (*ամփոփում*)

Հոդվածում առաջարկվում է Կոշու խնդրի ընդհանրացում (սկզբնական մակերևույթի վրա Կոշու տվյալների փոխարեն տրվում են որոշակի վրոնսկիաններ), որի համար ապացուցվում է Կոշի-Կովալևսկայայի թեորեմ անսահմանափակ (սկզբնական մակերևույթի վրա) գործակիցներով հավասարումների և համակարգերի համար։

G. R. HOVHANISIAN. *On the initial value problem with given wronskians* (summary)

In the paper the generalization of Cauchy problem is proposed. In this initial value problem the wronskians are given on the initial hyperplane instead of Cauchy data. A Cauchy—Kowalevska type theorem for differential equations and systems with unbounded coefficients (on initial hyperplane) is proved for this problem.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. Ниренберг.* Лекции по нелинейному функциональному анализу, „Мир", М., 1977.
2. *А. В. Бицадзе.* Уравнения смешанного типа, Итоги науки, М., 1959.
3. *M. S. Baouendi, G. Goulaouic.* Cauchy problems with characteristic initial hypersurface, Comm. Pure Appl. Math., 26:4, 1973, 455—475.
4. *M. S. Baouendi, G. Goulaouic.* Remarks on the abstract form of nonlinear Cauchy—Kovalevska theorem, Comm. in Partial Differential Equations, 2:11, 1977, 1151—1162.
5. *В. Ф. Короп.* Обратная задача рассеяния для уравнений с особенностью, Сиб. мат. журнал 2:5, 1961, 672—693.
6. *В. А. Марченко.* Спектральная теория операторов Штурма—Лиувилля, „Наукова думка", Киев, 1972.
7. *А. Б. Нерсесян.* Задача Коши для симметрической гиперболической системы, вырождающейся на начальной гиперплоскости, ДАН СССР, 196:2, 1971, 289—292.
8. *Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, М., 1958.
9. *Ф. Хартман.* Обыкновенные дифференциальные уравнения, „Мир", М., 1970.
10. *S. Steinberg.* Existence and uniqueness of hyperbolic equations which are not necessarely strictely hyperbolic, J. of Different. Equat., 17:1, 1975, 119—153.