В. М. МАРТИРОСЯН

О ЗАМКНИИ, МИНИМАЛЬНОСТИ И БАЗИСНОСТИ
 СИСТЕМ ПРОСТЕЙШИХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ
 НА СИСТЕМЕ ЛУЧЕЙ

В в е д е н и е

Пусть $\{\lambda_k\}_1^\infty$ — произвольная последовательность комплексных чисел из угловой области $\Delta(\gamma; \delta) = \{z: \gamma < \text{Arg } z < \delta\}$. Следуя М. М. Джрбашяну обозначим через s_k кратность появления числа λ_k на отрезке $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$. С этой последовательностью ассоциируем систему простейших рациональных дробей $\{r_k(z) = (s_k - 1)! (z - \lambda_k)^{-s_k}\}_1^\infty$. Если $1 < p < +\infty$, $-1 < \omega < p - 1$, то элементы системы $\{r_k(z)\}_1^\infty$ принадлежат пространству $H_{p, \infty}[\Delta^*(\gamma; \delta)]$ функций f , голоморфных в $\Delta^*(\gamma; \delta) = \mathbb{C} \setminus \Delta(\gamma; \delta)$ и таких, что

$$\|f\|_{H_{p, \infty}[\Delta^*(\gamma; \delta)]}^{1/p} = \sup_{\delta < \varphi < \gamma + 2\pi} \left\{ \int_0^{+\infty} |F(re^{i\varphi})|^p r^\omega dr \right\}^{1/p} < +\infty.$$

В работе автора [1] были установлены критерии полноты (в $H_{p, \infty}[\Delta^*(\gamma; \delta)]$), минимальности и базисности в своем замыкании системы $\{r_k(z)\}_1^\infty$. В случае неполноты там же было дано полное внутреннее описание замыкания системы $\{r_k(z)\}_1^\infty$, а в случае минимальности была построена биортогональная с ней система.

В настоящей работе рассматриваются системы простейших рациональных дробей вида $\{r(\zeta; \lambda_k) = (\zeta - \lambda_k)^{-s_k}\}_1^\infty$, где $\{\lambda_k\}_1^\infty$ — уже последовательность, элементы которой расположены вне системы лучей Γ , где

$$\Gamma = \bigcup_{n=1}^N \{\zeta: \text{Arg } \zeta = \vartheta_n, 0 \leq |\zeta| < +\infty\}, 0 \leq \vartheta_1 < \dots < \vartheta_N < 2\pi.$$

Ввиду такого выбора последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$ элементы системы $\{r(\zeta; \lambda_k)\}_1^\infty$ принадлежат пространству $L_{p, \infty}(\Gamma)$ измеримых на Γ функций f , удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{L_{p, \infty}} = \left\{ \int_{\Gamma} |f(\zeta)|^p |\zeta|^\omega |d\zeta| \right\}^{1/p} < +\infty.$$

В данной работе устанавливаются критерии полноты и минимальности (в $L_{p, \infty}(\Gamma)$) системы $\{r(\zeta; \lambda_k)\}_1^\infty$. В случае неполноты системы

$\{r(\zeta; \lambda_k)\}_1^\infty$ дается полное внутреннее описание ее замыкания, а в случае минимальности строится биортогональная с ней система. Устанавливается также критерий базисности (в своем замыкании) системы $\{r(\zeta; \lambda_k)\}_1^\infty$.

Эти результаты получаются на основании описанных выше результатов из работы автора [1]. Именно, вопросы полноты, минимальности, описания замыкания и базисности в $L_{p, \infty}(\Gamma)$ сводятся к соответствующим вопросам в пространствах $H_{p, \infty}[\Delta_n^*] \equiv H_{p, \infty}[\Delta^*(\vartheta_n; \vartheta_{n+1})]$, $n=1, \dots, N$ (здесь положено $\vartheta_{N+1} = \vartheta_N + 2\pi$). Это становится возможным благодаря установленному в настоящей работе факту о представимости $L_{p, \infty}(\Gamma)$ в виде прямой суммы своих подпространств $H_{p, \infty}[\Delta_n^*]$, $n=1, \dots, N$.

Обозначения и напоминания

(а) Пусть $N > 2$ и

$$0 \leq \vartheta_1 < \dots < \vartheta_N, \vartheta_{N+1} = \vartheta_N + 2\pi.$$

Для значений $n=1, \dots, N$ обозначим через

$$\Delta_n = \{z: \vartheta_n < \text{Arg } z < \vartheta_{n+1}, 0 < |z| < +\infty\},$$

$$\Delta_n^* = \{z: \vartheta_{n+1} < \text{Arg } z < \vartheta_n + 2\pi, 0 < |z| < +\infty\},$$

взаимно-дополнительные угловые области на конечной комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и положим

$$\alpha_n = \frac{\pi}{\vartheta_{n+1} - \vartheta_n}, \quad \eta_n = \frac{\vartheta_{n+1} + \vartheta_n}{2}.$$

Очевидно, что π/α_n это раствор угла Δ_n , а луч $\{re^{i\eta_n} : r > 0\}$ является его биссектрисой.

Далее, обозначим через

$$\Gamma = \bigcup_{n=1}^N \Gamma_{\vartheta_n}$$

систему N лучей Γ_{ϑ_n} , исходящих из точки $\zeta = 0$, где

$$\Gamma_{\vartheta_n} = \{\zeta: \text{Arg } \zeta = \vartheta_n, 0 \leq |\zeta| < +\infty\}.$$

Очевидно, что области Δ_n не пересекаются, и если положить

$$\Delta = \bigcup_{n=1}^N \Delta_n,$$

то будем иметь

$$\Gamma \cap \Delta = \emptyset, \quad \Gamma \cup \Delta = \mathbb{C}. \quad (1)$$

Очевидно также, что $\Gamma = \partial\Delta$.

(б) Пусть $\Delta \equiv \{\lambda_k\}_1^\infty \subset \Delta$ — произвольная последовательность, подчиненная лишь тому условию, что в каждой области Δ_n содержится

бесконечное число ее членов. (Это последнее ограничение не диктуется существом дела и мы его накладываем лишь для упрощения формулировок наших теорем).

Для произвольного целого $j \geq 1$ обозначим через s_j кратность появления числа λ_j на отрезке $\{\lambda_1, \dots, \lambda_j\}$, а через p_j обозначим кратность появления числа λ_j во всей последовательности $\Lambda \equiv \{\lambda_k\}_1^\infty$. Очевидно, что

$$1 \leq s_j \leq p_j \leq +\infty \quad (j=1, 2, \dots).$$

Для данного n ($n=1, \dots, N$) обозначим через $\Lambda^{(n)} \equiv \{\lambda_k^{(n)}\}_{k=1}^n$ ту подпоследовательность последовательности $\Lambda \equiv \{\lambda_k\}_1^\infty$, элементы которой лежат в Δ_n .

Далее, для любого целого $j \geq 1$ обозначим через $s_j^{(n)}$ кратность появления числа $\lambda_j^{(n)}$ на отрезке $\{\lambda_1^{(n)}, \dots, \lambda_j^{(n)}\}$, а через $p_j^{(n)}$ обозначим кратность появления числа $\lambda_j^{(n)}$ во всей последовательности $\Lambda^{(n)} \equiv \{\lambda_k^{(n)}\}_1^n$.

Легко видеть, что если сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 + |\lambda_k^{(n)}|^{2\alpha_n})^{-1} \operatorname{Re} [\lambda_k^{(n)} \exp(-i\eta_n)]^{\alpha_n} *, \quad (2)$$

то число $p_k^{(n)}$ конечно при любом $k > 1$.

При условии сходимости ряда (2) бесконечное произведение

$$B_{\Delta_n}(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{[z \exp(-i\eta_n)]^{\alpha_n} - [\lambda_k^{(n)} \exp(-i\eta_n)]^{\alpha_n}}{[z \exp(-i\eta_n)]^{\alpha_n} + [\lambda_k^{(n)} \exp(-i\eta_n)]^{\alpha_n}} x_k,$$

$$x_k = |1 - [\lambda_k^{(n)} \exp(-i\eta_n)]^{2\alpha_n}| / |1 - [\lambda_k^{(n)} \exp(-i\eta_n)]^{\alpha_n}|,$$

сходится в области Δ_n и определяет там ограниченную единицей аналитическую функцию $B_{\Delta_n}(z)$. При этом $B_{\Delta_n}(z)$ обращается в нуль лишь в точках последовательности $\Lambda^{(n)} \equiv \{\lambda_k^{(n)}\}_{k=1}^n$ и точка $z = \lambda_k^{(n)}$ является для нее нулем кратности $p_k^{(n)}$ (см. [2]).

(в) Всюду ниже будем полагать, что

$$1 < p < +\infty, \quad -1 < \omega < p - 1. \quad (3)$$

Обозначим через $L_{p, \omega}(\Gamma)$ класс измеримых на Γ функций f таких, что

$$\|f\|_{p, \omega} = \left\{ \int_{\Gamma} |f(\zeta)|^p |\zeta|^\omega |d\zeta| \right\}^{1/p} < +\infty.$$

Далее, обозначим через $H_{p, \omega}[\Delta_n]$ класс голоморфных в Δ_n функций F , удовлетворяющих условию

* Здесь и ниже под z^α понимаем ту ветвь этой функции, которая на полуоси $(0, +\infty)$ принимает положительные значения.

$$\|F\|_{H_{p,\omega}[\Delta_n]}^* = \sup_{\theta_n < \varphi < \theta_{n+1}} \left\{ \int_0^{+\infty} |F(re^{i\varphi})|^p r^\omega dr \right\}^{1/p} < +\infty. \quad (4)$$

Аналогично, $H_{p,\omega}[\Delta_n^*]$ — это класс голоморфных в Δ_n^* функций F , для которых

$$\|F\|_{H_{p,\omega}[\Delta_n^*]}^* = \sup_{\theta_{n+1} < \varphi < \theta_{n+2\pi}} \left\{ \int_0^{+\infty} |F(re^{i\varphi})|^p r^\omega dr \right\}^{1/p} < +\infty. \quad (4')$$

Следует отметить, что такие классы в угловых областях при $p=2$ и $-1 < \omega < 1$ были введены и исследованы М. М. Джрбашяном и А. Е. Аветисяном [3] (см. также гл. VII монографии [4]), а в случае (3) — автором [1]. Эти классы являются естественными обобщениями на произвольные угловые области классов H_p в полуплоскости. Поэтому они обладают многими свойствами классов H_p . В частности, справедлива следующая теорема (см. [4], теорему 7.5, а также [1], теорему 1).

Теорема А. Если $F \in H_{p,\omega}[\Delta_n^*]$, то:

1°. Почти всюду на $\partial\Delta_n^*$ функция F имеет некасательные граничные значения $F(\zeta)$, причем

$$\|F\|_{H_{p,\omega}[\Delta_n^*]}^* = \left\{ \int_{\partial\Delta_n^*} |F(\zeta)|^p |\zeta|^\omega |d\zeta| \right\}^{1/p} < +\infty \quad (5)$$

и справедливы равенства

$$\lim_{\varphi \rightarrow \theta_j} \int_0^{+\infty} |F(re^{i\varphi}) - F(re^{i\theta_j})|^p r^\omega dr = 0 \quad (j=n, n+1); \quad (6)$$

2°. Имеет место интегральная формула

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta_n^*} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} F(z), & \text{при } z \in \Delta_n^*, \\ 0, & \text{при } z \in \Delta_n, \end{cases}$$

где направление на $\partial\Delta_n^*$ совпадает с направлением положительного обхода области Δ_n^* .

Аналогичная теорема справедлива и для $H_{p,\omega}[\Delta_n]$.

Нам необходимо ввести еще один класс функций. Именно, при условии сходимости ряда (2) обозначим через $H_{p,\omega}[\Delta_n^*; \Lambda^{(n)}]$ класс тех F , которые удовлетворяют условиям:

1) $F \in H_{p,\omega}[\Delta_n^*]$,

2) $F(\zeta) B_{\Delta_n}(\zeta)$, $\zeta \in \partial\Delta_n^*$, является граничной функцией некоторой функции из $H_{p,\omega}[\Delta_n]$.

Грубо говоря, $H_{p, \infty}[\Delta_n^*; \Lambda^{(n)}]$ — это подкласс тех F из $H_{p, \infty}[\Delta_n^*]$, которые в определенном смысле допускают мероморфное продолжение в область Δ_n , с возможными полюсами в точках последовательности $\Lambda^{(n)}$. Кроме того, если это продолжение умножить на B_{Δ_n} , то полученная функция будет из $H_{p, \infty}[\Delta_n]$.

(г) Для удобства читателя мы здесь напомним также определения базисных и минимальных систем.

Пусть $\{x_k\}_1^n$ — система элементов банахова пространства X .

Обозначим через $(\{x_k\}_1^\infty; X)$ замыкание в топологии X линейной оболочки системы $\{x_k\}_1^\infty$.

По определению, $\{x_k\}_1^\infty$ является базисом $(\{x_k\}_1^\infty; X)$ если любой элемент $x \in (\{x_k\}_1^\infty; X)$ единственным образом представим в виде суммы ряда

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) x_k,$$

сходящегося в топологии X . Здесь $c_k(x)$ — комплексные коэффициенты, единственным образом определяемые по элементу x .

Скажем, что система $\{x_k\}_1^\infty$ является базисом $(\{x_k\}_1^\infty; X)$, изоморфным стандартному базису пространства l_p , если существует ограниченный обратимый линейный оператор $R: (\{x_k\}_1^\infty; X) \rightarrow l_p$ такой, что

$$R(x_k) = \{\delta_{k, m}\}_{m=1}^\infty \quad (k = 1, 2, \dots),$$

где $\delta_{k, m}$ — символ Кронекера. В этом определении мы через l_p обозначили пространство суммируемых со степенью p комплексных последовательностей.

Далее, система $\{x_k\}_1^\infty$ называется минимальной (или топологически свободной) в X , если ни один ее член нельзя приблизить в топологии X линейными комбинациями остальных членов. Минимальность системы $\{x_k\}_1^\infty$ необходима и достаточна для существования биортональной с ней системы, т. е. такой системы ограниченных линейных функционалов $\{x_k^*\}_1^\infty \subset X^*$, что

$$x_k^*(x_m) = \delta_{k, m} = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \neq m, \end{cases} \quad (k, m = 1, 2, \dots).$$

Формулировки результатов

(а) Важную роль при доказательстве результатов этой работы играет теорема о представлении пространства $L_{p, \infty}(\Gamma)$ в виде прямой суммы ее „хороших“ подпространств. Прежде чем сформулировать эту теорему, сделаем несколько замечаний.

В пространстве $H_{p, \infty}[\Delta_n^*]$ можно задать норму как равенством (4'), так и равенством (5). Более того, справедливы следующие утверждения (см. [1], теорему 2):

1°. $H_{p, \infty}[\Delta_n^*]$ с нормой (4') является банаховым пространством;

2°. Для любого $F \in H_{p, \infty}[\Delta_n^*]$ справедливы неравенства

$$2^{-1/p} \|F\|_{H_{p,\omega}[\Delta_n^*]} \leq \|F\|_{H_{p,\omega}[\Delta_n^*]} \leq \|F\|_{H_{p,\omega}[\Delta_n^*]}. \quad (7)$$

Пусть теперь $F \in H_{p,\omega}[\Delta_n^*]$. Так как система лучей Γ лежит в замкнутой области $\overline{\Delta_n^*}$, то мы можем рассмотреть сужение функции F на Γ (на $\partial\Delta_n^*$ берем граничные значения F). Легко видеть, что F полностью определяется своим сужением на Γ (см. утверждение 2 теоремы А) и ввиду (4') и (5) это сужение принадлежит $L_{p,\omega}(\Gamma)$. При этом, если учесть также (6), получим неравенства

$$N^{-1/p} \|F\|_{p,\omega} \leq \|F\|_{H_{p,\omega}[\Delta_n^*]} \leq \|F\|_{p,\omega}. \quad (8)$$

Таким образом, $H_{p,\omega}[\Delta_n^*]$ можно рассматривать как замкнутое подпространство банахова пространства $L_{p,\omega}(\Gamma)$.

Замечание. Из неравенств (7) и (8) следует, что нормы $\|\cdot\|_{H_{p,\omega}[\Delta_n^*]}$, $\|\cdot\|_{H_{p,\omega}[\Delta_n^*]}$ и $\|\cdot\|_{p,\omega}$ определяют в $H_{p,\omega}[\Delta_n^*]$ одну и ту же топологию. Этим фактом мы часто будем пользоваться без напоминания.

Справедлива следующая теорема о разложении пространства $L_{p,\omega}(\Gamma)$ в прямую сумму ее подпространств $H_{p,\omega}[\Delta_n^*]$ ($n=1, \dots, N$).

Теорема 1. Пусть $f \in L_{p,\omega}(\Gamma)$ произвольна. Тогда функция f единственным образом представима в виде

$$f(\zeta) = \sum_{n=1}^N f_n(\zeta) \text{ почти всюду на } \Gamma, \quad (9)$$

где $f_n \in H_{p,\omega}[\Delta_n^*]$ ($n=1, \dots, N$). При этом

$$\|f_n\|_{p,\omega} \leq A_{p,\omega} \|f\|_{p,\omega} \quad (n=1, \dots, N), \quad (10)$$

где постоянная $A_{p,\omega} \in (0, +\infty)$ не зависит от f .

(б) С последовательностью $\Lambda = \{\lambda_k\}_1^\infty$ ассоциируем систему простейших рациональных дробей $\{r(\zeta; \lambda_k)\}_1^\infty$, положив

$$r(\zeta; \lambda_k) = (\zeta - \lambda_k)^{-s_k} \quad (k=1, 2, \dots).$$

Так как $\{\lambda_k\}_1^\infty \subset \Delta$, то ввиду (1) полюсы функций $r(\zeta; \lambda_k)$ расположены вне Γ . Следовательно, $\{r(\zeta; \lambda_k)\}_1^\infty \subset L_{p,\omega}(\Gamma)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Для полноты в $L_{p,\omega}(\Gamma)$ системы $\{r(\zeta; \lambda_k)\}_1^\infty$ необходимо и достаточно, чтобы ряды (2) расходились при всех $n=1, \dots, N$.

В частном случае, когда $N=2$, $\vartheta_1=0$, $\vartheta_2=\pi$, $\omega=0$ и члены последовательности $\Lambda = \{\lambda_k\}_1^\infty$ попарно различны, утверждение теоремы 2 было установлено С. Н. Бернштейном [5] (см. также [6], стр. 264).

Следует также отметить, что утверждения, аналогичные утверждениям теоремы 2 и приводимой ниже теоремы 3, отличными от приведенных в этой работе методами установлены И. О. Хачатрян

(сообщение на II конференции по применениям методов комплексного анализа, Черногоровка, 1979 г.);

Теперь обозначим через

$$(\{r(\zeta; \lambda_k)\}_1^\infty; L_{p, \omega}(\Gamma))$$

замыкание в топологии $L_{p, \omega}(\Gamma)$ линейной оболочки системы $\{r(\zeta; \lambda_k)\}_1^\infty$.

Из теоремы 2 следует, что если хоть при одном $n = n_0$ ряд (2) сходится, то система $\{r(\zeta; \lambda_k)\}_1^\infty$ не полна в $L_{p, \omega}(\Gamma)$ и, следовательно, $(\{r(\zeta; \lambda_k)\}_1^\infty; L_{p, \omega}(\Gamma))$ не совпадает с $L_{p, \omega}(\Gamma)$. В следующей теореме содержится как теорема 2 (в чем мы убедимся ниже), так и дается полное внутреннее описание пространства $(\{r(\zeta; \lambda_k)\}_1^\infty; L_{p, \omega}(\Gamma))$ в случае неполноты системы $\{r(\zeta; \lambda_k)\}_1^\infty$.

Теорема 3. Класс $(\{r(\zeta; \lambda_k)\}_1^\infty; L_{p, \omega}(\Gamma))$ совпадает с множеством функций φ , допускающих представление вида

$$\varphi(\zeta) = \sum_{n=1}^N \varphi_n(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma, \quad (11)$$

где $\varphi_n \in H_{p, \omega}[\Delta_n^*]$, когда при данном n ряд (2) расходится, и $\varphi_n \in H_{p, \omega}[\Delta_n^*; \Lambda^{(n)}]$, когда при данном n ряд (2) сходится.

Сформулируем теперь критерий минимальности системы $\{r(\zeta; \lambda_k)\}_1^\infty$.

Теорема 4. Система $\{r(\zeta; \lambda_k)\}_1^\infty$ минимальна в $L_{p, \omega}(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда ряды (2) сходятся при всех $n=1, \dots, N$.

В случае, когда ряды (2) сходятся при всех $n=1, \dots, N$, мы построим систему $\{\Omega(\zeta; \lambda_k)\}_1^\infty \subset L_{q, \omega}(\Gamma)$ ($1/p + 1/q = 1$), биортогональную с $\{r(\zeta; \lambda_k)\}_1^\infty$ в смысле

$$\int_{\Gamma} r(\zeta; \lambda_k) \overline{\Omega(\zeta; \lambda_m)} |\zeta|^\omega |d\zeta| = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \neq m, \end{cases} \quad (k, m \geq 1). \quad (12)$$

Наконец, сформулируем последний результат этой работы. Для этого введем еще одно обозначение. Если $\lambda_k \in \Delta_n$ при данных k и n ($k > 1, 1 \leq n < N$), то положим

$$\beta_k = \{|\lambda_k|^{\omega + (1 - \varepsilon_n)(2 - q)} [|\lambda_k|^{1 - \varepsilon_n} \operatorname{Re}(e^{-i\eta_n} \lambda_k)^{\varepsilon_n}]^q (s_k - 1)^{-1}\}^{1/q},$$

где $1/p + 1/q = 1$, $\tilde{\omega} = (1 - q)\omega$.

Теорема 5. Если выполняются условия

$$\inf_{k > 1} \prod_{\substack{j=1 \\ \lambda_j^{(n)} \neq \lambda_k^{(n)}}}^{\infty} \left| \frac{[\lambda_k^{(n)} \exp(-i\eta_n)]^{\varepsilon_n} - [\lambda_j^{(n)} \exp(-i\eta_n)]^{\varepsilon_n}}{[\lambda_k^{(n)} \exp(-i\eta_n)]^{\varepsilon_n} + [\lambda_j^{(n)} \exp(-i\eta_n)]^{\varepsilon_n}} \right| > 0 \quad (n=1, \dots, N), \quad (13)$$

$$\sup_{k > 1} |\rho_k| < +\infty, \quad (14)$$

то система $\{\beta_k r(\zeta; \lambda_k)\}_1^{\infty}$ является базисом пространства $(\{r(\zeta; \lambda_k)\}_1^{\infty}; L_{p, \infty}(\Gamma))$, изоморфным стандартному базису пространства l_p .

Если же хоть одно из условий (13), (14) нарушается, то система $\{r(\zeta; \lambda_k)\}_1^{\infty}$ ни при какой перестановке членов не является базисом пространства $(\{r(\zeta; \lambda_k)\}_1^{\infty}; L_{p, \infty}(\Gamma))$.

Результаты, лежащие в основе доказательств сформулированных теорем

Пусть $f \in L_{p, \infty}(\Gamma)$. Очевидно, что при всех $n = 1, \dots, N$ имеем $f(re^{i\theta_n})r^{\omega/p} \in L_p(0, +\infty)$. Следовательно, справедливо следующее утверждение (см. [1], лемму 1).

Лемма А. При всех n ($n=1, \dots, N$) функция

$$F_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\theta_n}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma_{\theta_n}^*$$

аналитична в области $\mathbb{C} \setminus \Gamma_{\theta_n}$ и удовлетворяет неравенству

$$\sup_{\theta_n < \varphi < \theta_n + 2\pi} \left\{ \int_0^{+\infty} |F_n(re^{i\varphi})|^p r^{\omega} dr \right\}^{1/p} \leq B_{p, \infty} \|f\|_{p, \infty}, \quad (15)$$

где $B_{p, \infty} \in (0, +\infty)$ не зависит от f . Более того, функция F_n почти всюду на Γ_{θ_n} имеет угловые граничные значения $F_n^{(-)}(\zeta)$, $F_n^{(+)}(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma_{\theta_n}$, соответственно слева и справа от луча Γ_{θ_n} , причем $F_n^{(\pm)}(re^{i\theta_n})r^{\omega/p} \in L_p(0, +\infty)$ и

$$f(\zeta) = F_n^{(-)}(\zeta) + F_n^{(+)}(\zeta) \quad \text{почти всюду на } \Gamma_{\theta_n}. \quad (16)$$

В следующих четырех теоремах $n=1, \dots, N$. Эти утверждения также были установлены в работе автора [1].

Теорема В. Для полноты в $H_{p, \infty}[\Delta_n^*]$ системы $\{r(\zeta; \lambda_k^{(n)})\}_{k=1}^{\infty}$ необходимо и достаточно, чтобы ряд (2) расходился.

Теорема С. Если ряд (2) сходится, то

$$(\{r(\zeta; \lambda_k^{(n)})\}_{k=1}^{\infty}; H_{p, \infty}[\Delta_n^*]) = H_{p, \infty}[\Delta_n^*; \Lambda^{(n)}].$$

Через $(\{r(\zeta; \lambda_k^{(n)})\}_{k=1}^{\infty}; H_{p, \infty}[\Delta_n^*])$ мы обозначили замыкание в топологии $H_{p, \infty}[\Delta_n^*]$ линейной оболочки системы $\{r(\zeta; \lambda_k^{(n)})\}_{k=1}^{\infty}$.

Теорема Д. Система $\{r(\zeta; \lambda_k^{(n)})\}_{k=1}^{\infty}$ минимальна в $H_{p, \infty}[\Delta_n^*]$ тогда и только тогда, когда ряд (2) сходится.

Теорема Е. Если выполняются условия

* Полагаем, что направление на Γ_{θ_n} совпадает с направлением возрастания $|\zeta|$.

$$\inf_{k > 1} \prod_{\substack{j=1 \\ \lambda_j^{(n)} + \lambda_k^{(n)}}}^n \left| \frac{[\lambda_k^{(n)} \exp(-i\eta_n)]^{s_n} - [\lambda_j^{(n)} \exp(-i\eta_n)]^{s_n}}{[\lambda_k^{(n)} \exp(-i\eta_n)]^{s_n} + [\lambda_j^{(n)} \exp(-i\eta_n)]^{s_n}} \right| > 0, \quad (13')$$

$$\sup_{k > 1} \{p_k^{(n)}\} < +\infty, \quad (14)$$

то система $\{\beta_k^{(n)} r(\zeta; \lambda_k^{(n)})\}_{k=1}^n$, где

$$\beta_k^{(n)} = \{|\lambda_k^{(n)}|^{\alpha + (1-\varepsilon_n)(2-q)} [|\lambda_k^{(n)}|^{1-\varepsilon_n} \operatorname{Re}(e^{-i\eta_n} \lambda_k^{(n)})^{\varepsilon_n}]^q (s_k^{(n)} - 1)^{+1}\}^{1/q},$$

является базисом пространства $\{(r) \zeta; \lambda_k^{(n)}\}_{k=1}^n; H_{p, \infty}[\Delta_n^*]$, изоморфным стандартному базису пространства l_p .

Если же хоть одно из условий (13'), (14') нарушается, то система $\{(r) \zeta; \lambda_k^{(n)}\}_{k=1}^n$ ни при какой перестановке членов не является базисом пространства $\{(r) \zeta; \lambda_k^{(n)}\}_{k=1}^n; H_{p, \infty}[\Delta_n^*]$.

Предположим теперь, что при данном n ($n=1, \dots, N$) ряд (2) сходится. Положим

$$\tilde{\Omega}(\zeta; \lambda_k^{(n)}) = \frac{B_{\Delta_n}(\zeta)^{p_k^{(n)} - s_k^{(n)}}}{2\pi i} \sum_{\nu=0}^{s_k^{(n)} - s_k^{(n)}} \frac{a_\nu(\lambda_k^{(n)})}{(\zeta - \lambda_k^{(n)})^{p_k^{(n)} + s_k^{(n)} - \nu + 1}} \quad (k > 1), \quad (17)$$

где

$$a_\nu(\lambda_k^{(n)}) = \frac{1}{\nu!} \frac{d}{dz^\nu} \frac{(z - \lambda_k^{(n)})^{p_k^{(n)}}}{B_{\Delta_n}(z)} \Big|_{z=\lambda_k^{(n)}} \quad (0 \leq \nu \leq p_k^{(n)} - 1; k > 1).$$

Тогда будем иметь

$$\int_{\partial \Delta_n} r(\zeta; \lambda_k^{(n)}) \tilde{\Omega}(\zeta; \lambda_m^{(n)}) d\zeta = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \neq m, \end{cases} \quad (k, m \geq 1), \quad (18)$$

где направление на $\partial \Delta_n$ совпадает с направлением положительного обхода области Δ_n (см. [1], теорему 8).

Доказательства теорем 1—5

Доказательство теоремы 1. Пусть $f_n \in L_{p, \infty}(\Gamma)$. Для данного n ($n=1, \dots, N$) положим

$$f_n^{(+)}(z) = \begin{cases} F_n(z), & \text{при } z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma_{\delta_n}, \\ F_n^{(+)}(z), & \text{при } z \in \Gamma_{\delta_n}; \end{cases} \quad (19)$$

$$f_n^{(-)}(z) = \begin{cases} F_n(z), & \text{при } z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma_{\delta_n}, \\ F_n^{(-)}(z), & \text{при } z \in \Gamma_{\delta_n}. \end{cases} \quad (19')$$

где функции F_n , $F_n^{(+)}$ и $F_n^{(-)}$ определяются по лемме А. Тогда, в силу (16), почти всюду на Γ справедливо равенство

$$f(\zeta) = \sum_{n=1}^N [f_n^{(-)}(\zeta) - f_n^{(+)}(\zeta)]. \quad (20)$$

Определим теперь функции f_n ($n=1, \dots, N$) следующим образом:

$$f_n(\zeta) = f_{n+1}^{(-)}(\zeta) - f_n^{(+)}(\zeta), \text{ при } n=1, \dots, N-1;$$

$$f_N(\zeta) = f_1^{(-)}(\zeta) - f_N^{(+)}(\zeta).$$

Тогда равенство (20) можно переписать в виде (9), а из (19), (19') и (15) для всех $n=1, \dots, N$ будем иметь

$$f_n \in H_{p, \infty}[\Delta_n^*], [f_n]_{H_{p, \infty}[\Delta_n^*]} \leq 2B_{p, \infty} \|f_{p, \infty}\|.$$

Таким образом, представление (9) доказано, и, если учесть (7) и (8), из последних неравенств получим также неравенства (10).

Докажем единственность представления (9).

Пусть $f_n \in H_{p, \infty}[\Delta_n^*]$ ($n=1, \dots, N$) и

$$f_1(\zeta) + \dots + f_N(\zeta) = 0 \text{ почти всюду на } \Gamma.$$

Отсюда, в частности, имеем

$$f_1(\zeta) = - \sum_{n=2}^N f_n(\zeta) \text{ почти всюду на } \Gamma. \quad (21)$$

Далее, поскольку $f_1 \in H_{p, \infty}[\Delta_1^*]$, то в силу теоремы А можем написать

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta_1} \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0, \quad z \in \Delta_1. \quad (22)$$

С другой стороны, $\bigcap_{n=2}^N \Delta_n^* = \Delta_1$ и $f_n \in H_{p, \infty}[\Delta_n^*]$. Значит сужение каждой функции f_n ($n=2, \dots, N$) на область Δ_1 принадлежит классу $H_{p, \infty}[\Delta_1]$. Следовательно, $f_2 + \dots + f_N \in H_{p, \infty}[\Delta_1]$, и по теореме А

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta_1} \frac{-(f_2(\zeta) + \dots + f_N(\zeta))}{\zeta - z} d\zeta = - \sum_{n=2}^N f_n(z), \quad z \in \Delta_1. \quad (23)$$

Из этого представления на основании (21) и (22) получаем:

$$f_1(\zeta) = 0 \text{ почти всюду на } \partial \Delta_1 = \partial \Delta_1^*. \quad (24)$$

Но так как функция f_1 в области Δ_1^* представима интегралом Коши по своим граничным значениям на $\partial \Delta_1^*$, то $f_1(z) = 0$ при $z \in \Delta_1^*$. Из этого тождества, включения $\Gamma \subset \overline{\Delta_1^*}$ и (24) окончательно получаем: $f_1(\zeta) = 0$ почти всюду на Γ .

Аналогично можно доказать, что $f_n(\zeta) = 0$ ($n=2, \dots, N$) почти всюду на Γ . Отсюда следует единственность представления (9), и теорема доказана.

Доказательства теорем 2 и 3. Докажем сначала теорему 3. Пусть $\{Q_j\}_1^\infty$ — некоторая последовательность линейных комбинаций элементов системы $\{r(\zeta; \lambda_k)\}_1^\infty$. Так как эта система распадается на N подсистем $\{r(\zeta; \lambda_k^{(n)})\}_{k=1}^n$ ($n=1, \dots, N$), то каждое Q_j представимо в виде

$$Q_j = \sum_{n=1}^N Q_{j,n} \quad (j=1, 2, \dots), \quad (25)$$

где $Q_{j,n}$ — линейная комбинация элементов системы $\{r(\zeta; \lambda_k^{(n)})\}_{k=1}^n$. При этом $Q_{j,n} \in H_{p,\infty}[\Delta_n^*]$, поскольку $\{r(\zeta; \lambda_k^{(n)})\}_{k=1}^n \subset H_{p,\infty}[\Delta_n^*]$.

Если теперь $\varphi \in L_{p,\infty}(\Gamma)$, то по теореме 1

$$\varphi = \sum_{n=1}^N \varphi_n \quad (\varphi_n \in H_{p,\infty}[\Delta_n^*]),$$

и согласно (25) получаем

$$\varphi - Q_j = \sum_{n=1}^N (\varphi_n - Q_{j,n}) \quad (j=1, 2, \dots).$$

Следовательно, в силу той же теоремы 1 для всех $n=1, \dots, N$ справедливы неравенства

$$\|\varphi_n - Q_{j,n}\|_{p,\infty} \leq A_{p,\infty} \|\varphi - Q_j\|_{p,\infty} \quad (j=1, 2, \dots).$$

Кроме того, очевидны неравенства

$$\|\varphi - Q_j\|_{p,\infty} \leq \sum_{n=1}^N \|\varphi_n - Q_{j,n}\|_{p,\infty} \quad (j=1, 2, \dots).$$

Из последних неравенств заключаем, что последовательность $\{Q_j\}_1^\infty$ сходится в топологии $L_{p,\infty}(\Gamma)$ к функции $\varphi \in L_{p,\infty}(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда при каждом $n=1, \dots, N$ последовательность компонент $\{Q_{j,n}\}_{j=1}^\infty$ сходится в топологии $L_{p,\infty}(\Gamma)$ к соответствующей компоненте φ_n функции φ .

Таким образом, замыкание в топологии $L_{p,\infty}(\Gamma)$ системы $\{r(\zeta; \lambda_k)\}_1^\infty$ совпадает с множеством функций φ , допускающих представление вида $\varphi = \varphi_1 + \dots + \varphi_N$, где при каждом $n=1, \dots, N$ функция φ_n принадлежит замыканию в топологии $L_{p,\infty}(\Gamma)$ (или, что то же, — в топологии $H_{p,\infty}[\Delta_n^*]$) системы $\{r(\zeta; \lambda_k^{(n)})\}_{k=1}^n$.

Отсюда на основании теорем В и С получаем утверждение теоремы 3.

Теперь уже легко доказать и теорему 2. Действительно, если ряды (2) расходятся при всех $n=1, \dots, N$, то из теорем 3 и 1 следует, что замыкание в топологии $L_{p,\infty}(\Gamma)$ системы $\{r(\zeta; \lambda_k)\}_1^\infty$ совпадает с $L_{p,\infty}(\Gamma)$, то есть эта система полна в $L_{p,\infty}(\Gamma)$.

Предположим теперь, что при некотором $n=n_0$ ряд (2) сходится. Тогда, как следует из теорем В и С, класс $H_{p,\infty}[\Delta_{n_0}^*; \Lambda^{(n_0)}]$ лежит в

$H_{p,\infty} [\Delta_{n_0}^*]$, не совпадая с ним. Пусть φ_n — функция, лежащая во втором из этих классов и не лежащая в первом, и пусть $\varphi_n \in H_{p,\infty} [\Delta_{n_0}^*]$, где $n \neq n_0$. Тогда функция $\varphi = \varphi_1 + \dots + \varphi_N$ лежит в $L_{p,\infty}(\Gamma)$, а по теореме 3 она не принадлежит замыканию в топологии $L_{p,\infty}(\Gamma)$ системы $\{r(\zeta; \lambda_k)\}_1^\infty$. Значит в этом случае система $\{r(\zeta; \lambda_k)\}_1^\infty$ не полна в $L_{p,\infty}(\Gamma)$. Этим теорема 2 также доказана.

Доказательство теоремы 4. Если при некотором $n = n_0$ ряд (2) расходится, то система $\{r(\zeta; \lambda_k^{(n)})\}_{k=1}^\infty$ не минимальна в $H_{p,\infty}[\Delta_{n_0}^*]$ (см. теорему Д). Иначе говоря, существует элемент системы $\{r(\zeta; \lambda_k^{(n)})\}_{k=1}^\infty$, принадлежащий замыканию в топологии $H_{p,\infty}[\Delta_{n_0}^*]$ (или, что то же, — в топологии $L_{p,\infty}(\Gamma)$) линейной оболочки остальных элементов этой системы. Следовательно, для минимальности в $L_{p,\infty}(\Gamma)$ системы $\{r(\zeta; \lambda_k)\}_1^\infty$ необходимо, чтобы все ряды (2) сходились.

Предположим теперь, что ряды (2) сходятся при всех $n = 1, \dots, N$.

Построим систему $\{\Omega(\zeta; \lambda_k)\}_1^\infty \subset L_{p,\infty}(\Gamma)$, $1/p + 1/q = 1$, биортогональную с системой $\{r(\zeta; \lambda_k)\}_1^\infty$ в смысле (12). Отсюда уже будет следовать минимальность в $L_{p,\infty}(\Gamma)$ системы $\{r(\zeta; \lambda_k)\}_1^\infty$.

Определим на Γ функции $\Omega(\zeta; \lambda_k^{(n)})$ ($n = 1, \dots, N; k = 1, 2, \dots$) следующим образом:

$$\Omega(\zeta; \lambda_k^{(n)}) = \begin{cases} \overline{\Omega(\zeta; \lambda_k^{(n)})} \zeta |\zeta|^{-\infty-1}, & \zeta \in \Gamma_{\vartheta_n}, \\ -\overline{\Omega(\zeta; \lambda_k^{(n)})} \zeta |\zeta|^{-\infty-1}, & \zeta \in \Gamma_{\vartheta_{n+1}}, \\ 0, & \zeta \in \Gamma \setminus \{\Gamma_{\vartheta_n} \cup \Gamma_{\vartheta_{n+1}}\}, \end{cases} \quad (26)$$

где $\overline{\Omega(\zeta; \lambda_k^{(n)})}$ — функции из (17).

Далее, определим систему $\{\Omega(\zeta; \lambda_k)\}_1^\infty$, как объединение систем $\{\Omega(\zeta; \lambda_k^{(n)})\}_{k=1}^\infty$ ($n = 1, \dots, N$) и покажем, что она биортогональна с системой $\{r(\zeta; \lambda_k)\}_1^\infty$ в смысле (12). Для этого сначала заметим, что система $\{r(\zeta; \lambda_k)\}_1^\infty$ есть объединение систем $\{r(\zeta; \lambda_k^{(n)})\}_{k=1}^\infty$ ($n = 1, \dots, N$). В силу этого, нам надо доказать, что объединение систем $\{\Omega(\zeta; \lambda_m^{(l)})\}_{m=1}^\infty$ ($l = 1, \dots, N$) и объединение систем $\{r(\zeta; \lambda_k^{(n)})\}_{k=1}^\infty$ ($n = 1, \dots, N$) биортогональны.

Возможны 3 случая: 1) $k = m, n = l$; 2) $k \neq m, n = l$; 3) $n \neq l$.

Ввиду (18) и (26) в первых двух случаях имеем:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} r(\zeta; \lambda_k^{(n)}) \overline{\Omega(\zeta; \lambda_m^{(l)})} |\zeta|^\infty |d\zeta| = \\ & = \int_{\partial\Delta_n} r(\zeta; \lambda_k^{(n)}) \overline{\Omega(\zeta; \lambda_m^{(n)})} d\zeta = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \neq m, \end{cases} \quad (k, m \geq 1). \end{aligned} \quad (27)$$

Пусть теперь $n \neq l$. Тогда при всех $k \geq 1$ точка $z = \lambda_k^{(n)}$ лежит в области Δ_l^* . Кроме того, $\overline{\Omega(\zeta; \lambda_m^{(l)})} \in H_{p,\infty}[\Delta_l]$. Следовательно, в силу теоремы А

$$\int_{\partial \Delta_l} \frac{\tilde{\Omega}(\zeta; \lambda_m^{(l)})}{(\zeta - \lambda_k^{(n)})^s} d\zeta = 0.$$

Учитывая (26) это равенство можно переписать в виде

$$\int_{\Gamma} r(\zeta; \lambda_k^{(n)}) \overline{\Omega(\zeta; \lambda_m^{(l)})} |\zeta|^\omega |d\zeta| = 0 \quad (k, m \geq 1).$$

Отсюда и из (27) следует биортогональность в смысле (12) систем

$$\{r(\zeta; \lambda_k)\}_{k=1}^{\infty} \quad \text{и} \quad \{\Omega(\zeta; \lambda_k)\}_{k=1}^{\infty}.$$

Наконец, поскольку функции $\tilde{\Omega}(\zeta; \lambda_k^{(n)})$ ограничены и при $|\zeta| \rightarrow +\infty$ имеют порядок $O(|\zeta|^{-1})$, то $\tilde{\Omega}(\zeta; \lambda_k^{(n)}) \in H_{p, \omega}^{\infty}[\Delta_n]$ ($1/p + 1/q = 1$, $\omega = (1-q)\omega$). Отсюда и из (26) заключаем, что $\{\Omega(\zeta; \lambda_k)\}_{k=1}^{\infty} \subset L_{q, \omega}(\Gamma)$. Этим завершается доказательство теоремы 4.

Доказательство теоремы 5. Пусть условия (13) и (14) выполняются.

По теореме Е, при каждом $n = 1, \dots, N$ система $\{\beta_k^{(n)} r(\zeta; \lambda_k^{(n)})\}_{k=1}^{\infty}$ является базисом пространства $H_{p, \omega}[\Delta_n^*; \Lambda^{(n)}]$, изоморфным стандартному базису пространства l_p . В частности, если $\{\gamma_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty} \in l_p$, то ряд

$$f_n(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^{(n)} \{\beta_k^{(n)} r(\zeta; \lambda_k^{(n)})\} \quad (28)$$

безусловно сходится в топологии $H_{p, \omega}[\Delta_n^*]$ и определяет функцию $f_n \in H_{p, \omega}[\Delta_n^*; \Lambda^{(n)}]$. При этом справедливо неравенство

$$\|f_n\|_{H_{p, \omega}[\Delta_n^*]} \leq C \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k^{(n)}|^p \right\}^{1/p},$$

где $C \in (0, +\infty)$ не зависит от $\{\gamma_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty}$. Отсюда на основании неравенств (8) заключаем, что ряд (28) безусловно сходится в топологии $L_{p, \omega}(\Gamma)$ к функции f_n и справедливо неравенство

$$\|f_n\|_{p, \omega} \leq N^{1/p} C \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k^{(n)}|^p \right\}^{1/p}.$$

Пусть теперь $\gamma \equiv \{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность из l_p . Рассмотрим ряд

$$R[\gamma] = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \{\beta_k r(\zeta; \lambda_k)\}. \quad (29)$$

Представив его в виде

$$R[\gamma] = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^{(n)} \{\beta_k^{(n)} r(\zeta; \lambda_k^{(n)})\},$$

на основании вышесказанного заключаем, что ряд (29) безусловно сходится в топологии $L_{p, \infty}(\Gamma)$ к функции $f_\gamma = R[\gamma]$, причем $f_\gamma \in (\{r(\zeta; \lambda_k)\}_1^\infty; L_{p, \infty}(\Gamma))$ и

$$\|f_\gamma\|_{p, \infty} \leq B \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k|^p \right\}^{1/p},$$

где $B \in (0, +\infty)$ не зависит от $\gamma \equiv \{\gamma_k\}_1^\infty$.

Таким образом, равенством (29) определяется ограниченный линейный оператор R , отображающий l_p в $(\{r(\zeta; \lambda_k)\}_1^\infty; L_{p, \infty}(\Gamma))$. При этом очевидно, что R переводит стандартный базис пространства l_p в систему $\{\beta_k r(\zeta; \lambda_k)\}_1^\infty$. Более того, так как из условий (13) вытекает сходимость рядов (2) при всех $n=1, \dots, N$, то система $\{\beta_k r(\zeta; \lambda_k)\}_1^\infty$ минимальна и, следовательно, имеет биортогональное дополнение (см. теорему 4). Отсюда вытекает, что разным элементам из l_{p1} оператор R ставит в соответствие разные элементы пространства $(\{r(\zeta; \lambda_k)\}_1^\infty; L_{p, \infty}(\Gamma))$.

Покажем, что $R[l_p]$ совпадает с пространством $(\{r(\zeta; \lambda_k)\}_1^\infty; L_{p, \infty}(\Gamma))$.

Пусть φ — произвольный элемент из этого пространства. В силу теоремы 3 имеем: $\varphi = \varphi_1 + \dots + \varphi_N$, где $\varphi_n \in H_{p, \infty}[\Delta_n^*; \Lambda^{(n)}]$ ($n=1, \dots, N$). При этом, согласно теореме 1, справедливы неравенства

$$\|\varphi_n\|_{p, \infty} \leq A_{p, \infty} \|\varphi\|_{p, \infty} \quad (n=1, \dots, N), \quad (30)$$

где $A_{p, \infty} \in (0, +\infty)$ не зависит от φ .

Далее, поскольку при каждом $n=1, \dots, N$ система $\{\beta_k^{(n)} r(\zeta; \lambda_k^{(n)})\}_{k=1}^{\infty}$ является базисом $H_{p, \infty}[\Delta_n^*; \Lambda^{(n)}]$, изоморфным стандартному базису пространства l_p (см. теорему E), то справедливо разложение

$$\varphi_n(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^{(n)} \{\beta_k^{(n)} r(\zeta; \lambda_k^{(n)})\},$$

где $\{\gamma_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty} \in l_p$, а ряд безусловно сходится к φ_n в топологии $H_{p, \infty}[\Delta_n^*]$ (или, в силу (8), в топологии $L_{p, \infty}(\Gamma)$). Следовательно

$$\varphi(\zeta) = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^{(n)} \{\beta_k^{(n)} r(\zeta; \lambda_k^{(n)})\} = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \{\beta_k r(\zeta; \lambda_k)\}, \quad (31)$$

где $\gamma \equiv \{\gamma_k\}_1^\infty$ — объединение последовательностей $\{\gamma_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty}$ ($n=1, \dots, N$). Очевидно, что $\{\gamma_k\}_1^\infty \in l_p$ и ряд в (31) безусловно сходится в топологии $L_{p, \infty}(\Gamma)$ к φ . Значит $R[\gamma] = \varphi$.

Итак, мы доказали, что ограниченный линейный оператор R взаимно-однозначно отображает l_p на $(\{r(\zeta; \lambda_k)\}_1^\infty; L_{p, \infty}(\Gamma))$ и переводит стандартный базис пространства l_p в систему $\{\beta_k r(\zeta; \lambda_k)\}_1^\infty$. Следова-

тельно, при условиях (13) и (14) система $\{\beta_k r(\zeta; \lambda_k)\}_{k=1}^{\infty}$ является базисом $(\{r(\zeta; \lambda_k)\}_{k=1}^{\infty}; L_{p, \infty}(\Gamma))$, изоморфным стандартному базису пространства L_p .

Обратно, предположим, что система $\{r(\zeta; \lambda_k)\}_{k=1}^{\infty}$ при некоторой перестановке σ является базисом пространства $(\{r(\zeta; \lambda_k)\}_{k=1}^{\infty}; L_{p, \infty}(\Gamma))$. Тогда эта же система минимальна в $L_{p, \infty}(\Gamma)$ (см. [7], стр. 164—171). Следовательно, в силу теоремы 4, ряды (2) сходятся при всех $n=1, \dots, N$. При этом существует система $\{\Omega(\zeta; \lambda_k)\}_{k=1}^{\infty}$, биортогональная с системой $\{r(\zeta; \lambda_k)\}_{k=1}^{\infty}$ в смысле (12). Одновременно при всех $n=1, \dots, N$ имеем

$$(\{r(\zeta; \lambda_k^{(n)})\}_{k=1}^{\infty}; L_{p, \infty}(\Gamma)) = H_{p, \infty}[\Delta_n^*; \Lambda^{(n)}].$$

(см. теорему С и неравенства (8)).

Из приведенных фактов следует, что для любой функции $\varphi \in H_{p, \infty}[\Delta_n^*; \Lambda^{(n)}]$ справедливы равенства

$$\int_{\Gamma} \varphi(\zeta) \overline{\Omega(\zeta; \lambda_k^{(m)})} |\zeta|^{\infty} |d\zeta| = 0 \quad (n \neq m, k \geq 1). \quad (32)$$

Кроме того, по предположению $\{r(\zeta; \lambda_k)\}_{k=1}^{\infty}$ при перестановке σ является базисом пространства $(\{r(\zeta; \lambda_k)\}_{k=1}^{\infty}; L_{p, \infty}(\Gamma))$, а по теореме 3 $H_{p, \infty}[\Delta_n^*; \Lambda^{(n)}]$ является подпространством этого пространства. Следовательно, любая функция $\varphi \in H_{p, \infty}[\Delta_n^*; \Lambda^{(n)}]$ разлагается в сходящийся в топологии $L_{p, \infty}(\Gamma)$ ряд

$$\varphi(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k r(\zeta; \lambda_k) \quad (33)$$

(индекс σ означает, что члены ряда σ перестановлены). При этом коэффициенты c_k единственным образом определяются по формулам

$$c_k = \int_{\Gamma} \varphi(\zeta) \overline{\Omega(\zeta; \lambda_k)} |\zeta|^{\infty} |d\zeta| \quad (k=1, 2, \dots). \quad (34)$$

С учетом (32) из (33) и (34) получаем, что любая функция $\varphi \in H_{p, \infty}[\Delta_n^*; \Lambda^{(n)}]$ единственным образом разлагается в сходящийся в топологии $L_{p, \infty}(\Gamma)$ (или, в силу (8), в топологии $H_{p, \infty}[\Delta_n^*]$) ряд по некоторой перестановке системы $\{r(\zeta; \lambda_k^{(n)})\}_{k=1}^{\infty}$.

Таким образом, для всех $n=1, \dots, N$ система $\{r(\zeta; \lambda_k^{(n)})\}_{k=1}^{\infty}$ при надлежащей расстановке членов является базисом пространства $H_{p, \infty}[\Delta_n^*; \Lambda^{(n)}]$. Следовательно, при всех $n=1, \dots, N$ должны выполняться условия (13), а также условия

$$\sup_{k \geq 1} \{p_k^{(n)}\} < +\infty$$

(см. теорему Е).

Но так как

$$\max_{1 < n < N} \sup_{k > 1} |p_k^{(n)}| = \sup_{k > 1} |p_k|,$$

то выполняется также условие (14). Теорема доказана.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 22.VI.1979

Վ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ. Ճառագայթների համակարգի վրա պարզագույն ռացիոնալ կոստ-
րակների փակուրյան, մինիմալության ու բազիսության մասին (ամփոփում)

Աշխատանքում ստացվել են պարզագույն ռացիոնալ կոտորակներից կազմված սխեմաների
փակություն, մինիմալության ու բազիսության հայտանիշները. կոմպլեքս հարթության $z = 0$
կետից դուրս եկող վերջավոր թվով ճառագայթների վրա միջին կշռային մոտարկման դեպքում.

Այդպիսի սխեմանի ոչ լրիվության դեպքում տրված է նրա փակույթի լիակատար ներքին
նկարագիրը, իսկ մինիմալության դեպքում կառուցված է նրա բիորթոգոնալ սխեմանը.

V. M. MARTIROSIAN. *On the closure, minimality and basisness of systems
of symplest rational fractions on a system of rays (summary)*

A criterion of closeness, minimality and basisness on a system of rays for
systems of rational fractions are established in this paper.

A complete inner description of the closure of such nonclosed systems of ra-
tional fractions is given. In the case of minimality of such a system its biorthogonal
system is constructed.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. М. Мартиросян. Замыкание и базисность некоторых биортогональных систем, и решение кратной интерполяционной задачи в угловых областях, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XIII, №№ 5—6, 1978.
2. М. М. Джрбашян. О замкнутости системы типа Миттаг-Леффлера, ДАН СССР 219, № 6, 1974, 1302—1305.
3. М. М. Джрбашян, А. Е. Аветисян. Интегральные представления некоторых классов функций, аналитических в области угла, ДАН СССР, 120, № 3, 1958, 457—460; Сиб. матем. ж., 1, № 3, 1960, 383—426.
4. М. М. Джрбашян. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, „Наука“, М., 1966.
5. С. Н. Бернштейн. Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle, 1926.
6. Н. И. Ахиезер. Лекции по теории аппроксимации, Гостехиздат, 1947.
7. Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. Элементы функционального анализа, „Наука“, М., 1965.