Р. А. АЛИХАНИЯН

СМЕШАННАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ
 ЛАПЛАСА В БЕСКОНЕЧНОЙ МНОГОСВЯЗНОЙ
 ОБЛАСТИ

Пусть в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ имеем окружности $|z - a| = R$, $|z + a| = R$, $|z - a| = r$, $|z + a| = r$, которые обозначим соответственно через Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 и Γ_4 , причем $r < R < a$.

Рассмотрим круговые кольцеобразные области D_1 и D_2 , ограниченные окружностями Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 и Γ_4 и бесконечную двусвязную область D_3 , ограниченную окружностями Γ_1 и Γ_2 .

В настоящей работе изучается смешанная краевая задача для уравнения Лапласа в следующей постановке: найти гармонические в D_n функции $u_n(z)$, принадлежащие классу Гельдера $C_\alpha(\bar{D}_n)$ и удовлетворяющие краевым условиям:

$$u_1(z) = f_1(z), \quad z \in \Gamma_3, \tag{1}$$

$$u_2(z) = f_2(z), \quad z \in \Gamma_4, \tag{2}$$

$$u_1(z) = u_3(z) + f_3(z), \quad z \in \Gamma_1, \tag{3}$$

$$u_2(z) = u_3(z) + f_4(z), \quad z \in \Gamma_2, \tag{4}$$

$$\lambda \frac{\partial u_1(z)}{\partial n_1} = \frac{\partial u_3(z)}{\partial n_1} + f_5(z), \quad z \in \Gamma_1, \tag{5}$$

$$\lambda \frac{\partial u_2(z)}{\partial n_2} = \frac{\partial u_3(z)}{\partial n_2} + f_6(z), \quad z \in \Gamma_2, \tag{6}$$

$$|u_3(z)| \leq \text{const}, \tag{7}$$

где $f_n(z)$ — заданные на Γ_j действительные функции, первые производные которых удовлетворяют условию Гельдера на соответствующей окружности, $\frac{\partial u_n}{\partial n_j}$ — нормальные производные $u_n(z)$ в точках Γ_j

($j = 1, 2$), λ — положительное число.

В случае односвязной конечной или бесконечной области задачи Дирихле, Неймана, Пуанкаре и смешанная краевая задача для эллиптических уравнений изучены, например, в работах [1]—[4].

Перейдем к исследованию задачи (1)—(7). Вначале докажем, что она имеет единственное решение.

Предположим, что функции $u_1(z)$, $u_2(z)$ и $u_3(z)$ являются решением однородной задачи. В силу условия (7) первые производные

$u_2(z)$ в бесконечности имеют порядок $|z|^{-2}$. Поэтому формула Грина (см. [1]) для функций $u_1(z)$, $u_2(z)$, $u_3(z)$ в областях D_1 , D_2 и D_3 имеет следующий вид:

$$\iint_{D_1} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2 \right] d\sigma = \int_{\Gamma_1} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} ds, \quad (8)$$

$$\iint_{D_2} \left[\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} \right)^2 \right] d\sigma = \int_{\Gamma_2} u_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_2} ds, \quad (9)$$

$$\iint_{D_3} \left[\left(\frac{\partial u_3}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} \right)^2 \right] d\sigma = - \int_{\Gamma_1} u_3 \frac{\partial u_3}{\partial n_1} ds - \int_{\Gamma_2} u_3 \frac{\partial u_3}{\partial n_2} ds. \quad (10)$$

Умножая (8) и (9) на λ , суммируя с (10) и пользуясь условиями (3)(6—), находим, что

$$\begin{aligned} \lambda \iint_{D_1} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2 \right] d\sigma + \lambda \iint_{D_2} \left[\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} \right)^2 \right] d\sigma + \\ + \iint_{D_3} \left[\left(\frac{\partial u_3}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} \right)^2 \right] d\sigma = 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} = \frac{\partial u_n}{\partial y} \equiv 0 \quad (n = 1, 2, 3),$$

т. е.

$$u_n(z) \equiv \text{const} \quad (n = 1, 2, 3).$$

Так как $u_1(z) = 0$ на Γ_3 , $u_2(z) = 0$ на Γ_4 , $u_3(z) = u_1(z)$ на Γ_1 , то

$$u_n(z) \equiv 0 \quad (n = 1, 2, 3).$$

Единственность задачи доказана.

Перейдем к доказательству существования решения.

Решение задачи (1)–(7) будем искать в виде

$$u_1(z) = \text{Re} \left[\varphi_1 \left(\frac{z-a}{R} \right) + \psi_1 \left(\frac{r}{z-a} \right) \right] + c_1 \ln |z-a| + c_2, \quad (11)$$

$$u_2(z) = \text{Re} \left[\varphi_2 \left(\frac{z+a}{R} \right) + \psi_2 \left(\frac{r}{z+a} \right) \right] + c_3 \ln |z+a| + c_4, \quad (12)$$

$$u_3(z) = \text{Re} \left[\varphi_3 \left(\frac{R}{z-a} \right) + \psi_3 \left(\frac{R}{z+a} \right) \right] + c_5 \ln \left| \frac{z+a}{z-a} \right| + c_6, \quad (13)$$

где $\varphi_n(z)$ и $\psi_n(z)$ — аналитические функции в круге $|z| < 1$, удовлетворяющие условиям

$$\varphi_n(0) = \psi_n(0) = 0 \quad (n=1, 2, 3), \quad (14)$$

а c_n — действительные постоянные.

Нетрудно убедиться, что такое представление решения единственно в том смысле, что из равенства нулю $u_n(z)$ следует, что все $\varphi_n(z)$, $\psi_n(z)$ и c_n также равны нулю.

Введем следующие функции:

$$\begin{aligned}\bar{f}_1(\tau) &= f_1(r\tau + a), & \bar{f}_2(\tau) &= f_2(r\tau - a), \\ \bar{f}_3(\tau) &= f_3(R\tau + a), & \bar{f}_4(\tau) &= f_4(R\tau - a), \\ \bar{f}_5(\tau) &= f_5(R\tau + a), & \bar{f}_6(\tau) &= f_6(R\tau - a),\end{aligned}\quad (15)$$

$$F_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \bar{f}_n(\tau) \frac{\tau+z}{\tau-z} \cdot \frac{d\tau}{\tau} \quad (n=1, \dots, 6). \quad (16)$$

Если сделать замену переменной $\tau = \frac{z-a}{r}$ и положить $r_0 = \frac{r}{R}$, то граничное условие (1) можно переписать так:

$$\operatorname{Re} \left[\varphi_1(r_0\tau) + \psi_1\left(\frac{1}{\tau}\right) + c_1 \ln r + c_2 \right] = \bar{f}_1(\tau), \quad |\tau|=1.$$

При $|\tau|=1$ имеет место соотношение

$$\operatorname{Re} \psi_1\left(\frac{1}{\tau}\right) = \operatorname{Re} \psi_1(\bar{\tau}) = \operatorname{Re} \overline{\psi_1(\tau)}.$$

Тогда

$$\operatorname{Re} [\varphi_1(r_0\tau) + \overline{\psi_1(\tau)} + c_1 \ln r + c_2] = \bar{f}_1(\tau), \quad |\tau|=1. \quad (17)$$

Ясно, что в левой части (17) в квадратных скобках стоит аналитическая функция в круге $|\tau|<1$. Из (17) по формуле Шварца восстанавливая аналитическую функцию в $|z|<1$ по значению ее действительной части на границе, получим

$$\varphi_1(r_0z) + \overline{\psi_1(z)} + c_1 \ln r + c_2 = F_1(z) + ic, \quad |z|<1, \quad (18)$$

где $F_1(z)$ определяется формулой (16), а c — действительная постоянная. Так как при $z=0$ функции $\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$ и $F_1(z)$ принимают действительные значения, то в (18) $c=0$, следовательно

$$\varphi_1(r_0z) + \overline{\psi_1(z)} + c_1 \ln r + c_2 = F_1(z), \quad |z|<1. \quad (19)$$

Рассуждая аналогично, из условия (2) будем иметь

$$\varphi_2(r_0z) + \overline{\psi_2(z)} + c_3 \ln r + c_4 = F_2(z), \quad |z|<1. \quad (20)$$

Подставим теперь (11) и (13) в граничное условие (3):

$$\operatorname{Re} \left[\varphi_1(\tau) + \psi_1\left(\frac{r_0}{\tau}\right) + c_1 \ln R + c_2 \right] =$$

$$= \operatorname{Re} \left[\varphi_3 \left(\frac{1}{\tau} \right) + \psi_3 \left(\frac{1}{\tau + a_0} \right) + c_5 \ln (\tau + a_0) + c_6 \right] + \tilde{f}_3 (\tau), \quad (21)$$

$$\tau = \frac{z - a}{R}, \quad a_0' = \frac{2a}{R}, \quad |\tau| = 1.$$

При $|\tau| = 1$ справедливы соотношения:

$$\operatorname{Re} \psi_1 \left(\frac{r_0}{\tau} \right) = \overline{\operatorname{Re} \psi_1 (r_0 \bar{\tau})}, \quad \operatorname{Re} \varphi_3 \left(\frac{1}{\tau} \right) = \overline{\operatorname{Re} \varphi_3 (\bar{\tau})}. \quad (22)$$

Учитывая (22), уравнение (21) перепишем в виде

$$\operatorname{Re} [\varphi_1 (\tau) + \overline{\psi_1 (r_0 \bar{\tau})} - \overline{\varphi_3 (\bar{\tau})} - \psi_3 \left(\frac{1}{\tau + a_0} \right) - c_5 \ln (\tau + a_0) + c_1 \ln R + c_2 - c_6] = \tilde{f}_3 (\tau), \quad |\tau| = 1.$$

Отсюда по формуле Шварца (см. [5])

$$\varphi_1 (z) + \overline{\psi_1 (r_0 \bar{z})} - \overline{\varphi_3 (\bar{z})} - \psi_3 \left(\frac{1}{z + a_0} \right) - c_5 \ln (z + a_0) + c_1 \ln R + c_2 - c_6 = F_3 (z) + ic, \quad |z| < 1. \quad (23)$$

При $z = 0$ из (23) имеем

$$c_1 \ln R + c_2 - \psi_3 \left(\frac{1}{a_0} \right) - c_5 \ln a_0 - c_6 = F_3 (0) + ic,$$

откуда

$$c = -\operatorname{Im} \psi_3 \left(\frac{1}{a_0} \right).$$

Следовательно, условие (3) окончательно переписывается в виде

$$\varphi_1 (z) + \overline{\psi_1 (r_0 \bar{z})} - \overline{\varphi_3 (\bar{z})} - \psi_3 \left(\frac{1}{z + a_0} \right) - c_5 \ln (z + a_0) + c_1 \ln R + c_2 - c_6 = F_3 (z) - i \operatorname{Im} \psi_3 \left(\frac{1}{a_0} \right), \quad |z| < 1. \quad (24)$$

Подставим (11) и (13) в (5):

$$\lambda \operatorname{Re} \left[\varphi_1' (\tau) \tau - \psi_1' \left(\frac{r_0}{\tau} \right) \frac{r_0}{\tau} + c_1 \right] =$$

$$= \operatorname{Re} \left[-\varphi_3' \left(\frac{1}{\tau} \right) \frac{1}{\tau} - \psi_3' \left(\frac{1}{\tau + a_0} \right) \frac{\tau}{(\tau + a_0)^2} - \frac{c_5 a_0}{\tau + a_0} \right] + \tilde{f}_5 (\tau), \quad |\tau| = 1.$$

Ясно, что при $|\tau| = 1$

$$\operatorname{Re} \psi_1' \left(\frac{r_0}{\tau} \right) \frac{1}{\tau} = \operatorname{Re} \psi_1' (r_0 \bar{\tau}) \bar{\tau} = \overline{\operatorname{Re} \psi_1' (r_0 \bar{\tau}) \tau},$$

$$\operatorname{Re} \varphi_3 \left(\frac{1}{\tau} \right) \frac{1}{\tau} = \operatorname{Re} \overline{\varphi_3(\bar{\tau})} \tau.$$

Следовательно

$$\begin{aligned} & \lambda \operatorname{Re} [\varphi_1'(\tau) \tau - \overline{\psi_1(r_0 \bar{\tau})} r_0 \tau + c_1] + \\ & + \operatorname{Re} \left[\overline{\varphi_3(\bar{\tau})} \tau + \psi_3 \left(\frac{1}{\tau + a_0} \right) \frac{\tau}{(\tau + a_0)^2} + \frac{c_5 a_0}{\tau + a_0} \right] = \overline{f_5(\tau)}, \quad |\tau| = 1. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \lambda [\varphi_1'(z) z - r_0 z \overline{\psi_1(r_0 \bar{z})} + c_1] + z \overline{\varphi_3(\bar{z})} + \\ & + \frac{z}{(z + a_0)^2} \psi_3 \left(\frac{1}{z + a_0} \right) + \frac{c_5 a_0}{z + a_0} = F_5(z) + ic, \quad |z| < 1. \end{aligned} \quad (25)$$

При $z = 0$ из (25) имеем

$$c = 0, \quad (26)$$

$$\lambda c_1 + c_5 = F_5(0). \quad (27)$$

Те же рассуждения при подстановке (12) и (13) в (4) и (6) приводят к следующим уравнениям в круге $|z| < 1$:

$$\begin{aligned} & \varphi_2(z) + \overline{\psi_2(r_0 \bar{z})} - \varphi_3 \left(\frac{1}{z - a_0} \right) - \overline{\psi_3(\bar{z})} + c_5 \ln(a_0 - z) + \\ & + c_3 \ln R + c_4 - c_6 = F_4(z) - i \operatorname{Im} \varphi_3 \left(-\frac{1}{a_0} \right), \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} & \lambda [\varphi_2'(z) z - \overline{\psi_2(r_0 \bar{z})} r_0 z + c_3] + \frac{z}{(z - a_0)^2} \varphi_3 \left(\frac{1}{z - a_0} \right) + \\ & + \overline{\psi_3(\bar{z})} z + \frac{a_0 c_5}{z - a_0} = F_6(z). \end{aligned} \quad (29)$$

Из (29) при $z = 0$ имеем

$$\lambda c_3 - c_5 = F_6(0). \quad (30)$$

Разделив уравнения (25) и (29) на z и учитывая соотношения (26), (27) и (30), получим

$$\begin{aligned} & \lambda [\varphi_1'(z) - r_0 \overline{\psi_1(r_0 \bar{z})}] + \overline{\varphi_3(\bar{z})} \frac{1}{(z + a_0)^2} \psi_3 \left(\frac{1}{z + a_0} \right) - \\ & - \frac{c_5}{z + a_0} = \frac{F_5(z) - F_5(0)}{z}, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} & \lambda [\varphi_2'(z) - r_0 \overline{\psi_2(r_0 \bar{z})}] + \overline{\psi_3(\bar{z})} + \frac{1}{(z - a_0)^2} \varphi_3 \left(\frac{1}{z - a_0} \right) + \\ & + \frac{c_5}{z - a_0} = \frac{F_6(z) - F_6(0)}{z}. \end{aligned} \quad (32)$$

Полагая в (19), (20), (24) и (28) $z=0$, будем иметь

$$\begin{aligned} c_1 \ln r + c_2 &= F_1(0), \\ c_3 \ln r + c_4 &= F_2(0), \\ c_1 \ln R + c_3 - \operatorname{Re} \psi_3 \left(\frac{1}{a_0} \right) - c_5 \ln a_0 - c_6 &= F_3(0), \\ c_3 \ln R + c_4 - \operatorname{Re} \varphi_3 \left(-\frac{1}{a_0} \right) + c_5 \ln a_0 - c_6 &= F_4(0). \end{aligned} \quad (33)$$

Из соотношений (27), (30) и (33) находим, что

$$\begin{aligned} c_5 &= \frac{\lambda}{2\lambda \ln a_0 - 2 \ln r_0} \left\{ \operatorname{Re} \left[\varphi_3 \left(-\frac{1}{a_0} \right) - \psi_3 \left(\frac{1}{a_0} \right) \right] - \right. \\ &\left. - \frac{\ln r_0}{\lambda} [F_5(0) - F_6(0)] + F_1(0) - F_2(0) - F_3(0) + F_4(0) \right\}. \end{aligned} \quad (34)$$

Продифференцировав по z обе части уравнений (19), (20), (24) и (28) и решая полученные уравнения совместно с (31) и (32) относительно

$$\varphi_1(z), \varphi_2(z), \overline{\varphi_3(z)}, \overline{\psi_1(z)}, \overline{\psi_2(z)}, \overline{\psi_3(z)},$$

получим

$$\begin{aligned} \varphi_1'(z) &= \frac{1}{\lambda+1} \left[(\lambda-1) r_0 \overline{\psi_1'(r_0 \bar{z})} - \frac{2}{(z+a_0)^2} \psi_3' \left(\frac{1}{z+a_0} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2c_5}{z+a_0} + F_3'(z) + \frac{F_5(z) - F_5(0)}{z} \right], \\ \varphi_2'(z) &= \frac{1}{\lambda+1} \left[(\lambda-1) r_0 \overline{\psi_2'(r_0 \bar{z})} - \frac{2}{(z-a_0)^2} \varphi_3' \left(\frac{1}{z-a_0} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2c_5}{z-a_0} + F_4'(z) + \frac{F_6(z) - F_6(0)}{z} \right], \\ \overline{\varphi_3(z)} &= \frac{1}{\lambda+1} \left[2\lambda r_0 \overline{\psi_1'(r_0 \bar{z})} + \frac{\lambda-1}{(z+a_0)^2} \psi_3' \left(\frac{1}{z+a_0} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-\lambda}{z+a_0} c_5 - \lambda F_3'(z) + \frac{F_5(z) - F_5(0)}{z} \right], \\ \overline{\psi_1(z)} &= -r_0 \overline{\varphi_1'(r_0 z)} + F_1'(z), \\ \overline{\psi_2(z)} &= -r_0 \overline{\varphi_2'(r_0 z)} + F_2'(z), \\ \overline{\psi_3(z)} &= \frac{1}{\lambda+1} \left[2\lambda r_0 \overline{\psi_2'(r_0 \bar{z})} + \frac{\lambda-1}{(z-a_0)^2} \varphi_3' \left(\frac{1}{z-a_0} \right) + \right. \end{aligned} \quad (35)$$

$$+ \frac{1-\lambda}{a_0-z} c_3 - \lambda F'_4(z) + \frac{F_6(z) - F_6(0)}{z} \Big],$$

где c_3 определяется формулой (34).

Введем банахово пространство B вектор-функций

$$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5, \Phi_6), \quad (36)$$

аналитических в $|z| < 1$, непрерывных в $|z| \leq 1$, с нормой

$$\|\Phi\| = \sum_{m=1}^6 \|\Phi_m\|, \quad \|\Phi_m\| = \max_{|z|=1} |\Phi_m(z)|.$$

Тогда система (35) в B запишется в виде

$$\Phi = K\Phi + G,$$

где K — некоторый линейный вполне непрерывный оператор в B , $G(z)$ — известная вектор-функция, выражающаяся через $F_m(z)$ ($m=1, \dots, 6$),

$$a \quad \Phi(z) = (\varphi_1(z), \varphi_2(z), \overline{\varphi_3(z)}, \overline{\psi_1(z)}, \overline{\psi_2(z)}, \overline{\psi_3(z)})$$

— искомая вектор-функция.

Так как однородная задача имеет только нулевое решение, то однородная система (35) (при $F_m(z) = 0$) также будет иметь только нулевое решение. Следовательно, уравнение (36) всегда разрешимо. Таким образом, доказано существование решения задачи (1) — (7).

Замечание. Пусть $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, D_1$ и D_2 те же, что и в рассмотренной задаче, а D_3 — трехсвязная область, ограниченная окружностями Γ_1, Γ_2 и $|z| = \rho$ ($\rho > a + R$). Изложенный выше метод можно применить и для решения следующей краевой задачи: найти решение уравнения Лапласа в областях D_1, D_2 и D_3 удовлетворяющее условиям (1) — (6) и условию

$$u_3(z) = f_7(z), \quad |z| = \rho.$$

Решения $u_1(z)$ и $u_2(z)$ данной задачи ищем в виде (11) и (12), а $u_3(z)$ — в виде

$$u_3(z) = \operatorname{Re} \left[\varphi_3 \left(\frac{R}{z-a} \right) + \psi_3 \left(\frac{R}{z+a} \right) + \varphi_4 \left(\frac{z}{\rho} \right) \right] + c_5 \ln |z+a| + c_6 \ln |z-a| + c_7.$$

За постановку задачи и постоянное внимание автор выражает искреннюю благодарность профессору Н. Е. Товмасяну.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 20.XII.1978

Ռ. Ա. ԱԼԻԿԽԱՆՅԱՆ. Խառը եզրային խնդիր լապլասի հավասարման համար անկերը բազմակապ տիրույթում (ամփոփում)

Աշխատանքում հետազոտված են խառը եզրային խնդիրները լապլասի հավասարման համար կոնցենտրիկ և էքսցենտրիկ շրջանային օղակաձև տիրույթներում: Ապացուցված են գրված խնդիրների լուծման գոյությունը ու միակությունը:

R. A. ALIKHANYAN. *The mixed boundary problem for infinite and multiconnected domains for Laplace equation (summary)*

The mixed boundary problems for Laplace equation is studied for concentric and excentric circular ring domains.

The existance and uniqueness of the solution of the mentioned problems is proved.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А. В. Бицадзе. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, «Наука», М., 1966.
2. Н. Е. Товмасын. Общая краевая задача для эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами, Диф. уравнения, 2, № 1, 1966, 3—23, 163—171.
3. Н. Е. Товмасын. Об одном методе решения краевых задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка на плоскости, Мат. сб., 89 (131), 1972, № 4 (12), 599—615.
4. Г. А. Мартиросян. Смешанные краевые задачи для эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка на плоскости, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., XI, № 2, 1976, 158—182.
5. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного, «Наука», М., 1965.