ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XV, № 4, 1980 Математика

Р. Г. САФАРЯН

НЕКОТОРЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ И СООТВЕТСТВУЩИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Как известно, каждому диффузионному процессу соответствует некоторый эллиптический, быть может вырождающийся, дифференциальный оператор второго порядка. Решения основных краевых задач для этого оператора могут быть представлены в виде средних значений подходящих функционалов от траекторий соответствующего процесса. В этой работе мы прямыми вероятностными методами изучаем траектории диффузионного процесса, зависящего от малого параметра ε. Соответствующие задачи для дифференциальных уравнений относятся к случаю так называемого нерегулярного вырождения, т. е. к случаю, когда решение вырожденной задачи неединственно. Применение современной техники теорем о больших уклонениях [6], позволяет найти главный член асимптотики функционалов от траекторий процесса при $\varepsilon \to 0$, и, следовательно, асимптотику решений соответствующих краевых задач.

В заметке содержатся доказательства некоторых теорем, сформулированных в [4] и ряд новых результатов.

Пусть $D = \{(x, y): |x| < 1, |y| < 1\}$.

Рассмотрим в D краевую задачу

$$L^{\varepsilon} u^{\varepsilon}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u^{\varepsilon}(x, y)}{\partial x^2} + b^1(x, y) \frac{\partial u^{\varepsilon}(x, y)}{\partial x} + \varepsilon b^2(x, y) \frac{\partial u^{\varepsilon}(x, y)}{\partial y}, \tag{1}$$

$$u^{\varepsilon}(x, 1)|_{\Gamma_+} = \psi(x, 1), \; u^{\varepsilon}(x, -1)|_{\Gamma_-} = \psi(x, -1), \; \frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial x}\Big|_{x=\pm 1} = 0,$$

где

$$\Gamma_+ = \{x: b^2(x, 1) > 0\}, \; \Gamma_- = \{x: b^2(x, -1) < 0\},$$

$\psi(x, 1)$, $\psi(x, -1)$ — непрерывные функции на $[-1, 1]$.

Решение задачи (1). по крайней мере, обобщенное, всегда существует, но без дополнительных предположений оно неединственно (см. [4]).

Потребуем, чтобы для каждого $y_0 \in [-1, 1]$ нашлось $x_0 = x_0(y_0)$ такое, что либо $b^2(x_0, y) > 0$ при $y > y_0$, либо $b^2(x_0, y) < 0$ при $y \leqslant y_0$.

Это условие обеспечивает единственность решения задачи (1). Если $z_t^\varepsilon = (x_t^\varepsilon, y_t^\varepsilon)$ — процесс в D с отражением по нормали к границе $|x| = 1$, управляемый оператором L^ε, $\tau^\varepsilon = \min\{t: |y_t^\varepsilon| = 1\}$, то доказывается, что единственное решение задачи (1) можно записать в виде $u^\varepsilon(x, y) = M_{x,y}\,\psi(x_{\tau^\varepsilon}^\varepsilon, y_{\tau^\varepsilon}^\varepsilon)$.

В заметке изучается поведение решения $u^\varepsilon(0, y)$ задачи (1) при $\varepsilon \to 0$.

На отрезке $[-1, 1]$ рассмотрим диффузионный процесс x_t, управляемый оператором

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + b^1(x, y)\frac{d}{dx} = L_y$$

с отражением в концах отрезка, $y \in R_1$ — параметр. Пусть $m_y(x)$ — плотность инвариантной меры этого процесса.

Обозначим

$$b(y) = \int_{-1}^{1} b^2(x, y)\, m_y(x)\, dx.$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{\bar{y}}_t = \bar{b}(\bar{y}_t(z)),\ \bar{y}_t(z) = z. \tag{2}$$

Для y_t^ε будет справедлив принцип усреднения: для любого $\delta > 0$, $T \in [0, \infty)$, для любых $x, z \in [-1, 1]$

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} P_{x,z}^\varepsilon\{\rho_{0T}(y^\varepsilon, \bar{y}) > \delta\} = 0,$$

где $\bar{y}_t$ — траектория динамической системы (2), $\rho(\varphi, \psi)$ определяется как $\sup_{0 \le s \le T} |\varphi_s - \psi_s|$, где φ и ψ элементы пространства $C_{0T}(R^1)$ непрерывных функций на $[0, T]$ со значениями в R^1 (см. [6]).

Введем в рассмотрение функционал действия ([6]). Пусть $\mu = \mu(y, \beta)$ — собственное значение задачи

$$\frac{1}{2}\frac{d^2v}{dx^2} + b^1(x, y)\frac{dv}{dx} + \beta b^2(x, y)\, v = \mu v,$$

$$x \in (-1, 1),\ \left.\frac{dv}{dx}\right|_{x = \pm 1} = 0$$

с наибольшей вещественной частью.

Здесь $y \in R^1$ и $\beta \in R^1$ — параметры.

Имеет место ([6])

Теорема А. *Собственное значение $\mu = \mu(y, \beta)$ однократно дифференцируемо по параметрам и выпукло по β. Для произвольных ступенчатых функций z_y: $[0, T] \to R^1$, β_s: $[0, T] \to R^1$ равномерно по x, y*

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \ln M^{\varepsilon}_{x,y} \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T \beta_s\, b^2(x_{s/\varepsilon},\, z_s)\, ds\right\} = \int_0^T \mu(z_s,\, \beta_s)\, ds.$$

Определим функцию $L(z, \lambda)$ как преобразование Лежандра от $\mu(z, \beta)$ по параметру β:

$$L(z,\, \lambda) = \sup_{\beta} [\lambda\beta - \mu(z,\, \beta)].$$

Функция $L(z, \lambda)$ выпукла вниз по λ и неотрицательна. Там, где $L(z, \lambda) < \infty$ эта функция непрерывна по λ. Действительно, имеем $\lambda \cdot 0 - \mu(z, 0) = 0$ и тем, самым, $\sup_{\beta} [\lambda\beta - \mu(z, \beta)] \geqslant 0$. Выпуклость вниз $L(z, \lambda)$ по λ следует из того, что $\mu(z, \beta)$ выпукла вниз и из свойств преобразования Лежандра.

Для абсолютно непрерывных функций $\varphi \in C_{0T}(R^1)$ положим

$$S_{0T}(\varphi) = \int_0^T L(\varphi_s,\, \dot{\varphi}_s)\, ds,$$

для остальных $\varphi \in C_{0T}(R^1)$ положим $S_{0T}(\varphi) = +\infty$. Отметим два свойства функционала $S_{0T}(\varphi)$, которые нам в дальнейшем понадобятся.

1. В пространстве $C_{0T}(R^1)$ функционал $S_{0T}(\varphi)$ полунепрерывен снизу, что вытекает из результатов главы 9 монографии [5].

2. Множество $\Phi_a = \{\varphi \in C_{0T}(R^1),\ S_{0T}(\varphi) \leqslant a,\ \varphi_0 = x_0\}$ компактно в пространстве $C_{0T}(R^1)$.

Доказательство. Из ограниченности коэффициентов $b^1(x, y)$ и $b^2(x, y)$ вытекает существование $R_0 > 0$ такого, что $L(z, \lambda) = +\infty$ при $|\beta_i| > R_0$. Поэтому множеству Φ_a могут принадлежать только те функции φ, у которых $|\dot{\varphi}_s| < R_0$ для почти всех $z \in [0, T]$. Отсюда следует равностепенная непрерывность и равномерная ограниченность функций $\varphi \in \Phi_a$. Теперь компактность Φ_a следует из полунепрерывности функционала и теоремы Арцела.

Нам понадобится также следующая

Теорема В (см. [6]). *Пусть выполнены условия теоремы А. Тогда функционал $S_{0T}(\varphi)$ будет функционалом действия для семейства процессов y^{ε}_t в пространстве $C_{0T}(R^1)$ при $\varepsilon \to 0$, то есть для всех a, δ, $h > 0$ и $\varphi \in C_{0T}(R^1)$ найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $\varepsilon < \varepsilon_0$*

$$P_y^{\varepsilon}\{\rho_{0T}(y^{\varepsilon},\, \varphi) < \delta\} > \exp\{-\varepsilon^{-1}(S_{0T}(\varphi) + h)\},$$

$$P_y^{\varepsilon}\{\rho_{0T}(y^{\varepsilon},\, \Phi_a) > \delta\} < \exp\{\varepsilon^{-1}(a - h)\}.$$

Для каждого $\delta > 0$ найдется $a > 0$ такое, что

$$P_{y^{\varepsilon}}\{\rho_{0T}(y^{\varepsilon}.\, \bar{y}) > \delta\} < \exp\left\{-\frac{a}{\varepsilon}\right\}.$$

Рассмотрим теперь усредненную динамическую систему (2) на прямой.

Предположим, что траектории усредненного уравнения, исходя из любой точки $y \in [-1,1]$, выходят из этого отрезка. Тогда, очевидно, функция $b(y)$ не меняет знака. Этот случай рассмотрен в работе [4].

Пусть теперь траектории усредненного движения не выходят из интервала $(-1, 1)$. Пусть $\bar{b}(1) < 0$, $\bar{b}(-1) > 0$ и функция $\bar{b}(y)$ обращается в нуль в точке $q \in (-1, 1)$, отрицательна при $y > q$ и положительна при $y < q$. Обозначим

$$V(y) = \inf \{S_{0T}(\varphi): \varphi(0) = q, \varphi_T = y, T > 0\}.$$

Из условия, наложенного нами для обеспечения единственности решения задачи (1) вытекает, что $\min(V(1), V(-1)) < \infty$, $V(q) = 0$ и $V(y)$ непрерывна.

Теорема 1. *Пусть* $V(1) < V(-1)$ *и* $\psi(x, 1) = \psi_1 = \text{const}$. *Тогда* $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} u^\varepsilon(x, y) = \psi_1$.

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая

Лемма а) *Для любого* $\alpha > 0$ *существуют такие положительные константы* a *и* T_0, *что для любой функции* φ_s, *принимающей при* $s \in [0, T]$ *значения в множестве* $D \setminus N$, *где* $N = \{[-1, 1] \times [q - \alpha, q + \alpha]\}$, *имеет место неравенство* $S_{0T}(\varphi) > a(T - T_0)$;

б) *для любого* $\alpha > 0$ *существуют положительные константы* c, T_0 *такие, что при всех достаточно малых* ε *для любого* $(x, y) \in D \setminus N$

$$P^\varepsilon_{xy}\{\tau_\alpha > T\} < \exp\left\{-\frac{c(T - T_0)}{\varepsilon}\right\},$$

где

$$\tau_\alpha = \inf\{t: (x^\varepsilon_t, y^\varepsilon_t) \in D \setminus N\}.$$

Доказательство. Для $(x, y) \in D \setminus N$ обозначим через $\tau(y)$ момент первого выхода решения $\bar{y}^t(y)$ из $D \setminus N$. Так как q — устойчивое положение равновесия динамической системы, то $\tau(y) < \infty$ для всех $(x, y) \in D \setminus N$.

Так как $\bar{y}_t(y)$ непрерывно зависит от y, то функция $\tau(y)$ полунепрерывна сверху. Значит она принимает где-то свое наибольшее значение $\max \tau(y) = T_1$. Положим $T_0 = T_1 + 1$ и рассмотрим все функции φ_t, определенные при $0 \leqslant t \leqslant T_0$, принимающие значения только в $D \setminus N$, для которых $S_{0T}(\varphi) < \infty$. Множество таких функций замкнуто и в силу полунепревывности снизу функционала действия на этом множестве достигает минимума A, который положителен, так как среди рассматриваемых функций φ нет траекторий динамической системы. Итак, для всех таких функций $S_{0T_0}(\varphi) \geqslant A > 0$, для функций, проводящих в $D \setminus N$ время $T > 2T_0$, $S_{0T}(\varphi) \geqslant 2A$ и т. д.

Вообще

$$S_{0T}(\varphi) \geqslant A\left[\frac{T}{T_0}\right] > A\left(\frac{T}{T_0} - 1\right) = a(T - T_0).$$

Пусть константы a и T_0 выбраны. Для произвольной точки $(x, y) \in D \setminus N$ и $T > T_0$ обозначим через $\Phi_0(y)$ множество функций φ_t, $0 \leqslant t \leqslant T$, $\varphi_0 = y$, для которых $S_{0T}(\varphi) \leqslant a(T - T_0)$. Все функции из $\Phi_0(y)$ выходят из $D \setminus N$ на протяжении отрезка $[0, T]$. Применяя второе утверждение теоремы B, получаем

$$P\{\tau_\varepsilon > T\} \leqslant P\{\rho_{0T}(y^\varepsilon, \Phi_0) > \delta\} < \exp\{-\varepsilon^{-1}[a(T - T_0) - h]\} =$$

$$= \exp\left\{-\frac{c(T - T_0)}{\varepsilon}\right\}.$$

Этим заканчивается доказательство леммы.

Перейдем к доказательству теоремы. По условию $d = V(-1) - V(1) > 0$. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы $V(-1) - V(1 + \delta) > \frac{d}{2}$. Обозначим через Φ совокупность всех функций φ, соединяющих отрезок $\Gamma_q = \{[-1, 1] \times (y = q)\}$ с отрезком $\Gamma_{+\delta} = \{[-1, 1] \times (y = 1 + \delta)\}$. Ясно, что траектории y_t^ε, лежащие в δ-окрестности кривых $\varphi \in \Phi$, выходят на $\Gamma_1 = \{[-1, 1] \times (y = 1)\}$. Выберем число μ так, чтобы выполнялись следующие условия:

1) существует функция φ_s, $\varphi_{T_1} \in \Gamma_q$, $\varphi_T \in Q_+ \cup Q_-$, где $Q_+ = \{[-1, 1] \times (y = q + \mu)\}$, $Q_- = \{[-1, 1] \times (y = q - \mu)\}$, такая, что $S_{T, T_1}(\varphi) < d$;

2) $$Q = \{[-1, 1] \times [q - \mu, q + \mu]\} \subset D.$$

Введем случайные моменты времени

$$\tau^0 = 0, \quad \sigma^1 = \min\{t: t > \tau^0, (x_t^\varepsilon, y_t^\varepsilon) \in Q_+ \cup Q_-\},$$

$$\sigma^n = \min\{t: t > \tau^{n-1}, (x_t^\varepsilon, y_t^\varepsilon) \in Q_+ \cup Q_-\},$$

$$\tau^n = \min\{t: t > \sigma^{n-1}, (x_t^\varepsilon, y_t^\varepsilon) \in Q_+ \cup Q_- \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2\}$$

и рассмотрим цепь Маркова $z_n = (x_{\tau^n}^\varepsilon, y_{\tau^n}^\varepsilon)$ на фазовом пространстве $Q_+ \cup Q_- \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Теперь рассмотрим цепь $\bar{z}_n$, которая получается из z_n путем остановки на $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Обозначим через $\bar{A}$ событие: цепь $\bar{z}_n$ достигает множества $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ за один шаг; A_1-цепь достигает множества Γ_1 за один шаг; A_2 = цепь достигает множества Γ_2 за один шаг. Для любого $h > 0$ существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что вероятность $P_{x,y}(A_1)$ при $\varepsilon < \varepsilon_0$, $(x, y) \in Q_+ \cup Q_-$ удовлетворяет неравенствам

$$e^{-\frac{v_3}{\varepsilon} - h} \leqslant P_{x,y}(A_1) \leqslant e^{-\frac{v_3}{\varepsilon} + h}, \text{ где } v_3 = V(1 + \delta).$$

Аналогично для $P_{x,y}(A_2)$ имеет место

$$e^{-\frac{v_2}{\varepsilon} - h} \leqslant P_{x,y}(A_2) \leqslant e^{-\frac{v_2}{\varepsilon} + h}, \text{ где } v_2 = V(-1) \text{ (см. [1])}.$$

Ясно, что $P_{x,y}(A_1 / \bar{A}) \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 1$, $P_{x,y}(A_2 \setminus \bar{A}) \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0$, так как $v_3 < v_2$. Обозначим через τ — момент достижения множества

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 : \tau = \min \{t : (x_t^\varepsilon, y_t^\varepsilon) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2\}$$

и оценим вероятность

$$P_{x,y}^\varepsilon \{y_\tau = -1\} \quad (x, y) \in Q_+ \cup Q_-$$

$$P_{x,y}^\varepsilon \{y_\tau = -1\} = \sum_k P_{x,y}^\varepsilon \{y_\tau = -1, \ \tau = \tau^k\} =$$

$$= \sum_k M_{x,y}^\varepsilon \ P_{x,y}^\varepsilon \{y_1 \in Q_+ \cup Q_-, \cdots, y_{k-1} \in Q_+ \cup Q_-, \ y_k = -1/F_{<\tau^{k-1}}\} =$$

$$= \sum_k M_{x,y}^\varepsilon \chi_{\{y_1 \in Q_+ \cup Q_-, \cdots, y_{k-1} \in Q_+\}} P_{x,y}^\varepsilon \{y_k = -1/F_{<\tau^{k-1}}\} +$$

$$+ \sum_k M_{x,y}^\varepsilon \chi_{\{y_1 \in Q_- \cup Q_-, \cdots, y_{k-1} \in Q_-\}} P_{x,y}^\varepsilon \{y_k = -1/F_{<\tau^{k-1}}\} =$$

$$= \sum_k M_{x,y}^\varepsilon \chi_{\{y_1 \in Q_+ \cup Q_-, \cdots, y_{k-1} \in Q_+\}} P_{x_{\tau^{k-1}}^\varepsilon, y_{\tau^{k-1}}^\varepsilon} \{y_1 = -1\} +$$

$$+ \sum_k M_{x,y}^\varepsilon \chi_{\{y_1 \in Q_+ \cup Q_-, \cdots, y_{k-1} \in Q_-\}} P_{x_{\tau^{k-1}}^\varepsilon, y_{\tau^{k-1}}^\varepsilon} \{y_1 = -1\} \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\frac{\varphi_0 + h}{\varepsilon}} \Big(\sum_k M_{x,y}^\varepsilon \chi_{\{y_1 \in Q_+ \cup Q_-, \cdots, y_{k-1} \in Q_+\}} +$$

$$+ \sum_k M_{x,y}^\varepsilon \chi_{\{y_1 \in Q_+ \cup Q_-, \cdots, y_{k-1} \in Q_-\}} \Big) \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0.$$

Итак, имеем $P_{x,y}^\varepsilon \{y_\tau = -1\} \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0$ и значит $P_{x,y} \{y_\tau = 1\} \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 1$. Теперь уже утверждение теоремы следует из формулы $u^\varepsilon(y) = M_{y,\psi}^\varepsilon (y_\tau^\varepsilon)$.

Рассмотрим теперь случай, когда усредненная система имеет несколько положений равновесия на интервале $(-1, 1)$. Пусть $y_1, y_2, \cdots, y_l \in (-1, 1)$, занумерованные в порядке возрастания устойчивые положения равновесия системы (2). Мы считаем, что в точках y_k поле $\bar{b}(y)$ меняет знак с плюса на минус. Между любыми соседними точками y_k, y_{k+1} имеется неустойчивое положение равновесия z_k, в котором $\bar{b}(y)$ меняет знак с минуса на плюс. В остальных точках $b(y) \neq 0$.

Обозначим $y_0 = -1$, $y_{e+1} = 1$, $L = \{0, 1, \cdots, l\}$, $\bar{L} = \{0, 1, \cdots, l+1\}$. Положим $V_{ij} = \inf \{S_{0T}(\varphi) : \varphi \in C_{0T}(R^1)$, $\varphi_0 = y_i$, $\varphi_T = y_j$, $T > 0\}$ при $i \in L$, $j \in \bar{L}$; $V_{0,1} = V_{e+1,e} = +\infty$, $V_{0,-1} = 0$. Первый момент выхода процесса y_t^ε из $(-1, 1)$ обозначим τ^ε: $\tau^\varepsilon = \inf \{t : |y_t^\varepsilon| = 1\}$.

Теорема 2. *Предположим, что*

$$\min_{k = 0, 1, \cdots, e} \left(\sum_{m=k+1}^{l} V_{m, m+1} + \sum_{m=1}^{k} V_{m, m-1} \right)$$

достигается при единственном значении $k = k^*$. Пусть z_{k^*} — неустойчивое положение равновесия, разделяющее точки y_{k^*} и y_{k^*+1}. Тогда

$$\lim_{\varepsilon\to 0} P_{x,y}\{y^{\varepsilon}_{\tau_\varepsilon}=-1\}=1, \text{ при } x\in(-1,1),\ y<z_{k^*},$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} P_{x,y}\{y^{\varepsilon}_{\tau_\varepsilon}=-1\}=0, \text{ при } x\in(-1,1),\ y>z_{k^*}.$$

Если $\psi_+(x)=\psi_+=\text{const}$, $\psi_-(x)=\psi_-=\text{const}$, *то* $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} u^{\varepsilon}(x,y)=\psi_-$, *при* $y<z_{k^*}$ *и* $=\psi_+$ *при* $y>z_{k^*}$.

Замечание 1. *Легко видеть, что точку* z_{k^*} *можно определить из условия* $\min\limits_{-1<z<1}\Phi(z)=\Phi(z_{k^*})$, где

$$\Phi(z)=\inf\{S_{0T}(\varphi);\varphi\in C_{0T}(R^1):\varphi_0=z,\ \varphi_T=-1\}+$$

$$+\inf\{S_{0T}(\varphi);\varphi\in C_{0T}(R^1),\ \varphi_0=z,\ \varphi_T=1\}.$$

Замечание 2. *Если* $b(x,-1)<0$ *и* $b(x,1)>0$ *при всех* $x\in[-1,1]$, *то можно не предполагать, что* $\psi_+(x)$ *и* $\psi_-(x)$ *— константы. В этом случае*

$$\psi_+=\int_{-1}^{1}\psi_+(x)\,m_1(x)\,dx,\quad \psi_-=\int_{-1}^{1}\psi_-(x)\,m_{-1}(x)\,dx.$$

Наметим доказательство теоремы 2. Опишем разбиение множества L на иерархию циклов. Определим j_B, где B — отрезок множества L $B=(i,\ i+1,\cdots,k)$ $B\subset L$ следующим образом:

$$j_B=\begin{cases} i-1 & V_{k,k-1}+\cdots+V_{i+1,i}<V_{i,i+1}+\cdots+V_{k-1,k}\\ k+1 & V_{k,k-1}+\cdots+V_{i+1,i}>V_{i,i+1}+\cdots+V_{k-1,k}.\end{cases}$$

Введем еще функцию $j^n(i)$, $i\in L$, $n=0,\ 1,\ 2,\cdots$ с помощью равенств $j^0(i)=i$, $j^1(i)=j_{\{i\}},\cdots j^n(i)=j_{\{j^{n-1}(i)\}}$. Для каждого $i\in L$ рассмотрим последовательность $i,\ j^1(i),\cdots,\ j^k(i),\cdots$. Пусть n—наименьшее число, при котором в этой последовательности начнутся повторения: $n=\min\{k: j^k(i)=j^{k+2}(i)\}$. В этом случае циклами первого ранга, порожденными состоянием i, назовем упорядоченные группы

$$\{i\},\ \{j^1(i)\},\cdots,\ \{j^{n-1}(i)\},\ \{j^n(i)\cup j^{n+1}(i)\}.$$

Если же такого n не существует, т. е. при некотором m $j^m(i)=i+1$, или $j^m(i)=0$, то циклами первого ранга, порожденными состоянием i, назовем $\{i\},\ \{j^1(i)\},\cdots,\ \{j^{m-1}(i)\}$.

Циклы k-го ранга или короче k-циклы определяются рекуррентно Пусть $\pi_1^{k-1},\cdots,\ \pi_{n_{k-1}}^{k-1}$ — все циклы ранга k—1. Будем говорить, что цикл π_j^{k-1} следует за циклом π_i^{k-1} и писать $\pi_i^{k-1}\to\pi_j^{k-1}$, если $j_{\Pi_i^{k-1}}\in\Pi_j^{k-1}$, где Π_m^{k-1} — множество точек из L, принадлежащих циклу π_m^{k-1}. Рассмотрим какой-то цикл π_i^{k-1} и последовательность $\pi_i^{k-1}\to\pi_{i_1}^{k-1}\to\cdots\to\pi_{i_n}^{n-1}\to\cdots$. Пусть m — наименьший номер, при котором $\pi_{i_m}^{k-1}=\pi_{i_{m+2}}^{k-1}$. Тогда будем говорить, что цикл π_i^{k-1} порождает циклы

k-го ранга $\{\pi_{i_1}^{k-1}\}, \cdots, \{\pi_{i_{m-1}}^{k-1}\}, \{\pi_{i_m}^{k-1}, \{\pi_{i_{m+1}}^{k-1}\}$. Если же такого m не существует, т. е. для какого-то m $j_{\Pi_m^{k-1}} = l+1$ или $j_{\Pi_m^{k-1}} = 0$, то будем говорить, что цикл π_i^{k-1} порождает циклы k-го ранга $\{\pi_{i_1}^{k-1}\}$, $\{\pi_{i_2}^{k-1}\}, \cdots, \{\pi_{m-1}^{k-1}\}$ $\{\pi_m^{k-1}\}$. Отдельные точки множества L будем называть циклами нулевого ранга. Пусть π—какой-то цикл, $\Pi = \{i, i+1, \cdots, k\}$. Назовем основным состоянием цикла π такую точку $d(\pi)$:

$$d(\pi) = \begin{cases} i & j_\pi = i-1 \\ k & j_\pi = k+1. \end{cases}$$

В случае общего положения это состояние единственно.

Обозначим $\pi^k(i)$ k-цикл, содержащий точку i. С увеличением k $\Pi^k(i)$ не убывают. Существует такое s, что для всех $i \in L$ $\pi^s(i) = \pi^{s+1}(i)$. Пусть $\pi_1^s, \pi_2^s, \cdots, \pi_m^s$ — всевозможные s-циклы. На множестве $\Pi = \{i, i+1, \cdots, k\}$ каждого такого s-цикла (содержащего больше одной точки), рассмотрим последовательность стрелок $(j \to j+1)$, соединяющих i с $k+1$, если $d(\pi) = k$ или $(j \to j-1)$, соединяющих k с $i-1$, если $d(\pi) = i$. Тогда для любого $i \in L$ мы будем иметь последовательность стрелок, ведущих либо в 0, либо в $l+1$.

Пусть $\min\limits_i (y_i - y_{i-1}) > 2\mu$.

Обозначим $\Gamma_i = \{(y_i - \mu) \times [-1, 1]\} \cup \{(y_i + \mu) \times [-1, 1]\}$,

$$Y_i = \{y_i \times [-1, 1]\}.$$

Рассмотрим марковский процесс $\{x_t^\varepsilon, y_t^\varepsilon\}$. Этот процесс порождает марковскую цепь z_n на фазовом пространстве $Y_1 \cup Y_2 \cup \cdots \cup Y_e$. Для определения цепи z_n введем случайные моменты τ_n и σ_n

$$\tau_0 = \min\{t;\ (x_t^\varepsilon, y_t^\varepsilon) \in \cup Y_i\},$$

$$\sigma_1 = \min\{t:\ t > \tau_0\ (x_t^\varepsilon, y_t^\varepsilon) \in \cup \Gamma_i\},$$

$$\sigma_n = \min\{t : t > \tau_{n-1}\ (x_t^\varepsilon, y_t^\varepsilon) \in \cup \Gamma_i\},$$

$$\tau_n = \min\{t : t > \sigma_{n-1}\ (x_t^\varepsilon, y_t^\varepsilon) \in \cup Y_i\}.$$

Положим $z_n = (x_{\tau_n}^\varepsilon, y_{\tau_n}^\varepsilon)$. Если в какой-то момент цепь находится в множестве Y_i и μ выбрано достаточно малым, то вероятность перехода за один шаг в множество Y_j $(j = i+1, i-1)$ близка к $\exp\left\{-\frac{V_{ij}}{\varepsilon}\right\}$ (см. [1]). Для дальнейшего нам понадобится следующая

Лемма. *Пусть* $\{i, i+1, \cdots, k\}$ — *цикл.*

$$S_1 = V_{i,\,i+1} + \cdots + V_{k,\,k+1},\quad S_2 = V_{i,\,i-1} + \cdots + V_{k,\,k-1}.$$

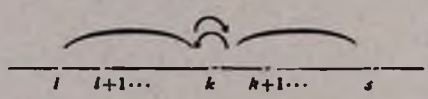
Если $S_1 < S_2$, *то исходя из любой точки множества* Y_j $i \leqslant j \leqslant k$ *цепь* z_n *сойдет на множество* Y_{k+1} *с вероятностью, стремящейся к* 1, *а на множество* Y_{i-1} *с вероятностью, заключенной при малых* ε *между величинами* $\exp\{\varepsilon^{-1}[S_1 - S_2 \pm (k-i+1)h]\}$. *Если*

ՀԱՅԿ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՖՈՒՆԴԱՄԵՆՏԱԼ ԳՐԱԴԱՐԱՆ

$S_1 > S_2$, то цепь z_n сойдет на Y_{i-1} с вероятностью, стремящейся к 1, а на Y_{k+1} с вероятностью, заключенной при малых ε между величинами $\exp\{\varepsilon^{-1}[S_2 - S_1 \pm (k - ih]\}$, *где h — наперед заданное малое положительное число.*

Доказательство проведем по индукции $\overline{\underset{i-1}{\quad}\ \underset{i}{\quad}\ \underset{i+1}{\quad}}$. Из точки i за один шаг z_n сойдет на $i+1$ с вероятностью заключенной при малых ε между величинами $\exp\left\{-\varepsilon^{-1}\left(V_{i,\,i+1} \pm \frac{h}{2}\right)\right\}$, а в точку $i-1$ — с вероятностью, заключенной между величинами

$\exp\left\{-\varepsilon^{-1} \times \left(V_{i,\,i-1} \pm \frac{h}{2}\right)\right\}$ (см. [1]).



Шаг индукции.

$$S_1 < S_2,\ S_3 < S_4, \text{ где } S_1 = V_{i,\,i+1} + \cdots + V_{k,\,k+1}$$
$$S_2 = V_{i,\,i-1} + \cdots + V_{k,\,k-1},\ S_3 = V_{k+1,\,k} + \cdots + V_{s,\,s-1},$$
$$S_4 = V_{k+1,\,k+2} + \cdots + V_{s,\,s+1}.$$

Переход в $(s+1)$-е состояние каждый раз будет происходить с вероятностью, заключенной при малых ε между величинами $\exp\{-\varepsilon^{-1}(S_4 - S_3 \pm k_1 h)\}$, а в $(i-1)$-е состояние каждый раз с вероятностью, заключенной при малых ε между величинами $\exp\{-\varepsilon^{-1}(S_2 - S_1 \pm k_2 h)\}$. Ясно, что если $S_2 - S_1 < S_4 - S_3$, то переход влево происходит с вероятностью, стремящейся к 1, при малых ε, а вправо — с вероятностью, заключенной между величинами

$\exp\{-\varepsilon^{-1}(S_4 - S_3 - S_2 + S_1 \pm k_3 h)\}$, где $S_4 + S_1 = V_{i,\,i+1} + \cdots + V_{s,\,s+1}$,
$$S_2 + S_3 = V_{i,\,i-1} + \cdots + V_{s,\,s-1}.$$

Итак, лемма доказана.

Теперь на основании доказанной леммы легко понять, что цепь z_n из множества $\bigcup_{i \in \Pi} Y_i$ перейдет в множество $Y_{j(x)}$. Ясно также, что для всех k, $k \leqslant k^*$ последовательность стрелок, введенных выше, ведет в 0, а для всех m, $m \geqslant k^* + 1$ последовательность стрелок ведет в $l+1$.

Вернемся к поведению процесса $(x_t^\varepsilon, y_t^\varepsilon)$. Прежде всего из точки (x, y) траектория процесса с вероятностью, близкой к 1 при малых, ε, следуя вдоль решения $\overline{y}_t(y)$, достигнет множества $Y_i(y)$: затем будут совершаться переходы в соответствии с введенной нами цепью Маркова. И в конце концов выйдет за границу.

Автор приносит благодарность В. В. Сарафяну за обсуждение рассматриваемых задач и ценные замечания.

Армянский государственный
педагогический институт
им. Х. Абовяна

Поступила 10.VI.1979

Ռ. Դ. ՍԱՖԱՐՅԱՆ. Որոշ եզրային խնդիրներ փոքր պարամետրով՝ վերածվող դիֆուզիոն պրոցեսների և համապատասխան դիֆերենցիալ հավասարումների համար *(ամփոփում)*

Հավանականության ուղղակի մեթոդներով ուսումնասիրվում են փոքր պարամետրից կախված դիֆուզիոն պրոցեսի հետագծերը։

R. G. SAFARIAN. *Some boundary value problems with small parameter for degenerate difusion processes and corresponding differential equations* (summary)

The orbites of difusion processes depending on a small parameter are considered by direct probability methods.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Д. Вентцель, М. И. Фрейдлин.* О малых случайных возмущениях динамических систем, УМН, 25:1, 1970, 9—55.
2. *Р. З. Хасьминский.* Предельная теорема для решений дифференциальных уравнений со случайной правой частью. Теория вероятн. и ее примен., 11:3, 1966, 444—462.
3. *А. Д. Вентцель, М. И. Фрейдлин.* Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений, М., «Наука», 1979.
4. *В. В. Сарафян, Р. Г. Сафарян, М. И. Фрейдлин.* Вырождающиеся диффузионные процессы и дифференциальные уравнения с малым параметром, УМН, 33:6, 1978, 233—234.
5. *А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров.* Теория экстремальных задач, М., «Наука», 1974.
6. *М. И. Фрейдлин.* Принцип усреднения и теоремы о больших уклонениях, УМН, 33:5, 1978, 107—160.