

Н. Б. ЕНГИБАРЯН

ФАКТОРИЗАЦИЯ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ И НЕЛИНЕЙНЫЕ
ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В в е д е н и е

Задача факторизации в винеровской алгебре преобразований Фурье от суммируемых функций относится к сложным и важным крайним задачам теории аналитических функций. Метод Винера—Хопфа раскрыл органическую связь этой задачи с факторизацией интегральных операторов Винера—Хопфа [1, 2].

На основании теоремы Винера—Леви построена достаточно полная теория этой задачи в скалярном неособом случае [1]. Теория факторизации матриц-функций развита менее полно.

В работе [3] установлена связь отмеченных выше факторизационных задач с одним новым нелинейным интегральным уравнением. Дальнейшее развитие методов работы [3] приводит к новым результатам по этим факторизационным задачам как в неособом, так и в особом случаях, а также по системам интегральных уравнений Винера—Хопфа. Изложению этих вопросов посвящена настоящая работа.

§ 1 Вспомогательные предложения; уравнение
факторизации

1°. Пусть $\mathfrak{M} = \mathbb{C}^{m \times m}$ — алгебра комплексных $m \times m$ матриц с нулем 0 и с единицей I , снабженная топологией покомпонентной сходимости. Пусть $K \subset \mathfrak{M}$ — конус матриц с неотрицательными компонентами [4], вводящий частичный порядок $>$ в $\mathfrak{M}$, а $K_1 \subset K$ состоит из матриц с положительными компонентами. Пусть $A, B \in \mathfrak{M}$. Запись $A > B$ означает, что $A - B \in K_1$, а $A \vdash B$ означает, что $A \geq B$ и $A \neq B$. Запись $A_n \uparrow$ означает, что последовательность $A_n \in \mathfrak{M}$ возрастает по конусу K .

Пусть $K_p \subset K$ — класс примитивных матриц: если $A \in K_p$, то $A \in K$ и $\exists k \in \mathbb{N}$, что $A^k > 0$. Класс K_p совпадает с классом неотрицательных неразложимых матриц [5].

Пусть $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ — некоторый набор чисел, принимающих значения ± 1 . Пусть I_ε — диагональная матрица: $I_\varepsilon = (\varepsilon_i \delta_{ij})$. Наряду с конусом K мы будем рассматривать также следующий конус $K(\varepsilon)$: если $A = (a_{ij}) \in K(\varepsilon)$, то $a_{ij} \varepsilon_i \varepsilon_j \geq 0$. Элементы $K(\varepsilon)$ представляются в виде $I_\varepsilon B I_\varepsilon$, где $B \in K$. Очевидно, $K(\varepsilon)$ замкнут относительно умножения.

Пусть $r(A)$ — спектральный радиус матрицы A (см. [5]), $r(A)$ непрерывным образом зависит от A . Если $A > B \geq 0$, то

$$r(A) > r(B). \quad (1)$$

Лемма 1. Если $A_n \in K_p$, $A_n \uparrow$ и $r(A_n) \leq \rho$, то

$$\exists \lim A_n = A, \quad r(A) \leq \rho.$$

Доказательство. Пусть $B_1 \equiv A_1^k > 0$. Тогда $B_q \equiv A_q^k > 0$, $q=1, 2, \dots$ и $r(B_q) \leq \rho^k$. Пусть $a_{ij}^{(k)}(q)$ — элементы матрицы A_q^k . Имеем $0 \leq a_{ii}^{(2k)}(q) \leq \rho^{2k}$. С другой стороны

$$a_{ij}^{(k)}(q) a_{ji}^{(k)}(q) \leq a_{ii}^{(2k)}(q) \leq \rho^{2k}, \quad i, j = 1, \dots, m,$$

откуда

$$a_{ij}^{(k)}(q) \leq \frac{\rho^{2k}}{a_{ji}^{(k)}(q)} \leq \frac{\rho^{2k}}{a_{ji}^{(k)}(1)}. \quad (2)$$

Из возрастания последовательностей $\{a_{ij}^{(k)}(q)\}_{q=1}^{\infty}$ и из оценок (2) следует сходимость этих последовательностей. Докажем теперь сходимость последовательностей $a_{iv}(q)$. Воспользуемся очевидным неравенством

$$a_{iv}(q) a_{vj}^{(k-1)}(q) \leq a_{ij}^{(k)}(q) \leq \frac{\rho^{2k}}{a_{ji}^{(k)}(q)}, \quad (3)$$

$$i, j, v = 1, \dots, m.$$

Легко убедиться, что $a_{vj}^{(k-1)}(q) > 0$ для некоторого $j \in \{1, \dots, m\}$. В противном случае нарушалось бы неравенство $A_1^k > 0$. Поэтому из (3) получаем оценку

$$a_{iv}(q) \leq \frac{\rho^{2k}}{a_{vj}^{(k-1)}(1) a_{ji}^{(k)}(1)},$$

что и доказывает лемму. ►

2°. Пусть E^+ — одно из пространств $L_p^+ \equiv L_p(0, \infty)$ ($p \geq 1$),

$$M(0, \infty), \quad C_0[0, \infty), \quad \text{а} \quad E^+ = E^+ \times \dots \times E^+.$$

Пусть $L = L^m \times L^m$ и $L^+ = L^m \times L^m$ пространства $m \times m$ матриц-функций с элементами из $L_1(-\infty, \infty)$ и L_1^+ соответственно. Если в L ввести умножение $*$ посредством свертки

$$(T_1 * T_2)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} T_1(x-t) T_2(t) dt,$$

то L обращается в алгебру, причем произведение $T_1 * T_2$ непрерывным образом зависит от сомножителей.

Конус $\bar{K} \subset L$ матриц-функций со значениями из K вполне правильный [4], то есть монотонная по конусу и ограниченная по норме (покомпонентно) последовательность из L сходится.

Введем винеровскую алгебру $\mathcal{W}$ преобразований Фурье элементов из L и его подалгебры $\mathcal{W}_{\pm} \subset \mathcal{W}$:

$$\bar{T} \in \mathcal{W}, \text{ если } \bar{T}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} T(x) dx, T \in L, \operatorname{Im} s = 0;$$

$$\bar{U} \in \mathcal{W}_+, \text{ если } \bar{U}(s) = \int_0^{\infty} U(x) e^{isx} dx, U \in L^+, \operatorname{Im} s > 0;$$

$$\bar{V} \in \mathcal{W}_-, \text{ если } \bar{V}(s) = \int_0^{\infty} V(x) e^{-isx} dx, V \in L^+, \operatorname{Im} s \leq 0.$$

Матрицы-функции $\bar{U}$ и $\bar{V}$ голоморфны в верхней и нижней полуплоскостях соответственно, комплексной плоскости и непрерывны вплоть до вещественной оси, а $\bar{T}$ непрерывна на вещественной оси.

Рассмотрим следующую задачу: для $\bar{T} \in \mathcal{W}$ найти $\bar{U} \in \mathcal{W}_+$ и $\bar{V} \in \mathcal{W}_-$ так, чтобы имела место факторизация

$$I - \bar{T}(s) = [I - \bar{V}(s)] [I - \bar{U}(s)], \operatorname{Im} s = 0. \quad (4)$$

Сформулируем вторую факторизационную задачу.

Пусть Ω и $\Omega^{\pm} \subset \Omega$ — следующие классы интегральных операторов, действующих в E_+^m : $\hat{T} \in \Omega$, если

$$(\hat{T}f)(x) = \int_0^{\infty} T(x-t) f(t) dt, T \in L, f \in E_+^m;$$

$\hat{U} \in \Omega^+$, $\hat{V} \in \Omega^-$, если

$$(\hat{U}f)(x) = \int_0^x U(x-t) f(t) dt; (\hat{V}f)(x) = \int_x^{\infty} V(t-x) f(t) dt,$$

$U, V \in L^+, f \in E_+^m$.

Рассмотрим факторизацию

$$I - \hat{T} = [I - \hat{V}] [I - \hat{U}], \quad (5)$$

где J — единичный оператор. (5) понимается как равенство операторов, действующих в E_+^m .

В [3] показано, что факторизации (4) и (5) имеют место тогда и только тогда, когда (U, V) удовлетворяет уравнениям

$$U(x) = T_+(x) + \int_0^{\infty} V(t) U(x+t) dt, \quad (6)$$

$$V(x) = T_-(x) + \int_0^{\infty} V(x+t) U(t) dt,$$

где $T_{\pm}(x) = T(\pm, x)$, $x \geq 0$, $U, V, T_{\pm} \in L^+$.

Если T удовлетворяет условию $T_-(x) = T^*(x)$, где знаком $\#$ отмечается переход к транспонированной матрице, то система (6) сводится к уравнению

$$U(x) = T(x) + \int_0^{\infty} U^*(t) U(x+t) dt, \quad (7)$$

$$V = U^*.$$

§ 2 Основная теорема

1°. Исследуем уравнение (5). Построим следующий итерационный процесс для (5). Пусть $\tau \in [0, 1]$. Обозначим

$$U_{\tau}(x) = \tau T_+(x), \quad V_{\tau}(x) = \tau T_-(x). \quad (8)$$

Определим U_{τ} и V_{τ} на промежутке $\tau \in [0, n]$ рекуррентно по n , согласно равенствам.

$$U_{\tau+1}(x) = T_+(x) + \int_0^{\infty} V_{\tau}(t) U_{\tau}(x+t) dt, \quad (9)$$

$$U_{\tau+1}(x) = T_-(x) + \int_0^{\infty} V_{\tau}(x+t) U_{\tau}(t) dt,$$

$$\tau \in (n, n+1].$$

Очевидно, U_{τ} и V_{τ} — непрерывные функции от τ на $[0, \infty)$ со значениями из L^+ . Обозначим

$$M_{\pm} = \int_0^{\infty} T_{\pm}(x) dx, \quad M = M_+ + M_- = \int_{-\infty}^{\infty} T(x) dx;$$

$$\alpha_{\tau} = \int_0^{\infty} U_{\tau}(x) dx, \quad \beta_{\tau} = \int_0^{\infty} V_{\tau}(x) dx,$$

$$r_1(\tau) = r(\alpha_{\tau}), \quad r_2(\tau) = r(\beta_{\tau}).$$

Матрицы-функции α_{τ} и β_{τ} непрерывно зависят от τ . Поэтому их спектральные радиусы $r_1(\tau)$ и $r_2(\tau)$ суть непрерывные функции от τ .

Лемма 2. Справедлива формула

$$\alpha_{\tau+1} + \beta_{\tau+1} = M + \beta_{\tau} \alpha_{\tau}, \quad \tau \geq 0. \quad (10)$$

Доказательство. Интегрируя соотношения (9) по x от 0 до ∞ получаем

$$\begin{aligned} \alpha_{\tau+1} = M_{+} + \int_0^{\infty} V_{\tau}(t) dt \int_t^{\infty} U_{\tau}(x) dx; \quad \beta_{\tau+1} = M_{-} + \\ + \int_0^{\infty} V_{\tau}(t) dt \int_0^t U_{\tau}(x) dx, \end{aligned}$$

складывая которые приходим к (10). ▸

Очевидно, если T принимает значения из K , то U_{τ} , V_{τ} , α_{τ} , β_{τ} также неотрицательны и являются неубывающими функциями от τ .

Лемма 3. Пусть $T \in \tilde{K}$ и $M_{\pm} \in K_p$. Тогда выполняется неравенство

$$\beta_{\tau+1} \alpha_{\tau+1} - \beta_{\tau} \alpha_{\tau} \geq 0. \quad (11)$$

Доказательство. Для $\tau \in [0, 1]$ из (10) и (9) имеем

$$(\beta_{\tau+1} - \beta_{\tau}) + (\alpha_{\tau+1} - \alpha_{\tau}) = (1 - \tau) M + \beta_{\tau} \alpha_{\tau} \geq 0,$$

поскольку выполняется хотя бы одно из неравенств $\beta_{\tau+1} \geq \beta_{\tau}$, или $\alpha_{\tau+1} \geq \alpha_{\tau}$. Из примитивности матриц $M_{\pm}$ следует, что $\alpha_{\tau+1}$ и $\beta_{\tau+1}$ неразложимы, поэтому

$$\beta_{\tau+1} \alpha_{\tau+1} - \beta_{\tau} \alpha_{\tau} = (\beta_{\tau+1} - \beta_{\tau}) \alpha_{\tau+1} + \beta_{\tau} (\alpha_{\tau+1} - \alpha_{\tau}) \geq 0,$$

что и доказывает (11) при $\tau \in [0, 1]$. Пусть $\tau \in (n, n+1]$. Докажем (11) индукцией по n . Из (10) имеем

$$(\beta_{\tau+2} - \beta_{\tau+1}) + (\alpha_{\tau+2} - \alpha_{\tau+1}) = \beta_{\tau+1} \alpha_{\tau+1} - \beta_{\tau} \alpha_{\tau} \geq 0.$$

Поэтому либо $\beta_{\tau+2} \geq \beta_{\tau+1}$, либо $\alpha_{\tau+2} \geq \alpha_{\tau+1}$. Аналогично случаю $\tau \in [0, 1]$ убеждаемся, что $\beta_{\tau+2} \alpha_{\tau+2} - \beta_{\tau+1} \alpha_{\tau+1} \geq 0$. ▸

Лемма 4. Пусть $T \in \tilde{K}$; $M_{\pm} \in K_p$; $r(M) \leq 1$. Тогда а) справедливы оценки

$$r_1(\tau) < 1, \quad r_2(\tau) < 1, \quad \tau \in [0, \infty); \quad (12)$$

б) существуют пределы $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \alpha_{\tau} = \alpha$, $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \beta_{\tau} = \beta$, причем

$$\alpha, \beta \in K_p; \quad r(\alpha) \leq 1; \quad r(\beta) \leq 1; \quad (13)$$

в) справедливо соотношение

$$\alpha + \beta = M + \beta \alpha; \quad (I - \beta)(I - \alpha) = I - M. \quad (14)$$

Доказательство. Докажем (12) от противного. Пусть хотя бы одно из неравенств (12) нарушается. Тогда $\exists s > 0$ такое, что

либо $r_1(s+1) = 1, \quad r_1(\tau+1) < 1 \quad (\tau < s), \quad r_2(s+1) \leq 1,$

либо $r_2(s+1) = 1, \quad r_2(\tau+1) < 1 \quad (\tau < s), \quad r_1(s+1) \leq 1.$

(15)

Из (10) имеем

$$[I - \beta_{s+1}][I - \alpha_{s+1}] = I - M + \delta, \quad (16)$$

где $\delta = \beta_{s+1}\alpha_{s+1} - \beta_s\alpha_s \succ 0$.

Покажем, что существует положительный вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m) > 0$, такой, что

$$[I - \beta_{s+1}][I - \alpha_{s+1}]\xi = 0.$$

Действительно, при выполнении первого из условий (15) в качестве ξ возьмем неподвижный положительный вектор матрицы α_{s+1} , существование которого следует из теоремы Перрона [6]. Если же $r_1(s+1) < 1$ и $r_2(s+1) = 1$, то в качестве ξ возьмем $\xi = [I - \alpha_{s+1}]^{-1} \eta$, где η — положительный неподвижный вектор матрицы β_{s+1} . Положительность ξ следует из положительности $[I - \alpha_{s+1}]^{-1} \in K_p$.

Из (16) имеем ($\nu = \delta\xi \succ 0$)

$$(I - M)\xi = -\nu. \quad (7)$$

Покажем, что это равенство противоречивое. Действительно, при $r(M) < 1$ из $-\nu \prec 0$ и из $(I - M)^{-1} \in K_p$ следует $\xi \prec 0$. Если же $r(M) = 1$, то уравнение (17) не имеет решения ξ , поскольку ν не ортогонален положительному решению $\tilde{\xi}$ сопряженного уравнения $(I - M^*)\tilde{\xi} = 0$. Полученное противоречие приводит к оценкам (12).

Так как при $\tau > 0$ матрицы α_τ и β_τ принимают значения из K_p , возрастают по τ и удовлетворяют условиям (12), то из леммы 1 следует второе утверждение леммы. Совершая предельный переход в (10) при $\tau \rightarrow \infty$ получаем (14).

На основании теоремы Б. Леви заключаем, что при выполнении условия леммы 4, существуют пределы: $\alpha_\tau \rightarrow \alpha \in K_p$ и $\beta_\tau \rightarrow \beta \in K_p$ в $L_{m \times m}^+$.

С учетом леммы о мажоранте, аналогичной теореме 2.2 работы [3], приходим к следующей теореме.

Теорема 1. Пусть $T \in L$, матрицы $M_\pm = \int_0^\infty |T_\pm(x)| dx$ примитивны и $r(M_+ + M_-) \leq 1$. Тогда существует каноническое решение (U, V) уравнения (6), причем $r(\alpha) \leq 1$, $r(\beta) \leq 1$, где

$$\alpha = \int_0^\infty |U(x)| dx, \quad \beta = \int_0^\infty |V(x)| dx.$$

Из (12) и (14) видно, что если $T \in \tilde{K}$ и $r(M) < 1$, то $r(\alpha) < 1$ и $r(\beta) < 1$. Если же $r(M) = 1$, то выполняется хотя бы одно из равенств $r(\alpha) = 1$, $r(\beta) = 1$. В симметрическом случае $T(-x) = T^*(x)$ имеем $V = U^*$ и $\beta = \alpha^*$. Тогда из условия $r(M) = 0$ следует, что

$$r(\alpha) = r(\beta) = 1. \quad (18)$$

2°. Полученные выше леммы 1—4 легко распространяются на тот случай, когда конус K заменяется конусом $K(\varepsilon)$. Рассмотрим уравнение (6), где T принимает значения из $K(\varepsilon)$. Исходя из связи между конусами K и $K(\varepsilon)$, нетрудно свести этот случай к случаю, когда T принимает значения из K . Действительно, применяя к уравнениям (6) слева и справа матрицу I_ε , с учетом $I_\varepsilon^2 = I$ получаем новое уравнение относительно $I_\varepsilon U I_\varepsilon$ и $I_\varepsilon V I_\varepsilon$, где матрица-функция T заменена матрицей-функцией $I_\varepsilon T I_\varepsilon$ со значениями из K .

3°. Ранее известные результаты по факторизации (4) относятся к случаю, когда выполняется условие

$$\det [I - \bar{T}(s)] \neq 0, \quad -\infty < s < +\infty \quad (19)$$

и так называемые частные индексы равны нулю (см. [12]). Из теоремы 1 следует новый результат по факторизации (4), относящийся к случаю, когда нарушается условие (19). Так обстоит дело, когда

$$T \in \bar{K}, \quad M_\pm \in K_p, \quad r(M) = 1,$$

или тогда, когда $I_\varepsilon T I_\varepsilon \in \bar{K}$, $I_\varepsilon M_\pm I_\varepsilon \in K_p$, $r(M) = 1$. В обоих случаях имеем $\det [I - \bar{T}(0)] = \det [I - M] = 0$.

В случае же, когда $r(M) < 1$, теорема 1 приводит к новому результату по факторизации (4), заключающемуся в оценках $r(\alpha) < 1$ и $r(\beta) < 1$.

§ 3. Частные случаи

В настоящем параграфе будем рассматривать уравнение (6) в двух важных частных случаях.

1°. Рассмотрим уравнение (6) в том частном случае, когда $T \in \bar{K}$ и матрица M принадлежит классу K_2 матриц Минковского—Леонтьева (см. [6]), то есть удовлетворяет условиям

$$\mu_{ij} = (M)_{ij} > 0, \quad \mu = \max_j \mu_j \leq 1, \quad \text{где } \mu_j = \sum_i \mu_{ij}. \quad (20)$$

Класс K_2 включает в себя класс стохастических матриц, для которых выполняется условие $\mu_j = 1$ ($j = 1, \dots, m$).

В рассматриваемом частном случае удастся получить важную дополнительную информацию о матрицах β_+ и β_- .

Перепишем (9) в матричных элементах и положим $\tau = n$:

$$\alpha_{ij}(n+1) + \beta_{ij}(n+1) = \mu_{ij} + \sum_{k=1}^m \beta_{ik}(n) \alpha_{kj}(n), \quad (21)$$

где

$$\alpha_n = (\alpha_{ij}(n)), \quad \beta_n = (\beta_{ij}(n)).$$

Введем обозначения

$$\nu_i = \sum_j \mu_{ij}, \quad \nu = \max_i \nu_i,$$

$$x_i(n) = \sum_j a_{ij}(n), \quad a_j(n) = \sum_i a_{ij}(n), \quad \beta_j(n) = \sum_i \beta_{ij}(n).$$

Лемма 5. При $\mu \leq 1$ справедливы оценки

$$\beta_j(n) \leq \mu_j \quad (j=1, \dots, m). \quad (22)$$

Доказательство. Суммируя (21) по i получаем

$$a_j(n+1) + \beta_j(n+1) = \mu_j + \sum_s \beta_{sj}^n(n) a_{sj}(n),$$

откуда

$$\beta_j(n+1) = \mu_j - [a_j(n+1) - a_j(n)] - \sum_s [1 - \beta_{sj}(n)] a_{sj}(n),$$

откуда следует (22) индукцией по n .

Аналогично

$$\nu \leq 1 \Rightarrow x_i(n) \leq \nu_i \quad (i=1, \dots, m). \quad (23)$$

Из (22) и (23) следует существование канонического решения (предела итерационного процесса (9)) уравнения (6) в том случае, когда матрица M дважды стохастическая или мажорируется такой матрицей.

В симметрическом случае, когда M стохастическая, то β и α также являются стохастическими. Этот факт следует из равенства (18) и из оценок (22), (23).

В том случае, когда выполняются условия

$$\mu \leq 1, \quad M_+ \in K_\rho, \quad (24)$$

из результатов предыдущего и настоящего параграфов следует существование канонического решения уравнения (6), причем выполняется условие

$$\beta_j = \sum_i \beta_{ij} \leq \mu_j. \quad (25)$$

Результаты настоящего пункта получены совместно с Р. Г. Бадалян.

2°. В работах [3, 7] было показано, что существует простая связь между уравнениями (6) и обобщенными уравнениями Амбарцумяна. Эта связь заключается в следующем. Пусть матрицы-функции $T_\pm$ имеют представление

$$T_\pm(x) = \int_a^b e^{-xs} G_\pm(s) ds(s), \quad (a, b) \subset (0, \infty), \quad (26)$$

где σ — неубывающая функция, а $G_\pm \geq 0$ — суть $m \times m$ матрицы-функции, удовлетворяющие условиям

$$g_{\pm} \in K_p, r(g_{+} + g_{-}) \leq 1, \text{ где } g_{\pm} = \int_a^b G_{\pm}(s) \frac{d\sigma(s)}{s}. \quad (27)$$

Пусть матрицы-функции $H_{\pm}$ удовлетворяют системе

$$H_{+}(s) = G_{+}(s) + \int_a^b \frac{H_{-}(p) H_{+}(s)}{s+p} d\sigma(p), \quad (28)$$

$$H_{-}(s) = G_{-}(s) + \int_a^b \frac{H_{-}(s) H_{+}(p)}{s+p} d\sigma(p)$$

и условиям

$$H_{+} \geq 0, \int H_{\pm}(s) \frac{d\sigma(s)}{s} < +\infty. \quad (29)$$

Тогда уравнение (6) обладает решением вида

$$U(x) = \int_a^b e^{-xs} H_{+}(s) d\sigma(s), \quad V(x) = \int_a^b e^{-xs} H_{-}(s) d\sigma(s). \quad (30)$$

Уравнение (28) представляет собой обобщение известного уравнения Амбарцумяна в теории переноса [8] на несимметрический матричный случай. Применение метода предыдущего параграфа („непрерывизация“ итерационного процесса, оценка спектральных радиусов) в сочетании с методом изучения уравнения (28), изложенным в [3], приводит к новым результатам по уравнению (28). Таким путем получается

Теорема 2. При выполнении условий (27) уравнение (28) имеет каноническое решение (в смысле работы [3]), причем

$$r \left[\int H_{\pm}(s) \frac{d\sigma(s)}{s} \right] \leq 1. \quad (31)$$

По формуле (30) каноническое решение уравнения (28) переходит в каноническое решение уравнения (6). ►

§ 4. Однородное уравнение Винера-Хопфа

В качестве приложения результатов § 2 в настоящем параграфе будет рассмотрено уравнение

$$S(x) = \int_0^{\infty} T(x-t) S(t) dt. \quad (32)$$

Здесь T — заданная матрица-функция, удовлетворяющая условиям

$$T \in \tilde{K}, T_{+}^{*}(x) = T_{-}(x), M_{+} \in K_p, r(M) = 1, \quad (33)$$

а S —искомая положительная вектор-функция медленного (полиномиального) роста. Этой задаче в скалярном случае посвящено большое число исследований (см. [10—12]).

В § 2 было показано, что при выполнении условий (33) существует факторизация (5), где U является каноническим решением уравнения (7) и $V=U^*$, причем выполняются условия

$$U \in \tilde{K}, \alpha \equiv \int_0^{\infty} U(x) dx \in K_p, r(\alpha) = 1. \quad (34)$$

Согласно теореме Перрона, существуют положительные неподвижные векторы f и $\tilde{f}$ матриц α и α соответственно.

$$\tilde{f} = \alpha \tilde{f}, f = \alpha^* f.$$

Наряду с (32) рассмотрим факторизованное уравнение

$$(J - \hat{V})(J - \hat{U})S = 0. \quad (35)$$

Оно сводится к системе

$$(J - \hat{V})F = 0, \quad (36)$$

$$(J - \hat{U})S = F. \quad (37)$$

Прямой подстановкой можно убедиться, что уравнение (36) обладает решением

$$F(x) = f = \text{const}, \quad (38)$$

поэтому уравнение (35) имеет решение S , определяемое из уравнения восстановления

$$S(x) = f + \int_0^x U(x-t) S(t) dt. \quad (39)$$

Существование решения (39) следует из результатов книги [9]. Это решение единственно в классе локально интегрируемых вектор-функций и обладает свойствами

$$0 < S(x) \uparrow \text{ по } x; \sum_{k=1}^m S_k(x) \uparrow \infty \text{ при } x \rightarrow \infty; \quad (40)$$

S —абсолютно непрерывна на $[0, \infty)$. Эти свойства легко следуют из формулы

$$S(x) = \left[I + \int_0^x \Phi(t) dt \right] f, \quad (41)$$

где Φ — локально интегрируемая матрица-функция, определяемая из матричного уравнения восстановления

$$\Phi(x) = U(x) + \int_0^x U(x-t) \Phi(t) dt. \quad (42)$$

Пусть ядро T удовлетворяет условию

$$\exists r_0 > 0 \text{ такое, что } \int_0^{r_0} T(x) dx \in K_p, \int_{r_0}^{\infty} T(x) dx \in K_p. \quad (43)$$

Так как $U \geq T$, то

$$\sigma_1 \equiv \int_0^{r_0} x U(x) dx \in K_p, \sigma_2 \equiv \int_{r_0}^{\infty} U(x) dx \in K_p.$$

Из неразложимости матриц σ_1 и σ_2 следует, что векторы $\sigma_1 \tilde{f}$ и $\sigma_2 \tilde{f}$ положительны. Поэтому $\exists a, b > 0$ такие, что

$$f \leq a \sigma_1 \tilde{f}, \quad f \leq b \sigma_2 \tilde{f}. \quad (44)$$

Лемма 6. Пусть выполняется условие (43) и a, b удовлетворяют условию (44). Тогда выполняется неравенство

$$S(x) \leq (ax + b) \tilde{f}. \quad (45)$$

Доказательство. Из (44) следует неравенство

$$f \leq a \left[\int_0^x U(t) dt \right] \tilde{f} + (ax + b) \left[\int_x^{\infty} U(t) dt \right] \tilde{f}. \quad (46)$$

С учетом $\tilde{f} = a \tilde{f}$, (46) можно переписать в виде

$$f + \int_0^x U(x-t) [at + b] \tilde{f} dt \leq (ax + b) \tilde{f}. \quad (47)$$

Путем рассмотрения итерационного процесса для (39) легко убедиться, что из неравенства (47) следует (45).

Аналогично скалярному случаю (см. [10]) можно убедиться, что вектор-функция S , определяемая из (39), удовлетворяет уравнению (32). Поэтому справедлива

Теорема 3. Существует положительное решение S уравнения (32), (33). Оно обладает свойствами (40). Справедлива формула (41). При выполнении условия (43) имеет место асимптотика

$$S(x) = O(x), \quad x \rightarrow \infty. \quad (48)$$

Этот результат в скалярном случае получен Ф. Спитцером [11], причем для построения S была предложена другая процедура.

Ն. Բ. ԵՆԳԻԲԱՐՅԱՆ. Մատրից-ֆունկցիաների ֆակտորիզացիան և ոչ զծային ինտեգրալ
 եավասարումները (ամփոփում)

Աշխատանքում լուծվել է Վիների հանրահաշվում մատրից-ֆունկցիաների ֆակտորիզացիայի մի խնդիր՝ հատուկ դեպքում, երբանդակ ոչ զծային ինտեգրալ հավասարման ուսումնասիրման միջոցով: Բերված է ստացված արդյունքի մի կիրառություն Վիներ-Հոպֆի ինտեգրալ հավասարումների տեսության մեջ:

N. B. YENGIBARIAN. *Factorization of matrix-functions and nonlinear integral equations* (summary)

In this paper a factorization problem in Wiener algebra of matrix-functions is solved in a special case, by use of an auxiliary nonlinear integral equation.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Г. Крейн. Интегральные уравнения на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов, УМН, 13, 5 (83), 1958.
2. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов, УМН, 13, 2, 1958.
3. Н. Б. Енгибарян, А. А. Арутюнян. Интегральные уравнения на полупрямой с разлостными ядрами и нелинейные функциональные уравнения, Мат. сб., 97 (139), 1 (5), 1975, 35—58.
4. М. А. Красносельский. Положительные решения операторных уравнений, ГИФМЛ, М., 1962.
5. С. Г. Крейн (ред.). Функциональный анализ, «Наука», М., 1972.
6. Р. Беллман. Введение в теорию матриц, «Наука», М., 1969.
7. Н. Б. Енгибарян, М. А. Мнацаканян. О факторизации интегральных операторов, ДАН СССР, 206, 4, 1972.
8. В. А. Амбарцумян. Научные труды, т. 1, Ер., 1960.
9. Р. Беллман, К. Кук. Дифференциально-разностные уравнения, «Мир», М., 1967.
10. Н. Б. Енгибарян, А. Г. Арабаджян. О нелинейных уравнениях факторизации операторов Винера—Хопфа, препринт НИИ ФКС ЕГУ, 79—1, 1979.
11. F. Spitzer. The Wiener-Hopf equation... Duke Math. Journ., 24, 327, 1957.
12. В. В. Соболев. Курс теоретической астрофизики, М., «Наука», 1967.