ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XV, № 3, 1980 Математика

А. Н. КОЧУБЕЙ

О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ СИММЕТРИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ И ИХ РАСШИРЕНИЙ

§ 1. Введение

1. Пусть A — замкнутый симметрический оператор с плотной областью определения $D(A)$ в сепарабельном гильбертовом пространстве H, имеющий равные дефектные числа (n, n), $n \leqslant \infty$. Характеристическая функция оператора A в случае $n < \infty$ была построена М. С. Лившицем [1—3], в общем случае — А. В. Штраусом [4, 5].

Напомним определение А. В. Штрауса. Положим

$$\mathfrak{M}_z = (A - zE)\, D(A), \quad \mathrm{N}_z = \mathrm{N}_z(A) = H \ominus \mathfrak{M}_z$$

(E — тождественный оператор, $\operatorname{Im} z \neq 0$).

При любом невещественном λ обозначим через A_λ расширение оператора A, заданное равенствами:

$$D(A_\lambda) = D(A) \dotplus \mathrm{N}_{\bar\lambda},$$

$$A_\lambda (f + \varphi) = Af + \lambda\varphi \quad (f \in D(A),\ \varphi \in \mathrm{N}_{\bar\lambda}). \tag{1}$$

Как показано в [5], при $\operatorname{Im}\lambda > 0$ $(\operatorname{Im}\lambda < 0)$ A_λ является максимальным диссипативным (аккумулятивным) оператором*.

Зафиксируем произвольное невещественное число λ_0 и обозначим через Π открытую полуплоскость (верхнюю или нижнюю), содержащую λ_0. Из результатов работы [5] следует, что существует линейный оператор $C_0(\lambda)$: $\mathrm{N}_{\bar\lambda_0} \to \mathrm{N}_{\lambda_0}$ такой, что $D(A_\lambda) = D(A) + [C_0(\lambda) - E]\mathrm{N}_{\bar\lambda_0}$ и

$$A_\lambda (f + C_0(\lambda)\psi - \psi) = Af + \bar\lambda_0 C_0(\lambda)\psi - \lambda_0\psi \quad (f \in D(A),\ \psi \in \mathrm{N}_{\bar\lambda_0}).$$

Оператор-функцию $C_0(\lambda)$ $(\lambda \in \Pi)$ мы будем называть ***характеристической функцией Штрауса*** оператора A. Отметим, что всякий элемент $h \in \mathrm{N}_{\bar\lambda}$ однозначно представим в виде:

$$h = f + \varphi - C_0(\lambda)\varphi, \tag{2}$$

где $f \in D(A)$, $\varphi \in \mathrm{N}_{\bar\lambda_0}$, причем, когда h пробегает все $\mathrm{N}_{\bar\lambda}$, φ пробегает все $\mathrm{N}_{\bar\lambda_0}$.

В работах [4, 5] показано, что $\|C_0(\lambda)\| < 1$ $(\lambda \in \Pi)$, и оператор-функция $C_0(\lambda)$ аналитична в Π. Если оператор A прост, то он определяется по $C_0(\lambda)$ с точностью до унитарной эквивалентности.

---

* Оператор B в H называется диссипативным (аккумулятивным), если при всех $g \in D(B)$ $(Bg, g)_H \geqslant 0$ $((Bg, g)_H \leqslant 0)$. Диссипативный (аккумулятивный) оператор называется максимальным диссипативным (аккумулятивным), если он не имеет в H собственных диссипативных (аккумулятивных) расширений.

Как видно из приведенного определения, вычисление характеристической функции Штрауса дифференциального оператора и, в особенности, применение ее к исследованию спектров граничных задач вызывает значительные трудности. В настоящей работе введено новое определение характеристической функции оператора A, обладающее в этом отношении определенными преимуществами. Это определение основано на построенном в статье автора [6]* описании расширений симметрического оператора в терминах абстрактных *граничных условий*. Характеристическая функция Штрауса оказывается по существу частным случаем характеристической функции, вводимой ниже. Следует, однако, заметить, что результаты А. В. Штрауса [4, 5] использованы при доказательстве основных теорем настоящей работы.

2. Приведем некоторые результаты из [6].

Определение. *Тройка* $(\mathrm{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$, *где* H — *сепарабельное гильбертово пространство,* Γ_1 *и* Γ_2 — *линейные отображения* $D(A^*)$ *в* H, *называется пространством граничных значений оператора* A, *если*:

1) *для любых* $y,\ z \in D(A^*)$

$$(A^* y, z)_{\mathrm{H}} - (y, A^* z)_{\mathrm{H}} = (\Gamma_1 y, \Gamma_2 z)_{\mathrm{H}} - (\Gamma_2 y, \Gamma_1 z)_{\mathrm{H}};$$

2) *для любых* $Y_1, Y_2 \in \mathrm{H}$ *существует такой вектор* $y \in D(A^*)$, *что* $\Gamma_1 y = Y_1$, $\Gamma_2 y = Y_2$.

Как показано в [25], $y \in D(A)$ тогда и только тогда, когда $\Gamma_1 y = \Gamma_2 y = 0$. Если $(\mathrm{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ — некоторое пространство граничных значений оператора A, то, каково бы ни было сжатие K в H, сужение оператора A^* на множество векторов $y \in D(A^*)$, удовлетворяющих условию

$$K(\Gamma_1 + i\Gamma_2)\, y = (\Gamma_1 - i\Gamma_2)\, y \tag{3}$$

или

$$K(\Gamma_1 - i\Gamma_2)\, y = (\Gamma_1 + i\Gamma_2)\, y, \tag{4}$$

представляют собой соответственно максимальное диссипативное (аккумулятивное) расширение оператора A. Обратно, всякое максимальное диссипативное (аккумулятивное) расширение оператора A представляет собой сужение оператора A^* на множество всех $y \in D(A^*)$, удовлетворяющих [3] ([4]), причем сжатие K определяется однозначно. Эти расширения мы будем обозначать через A_K и A^K соответственно.

Из тождества

$$(A^* f, g)_H - (f, A^* g)_H = \frac{1}{2i}\{((\Gamma_1 - i\Gamma_2) f, (\Gamma_1 - i\Gamma_2) g)_{\overline{H}} - $$

$$- ((\Gamma_1 + i\Gamma_2) f, (\Gamma_1 + i\Gamma_2) g)_{\mathrm{H}}\} \tag{5}$$

$(f, g \in D(A^*))$ нетрудно получить соотношение

$$(A_K)^* = A^{K^*}. \tag{6}$$

* И независимо — в статье В. М. Брука [25].

В [6] построено следующее пространство граничных значений, которое мы будем обозначать $(\mathbf{H}^0, \Gamma_1^0, \Gamma_2^0)$: $\mathbf{H}^0 = \mathbf{N}_{-i}$ (со скалярным произведением, индуцированным из H),

$$\Gamma_1^0 = P_{-i} + VP_i, \quad \Gamma_2^0 = -iP_{-i} + iVP_i,$$

где

P_{-i} — проектор $D(A^*)$ на $\mathbf{N}_{-i}$ параллельно $D(A) \dot{+} \mathbf{N}_i$,

P_i — проектор $D(A^*)$ на $\mathbf{N}_i$ параллельно $D(A) \dot{+} \mathbf{N}_{-i}$,

V — изометрическое отображение $\mathbf{N}_i$ на $\mathbf{N}_{-i}$.

§ 2. Определение и свойства характеристической функции

1. Пусть A_λ — расширение оператора A вида (1) ($\operatorname{Im} \lambda \neq 0$). Согласно (3), (4), оператор A_λ равен сужению A^* на множество $y \in \in D(A^*)$, удовлетворяющих условию

$$C(\lambda)(\Gamma_1 + i\Gamma_2)\, y = (\Gamma_1 - i\Gamma_2)\, y \quad (\operatorname{Im} \lambda > 0),$$
$$C(\lambda)(\Gamma_1 - i\Gamma_2)\, y = (\Gamma_1 + i\Gamma_2)\, y \quad (\operatorname{Im} \lambda < 0),$$

где $C(\lambda)$ — сжимающая ($\|C(\lambda)\| \leqslant 1$) оператор-функция в $\mathbf{H}$. Оператор-функция $C(\lambda)$ называется *характеристической функцией оператора* A.

Из (6) следует, что $C(\bar{\lambda}) = [C(\lambda)]^*$. Введенная выше характеристическая функция зависит, очевидно от выбора пространства граничных значений оператора A. Рассмотрим, в частности, пространство граничных значений $(\mathbf{H}^0, \Gamma_1^0, \Gamma_2^0)$ (см. § 1).

Имеем $\Gamma_1^0 + i\Gamma_2^0 = 2P_{-i}$, $\Gamma_1^0 - i\Gamma_2^0 = 2VP_i$. Пусть $y \in \mathbf{N}_{\bar{\lambda}}$. Тогда $y = y_0 + \varphi + \psi$ ($y_0 \in D(A)$, $\varphi \in \mathbf{N}_{-i}$, $\psi \in \mathbf{N}_i$), откуда

$$(\Gamma_1^0 + i\Gamma_2^0)\, y = 2\varphi, \quad (\Gamma_1^0 - i\Gamma_2^0)\, y = 2V\psi.$$

Если $C^0(\lambda)$ — характеристическая функция оператора A, соответствующая $(\mathbf{H}^0, \Gamma_1^0, \Gamma_2^0)$ и $\operatorname{Im} \lambda > 0$, то $C^0(\lambda)\varphi = V\psi$. Но в силу (2)* $\psi = C_0(\lambda)\varphi$ Из произвольности $y \in \mathbf{N}_{\bar{\lambda}}$ находим

$$C^0(\lambda) = VC_0(\lambda), \quad \operatorname{Im} \lambda > 0. \tag{7}$$

Таким образом, $C^0(\lambda)$ лишь несущественно отличается от характеристической функции Штрауса. Из результатов А. В. Штрауса [4] и формулы (7) получаем, что $\|C^0(\lambda)\| < 1$, и $C^0(\lambda)$ аналитична при $\operatorname{Im} \lambda > 0$.

2. Выясним, как связаны между собой характеристические функции $C^1(\lambda)$ и $C^2(\lambda)$ оператора A, соответствующие пространствам гра-

---

* Здесь и ниже мы полагаем в определении характеристической функции Штрауса $C_0(\lambda)$ $\lambda_0 = i$.

ничных значений $(\mathrm{H}^1, \Gamma_1^1, \Gamma_2^1)$ и $(\mathrm{H}^2, \Gamma_1^2, \Gamma_2^2)$. Заметим прежде всего, что $\dim \mathrm{H}^1 = \dim \mathrm{H}^2$. Действительно, отображение $\Gamma_1^1 \oplus \Gamma_2^1$: $D(A^*) \to \mathrm{H}^1 \oplus \oplus \mathrm{H}^1$ индуцирует биективное отображение $D(A^*)/D(A) \to \mathrm{H}^1 \oplus \mathrm{H}^1$, откуда $\dim (\mathrm{H}^1 \oplus \mathrm{H}^1) = \dim [D(A^*)/D(A)]$, и аналогично $\dim (\mathrm{H}^2 \oplus \oplus \mathrm{H}^2) = \dim [D(A^*)/D(A)]$, откуда $\dim (\mathrm{H}^1 \oplus \mathrm{H}^1) = \dim (\mathrm{H}^2 \oplus \mathrm{H}^2)$ и $\dim \mathrm{H}^1 = \dim \mathrm{H}^2$. Пусть U — изометрическое отображение H^2 на H^1. Обозначим J оператор в $\mathrm{H}^1 \oplus \mathrm{H}^1$ вида $\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}$.

Теорема 1. *Имеет место соотношение*

$$C^1(\lambda) = [X_{21} + X_{22} UC^2(\lambda) U^{-1}][X_{11} + X_{12} UC^2(\lambda) U^{-1}]^{-1}, \ \operatorname{Im} \lambda > 0, \quad (8)$$

где $X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$ — *J-унитарный оператор в* $\mathrm{H}^1 \oplus \mathrm{H}^1$.

Доказательство. Определим пространство граничных значений $(\mathrm{H}^1, \widetilde{\Gamma}_1^1, \widetilde{\Gamma}_2^1)$, полагая $\widetilde{\Gamma}_1^1 = U\Gamma_1^2$, $\widetilde{\Gamma}_2^1 = U\Gamma_2^2$. Построим в пространстве $\mathrm{H}^1 \oplus \mathrm{H}^1$ линейный оператор X следующим образом. Если $(Y', Y'') \in \mathrm{H}^1 \oplus \mathrm{H}^1$, выберем $y \in D(A^*)$ так, чтобы

$$\left.\begin{aligned} (\widetilde{\Gamma}_1^1 + i\widetilde{\Gamma}_2^1) y &= Y' \\ (\widetilde{\Gamma}_1^1 - i\widetilde{\Gamma}_2^1) y &= Y'' \end{aligned}\right\}. \quad (9)$$

Положим $Z' = (\Gamma_1^1 + i\Gamma_2^1) y$, $Z'' = (\Gamma_1^1 - i\Gamma_2^1) y$. Эти векторы не зависят от выбора y, удовлетворяющего (9), так как последний определяется однозначно с точностью до слагаемого из $D(A)$. Положим $X(Y', Y'') = (Z', Z'')$. Очевидно, X — сюръективный линейный оператор в $\mathrm{H}^1 \oplus \mathrm{H}^1$. Из формулы (5), примененной при $f = g$ к каждому из пространств $(\mathrm{H}^1, \Gamma_1^1, \Gamma_2^1)$ и $(\mathrm{H}^1, \widetilde{\Gamma}_1^1, \widetilde{\Gamma}_2^1)$, следует, что оператор X является J-унитарным. В частности, X ограничен [7], и следовательно, представим в виде $X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$, где X_{jk} $(j, k = 1, 2)$ — ограниченные операторы в H^1.

Теперь Γ_1^1, Γ_2^1 выражаются через $\widetilde{\Gamma}_1^1$, $\widetilde{\Gamma}_2^1$ по формулам:

$$\Gamma_1^1 + i\Gamma_2^1 = X_{11}(\widetilde{\Gamma}_1^1 + i\widetilde{\Gamma}_2^1) + X_{12}(\widetilde{\Gamma}_1^1 - i\widetilde{\Gamma}_2^1);$$

$$\Gamma_1^1 - i\Gamma_2^1 = X_{21}(\widetilde{\Gamma}_1^1 + i\widetilde{\Gamma}_2^1) + X_{22}(\widetilde{\Gamma}_1^1 - i\widetilde{\Gamma}_2^1).$$

Пусть $\widetilde{C}^1(\lambda)$ — характеристическая функция оператора A, соответствующая пространству граничных значений $(\mathrm{H}^1, \widetilde{\Gamma}_1^1, \widetilde{\Gamma}_2^1)$. Тогда для всех $y \in \mathrm{N}_{\bar{\lambda}}$ $(\widetilde{\Gamma}_1^1 - i\widetilde{\Gamma}_2^1) y = \widetilde{C}^1(\lambda)(\widetilde{\Gamma}_1^1 + i\widetilde{\Gamma}_2^1) y$, откуда

$$(\Gamma_1^1 + i\Gamma_2^1) y = [X_{11} + X_{12}\widetilde{C}^1(\lambda)](\widetilde{\Gamma}_1^1 + i\widetilde{\Gamma}_2^1) y;$$

$$(\Gamma_1^1 - i\Gamma_2^1)\, y = [X_{21} + X_{22}\, \widetilde{C}^1(\lambda)]\ (\widetilde{\Gamma}_1^1 + i\widetilde{\Gamma}_2^1)\, y.$$

С другой стороны, $(\Gamma_1^1 - i\Gamma_2^1)\, y = C^1(\lambda)(\Gamma_1^1 + i\Gamma_2^1)\, y$. По теореме М. Г. Крейна—Ю. Л. Шмульяна [8] из J-унитарности оператора X следует, что при каждом λ оператор $[X_{11} + X_{12}\, \widetilde{C}^1(\lambda)]$ имеет в H^1 ограниченный обратный. Таким образом

$$C^1(\lambda) = [X_{21} + X_{22}\, \widetilde{C}^1(\lambda)]\, [X_{11} + X_{12}\, \widetilde{C}^1(\lambda)]^{-1}.$$

Замечая, что $\widetilde{C}^1(\lambda) = U\, C^2(\lambda)\, U^{-1}$, приходим к (8).

Теорема доказана.

Полагая $(\mathrm{H}^2, \Gamma_1^2, \Gamma_2^2) = (\mathrm{H}^0, \Gamma_1^0, \Gamma_2^0)$, получаем такое следствие.

Следствие 1. *Каково бы ни было пространство граничных значений* $(\mathrm{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ *оператора A, соответствующая характеристическая функция $C(\lambda)$ аналитична при* $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, *причем* $\|C_1(\lambda)\| < 1$.

Аналитичность $C(\lambda)$ очевидна. Неравенство $\|C(\lambda)\| < 1$ следует из того, что, согласно [8], дробно-линейное преобразование $[X_{21} + X_{22} K]\, [X_{11} + X_{12} K]^{-1}$ с J-унитарным оператором $\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$ переводит множество всех операторов K, для которых $\|K\| < 1$, в себя.

§ 3. Характеристическая функция и унитарная эквивалентность

Цель данного параграфа—доказательство следующей теоремы.

Теорема 2. *Для того чтобы простые симметрические операторы A_1 и A_2 в пространстве H были унитарно эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы для A_1 и A_2 существовали соответственно пространства граничных значений* $(\mathrm{H}, \Gamma_1^1, \Gamma_2^1)$ *и* $(\mathrm{H}, \Gamma_1^2, \Gamma_2^2)$ (H *одно и то же*), *такие, что соответствующие характеристические функции совпадают*: $C^1(\lambda) \equiv C^2(\lambda)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть U — унитарный оператор в H, такой, что $UA_1 U^{-1} = A_2$. Тогда (см., например, [9]), $UA_1^* U^{-1} = A_2^*$.

Пусть $(\mathrm{H}, \Gamma_1^1, \Gamma_2^1)$ — произвольное пространство граничных значений оператора A_1. Положим $\Gamma_1^2 = \Gamma_1^1 U^{-1}$, $\Gamma_2^2 = \Gamma_2^1\ U^{-1}$. Непосредственно проверяется, что $(\mathrm{H}, \Gamma_1^2, \Gamma_2^2)$ — пространство граничных значений оператора A_2 (нужно только учесть, что U^{-1} переводит $D(A_2)$ на $D(A_1)$ и $D(A_2^*)$ на $D(A_1^*)$).

Если $A_1^* y = \lambda y$, то $A_2^* Uy = UA_1^* y = \lambda Uy$. Аналогично, если $A_2^* z = \lambda z$, то $A_1^* U^{-1} z = \lambda U^{-1} z$. Таким образом, U переводит $\mathrm{N}_\lambda(A_1)$ на $\mathrm{N}_\lambda(A_2)$. Теперь из сопоставления равенств

$$(\Gamma_1^1 - i\Gamma_2^1)\, y = C^1(\lambda)(\Gamma_1^1 + i\Gamma_2^1)\, y,$$

$$(\Gamma_1^2 - i\Gamma_2^2)\, Uy = C^2(\lambda)(\Gamma_1^2 + i\Gamma_2^2)\, Uy$$

($y \in \mathbf{H}_\lambda^-(A_1)$, $\operatorname{Im}\lambda > 0$) и определения отображений Γ_1^2, Γ_2^2 следует, что $C^1(\lambda) \equiv C^2(\lambda)$.

Достаточность. Построим сюръективное отображение $\chi: D(A_1^*)/D(A_1) \to D(A_2^*)/D(A_2)$ следующим образом. Пусть $y_1 \in \hat{y}_1 \in D(A_1^*)/D(A_1)$ ($y_1 \in D(A_1^*)$). По классу $\hat{y}_1$ построим вектор $(y', y'') \in \mathbf{H} \oplus \mathbf{H}$, полагая $y' = (\Gamma_1^1 + i\Gamma_2^1)\, y_1$, $y'' = (\Gamma_1^1 - i\Gamma_2^1)\, y_1$. Выберем $y_2 \in D(A_2^*)$ так, чтобы $y' = (\Gamma_1^2 + i\Gamma_2^2)\, y_2$, $Y'' = (\Gamma_1^2 - i\Gamma_2^2)\, y_2$. Пусть $\hat{y}_2$ — класс из $D(A_2^*)/D(A_2)$, содержащий y_2. Очевидно, y_2 определяется по $\hat{y}_1$ однозначно с точностью до слагаемого из $D(A_2)$, т. е. имеет смысл определение χ формулой $\chi\hat{y}_1 = \hat{y}_2$.

Очевидно, отображение χ линейно. Пусть $\hat{\mathbf{N}}_\lambda^-(A_j)$ — образ $\mathbf{N}_\lambda^-(A_j)$ $(j = 1, 2)$ при естественном отображении $D(A_j^*) \to D(A_j^*)/D(A_j)$. Покажем, что отображение χ переводит $\hat{\mathbf{N}}_\lambda^-(A_1)$ в $\hat{\mathbf{N}}_\lambda^-(A_2)$. Пусть, например, $\operatorname{Im}\lambda > 0$ (случай $\operatorname{Im}\lambda < 0$ рассматривается аналогично). Если $\hat{y}_1 \in \hat{\mathbf{N}}_\lambda^-(A_1)$, то для любого представителя $y_1 \in \hat{y}_1$

$$(\Gamma_1^1 - i\Gamma_2^1)\, y_1 = C^1(\lambda)(\Gamma_1^1 + i\Gamma_2^1)\, y_1.$$

Если $y_2 \in \hat{y}_2 = \chi\hat{y}_1$, то из построения χ видно, что

$$(\Gamma_1^2 - i\Gamma_2^2)\, y_2 = C^1(\lambda)(\Gamma_1^2 + i\Gamma_2^2)\, y_2,$$

и поскольку $C^1(\lambda) = C^2(\lambda)$, получаем

$$(\Gamma_1^2 - i\Gamma_2^2)\, y_2 = C^2(\lambda)(\Gamma_1^2 + i\Gamma_2^2)\, y_2,$$

а это означает (см. § 2), что $y_2 \in D(A_2) \dot{+} \mathbf{N}_\lambda^-(A_2)$, т. е. $\hat{y}_2 \in \hat{\mathbf{N}}_\lambda^-(A_2)$ и, следовательно,

$$\chi: \hat{\mathbf{N}}_\lambda^-(A_1) \to \hat{\mathbf{N}}_\lambda^-(A_2).$$

Если $y^{(1)} \in \mathbf{N}_\lambda^-(A_1)$, то $y^{(1)} = y_0^{(1)} + y_{-i}^{(1)} + y_i^{(1)}$, где $y_0^{(1)} \in D(A_1)$, $y_{-i}^{(1)} \in \mathbf{N}_{-i}(A_1)$, $y_i^{(1)} \in \mathbf{N}_i(A_1)$. Переходя к образам в $D(A_1^*)/D(A_1)$, имеем

$$\hat{y}^{(1)} = \hat{y}_{-i}^{(1)} + \hat{y}_i^{(1)},$$

где

$$y^{(1)} \in \hat{y}^{(1)} \in \hat{\mathbf{N}}_\lambda^-(A_1),\ \hat{y}_{-i}^{(1)} \in \hat{\mathbf{N}}_{-i}(A_1),\ \hat{y}_i^{(1)} \in \hat{\mathbf{N}}_i(A_1).$$

Пусть $\hat{y}^{(2)} = \chi\hat{y}^{(1)}$. Имеем

$$\hat{y}^{(2)} = \chi\hat{y}_{-i}^{(1)} + \chi\hat{y}_i^{(1)}. \tag{10}$$

При любом λ ($\operatorname{Im}\lambda\neq 0$) отображение $\chi:\hat{\mathrm{N}}_{\lambda}-(A_1)\to\hat{\mathrm{N}}_{\bar\lambda}(A_2)$ индуцирует отображение $\chi_\lambda:\ \mathrm{N}_{\bar\lambda}(A_1)\to\mathrm{N}_{\bar\lambda}(A_2)$ следующим образом. Пусть $f\in\mathrm{N}_{\bar\lambda}(A_1)$, $f\in\hat f\in\hat{\mathrm{N}}_{\bar\lambda}(A_1)$. Выберем $g\in\chi\hat f$ так, чтобы $g\in\mathrm{N}_{\bar\lambda}(A_2)$. Очевидно, такой вектор g существует и определяется однозначно (если $g_1,\ g_2\in\chi\hat f$, $g_1,\ g_2\in\mathrm{N}_{\bar\lambda}(A_2)$, то $g_1-g_2\in D(A_2)\cap\mathrm{N}_{\bar\lambda}(A_2)=\{0\}$). Положим $\chi_\lambda f=g$. Отображение χ_λ линейно и сюръективно. Покажем, что оно изометрично.

В самом деле, пользуясь (5), для любого $f\in\mathrm{N}_{\bar\lambda}(A_1)$ получим:

$$\|f\|_H^2=\frac{1}{2i\operatorname{Im}\lambda}[(A_1^*f,f)_H-(f,A_1^*f)_H]=$$

$$=-\frac{1}{4\operatorname{Im}\lambda}[\|(\Gamma_1^1-i\Gamma_2^1)f\|_{\mathrm{H}}^2-\|(\Gamma_1^1+i\Gamma_2^1)f\|_{\mathrm{H}}^2]=$$

$$=-\frac{1}{4\operatorname{Im}\lambda}[\|(\Gamma_1^2-i\Gamma_2^2)\chi_\lambda f\|_{\mathrm{H}}^2-\|(\Gamma_1^2+i\Gamma_2^2)\chi_\lambda f\|_{\mathrm{H}}^2]=$$

$$=\frac{1}{2i\operatorname{Im}\lambda}[(A_2^*\chi_\lambda f,\chi_\lambda f)_H-(\chi_\lambda f,A_2^*\chi_\lambda f)_H]=\|\chi_\lambda f\|_H^2,$$

и изометричность χ_λ доказана.

Пусть $C_0^1(\lambda)$ и $C_0^2(\lambda)$ — характеристические функции Штрауса операторов A_1 и A_2 соответственно. Из (10) следует, что для $y^{(2)}\in\hat y^{(2)}=\chi\hat y^{(1)}$

$$y^{(2)}=y_0^{(2)}+\chi_{-i}+y_{-i}^{(1)}+\chi_i y_i^{(1)},$$

где $y_0^{(2)}\in D(A_2)$. По определению характеристической функции Штрауса $y_i^{(1)}=C_0^1(\lambda)y_{-i}^{(1)}$ и, с другой стороны, $\chi_i y_i^{(1)}=C_0^2(\lambda)\chi_{-i}y_{-i}^{(1)}$ или $y_i^{(1)}=\chi_i^{-1}C_0^2(\lambda)\chi_{-i}y_{-i}^{(1)}$. Из сравнения этих соотношений, учитывая произвольность $y^{(1)}\in\mathrm{N}_{\bar\lambda}(A_1)$, находим

$$C_0^1(\lambda)=\chi_i^{-1}C_0^2(\lambda)\chi_{-i}, \qquad (11$$

причем в (11) изометрии χ_i и χ_{-i} не зависят от λ. Теперь утверждение теоремы следует из результатов А. В. Штрауса [4]. Теорема доказана.

§ 4. Характеристическая функция и спектры расширений

1. Мы будем пользоваться классификацией точек спектра замкнутого оператора, изложенной в [10]. Если B—замкнутый оператор в H, будем обозначать его резольвентное множество, точечный, непрерывный и остаточный спектры соответственно через $\rho(B)$, $\sigma_p(B)$, $\sigma_c(B)$, $\sigma_r(B)$.

Пусть A_K — максимальное диссипативное расширение* оператора A, заданное условием (3), и пусть λ — комплексное число с $\operatorname{Im}\lambda>0$. Обозначим через $C(\mu)$ характеристическую функцию оператора A, соответствующую произвольному пространству граничных значений (H, Γ_1, Γ_2).

Теорема 3. 1°. *Для того чтобы λ было собственным значением кратности $\nu\leqslant\infty$ оператора A_K, необходимо и достаточно, чтобы 0 был собственным значением кратности ν оператора $C(\lambda)-K$.* 2°. *Для того чтобы $\lambda\in\sigma_r(A_k)$ необходимо и достаточно, чтобы $0\in\sigma_r(C(\lambda)-K)$.*

3°. *Для того чтобы $\lambda\in\sigma_c(A_K)$, необходимо и достаточно чтобы $0\in\sigma_c(C(\lambda)-K)$.*

Доказательство. 1°. Если $A_K f=\lambda f$, то $f\in N_{\bar\lambda}(A)$, т. е.

$$C(\lambda)(\Gamma_1+i\Gamma_2)f=(\Gamma_1-i\Gamma_2)f. \tag{12}$$

С другой стороны, $f\in D(A_K)$, т. е.

$$K(\Gamma_1+i\Gamma_2)f=(\Gamma_1-i\Gamma_2)f. \tag{13}$$

Из (12) и (13) получаем

$$[C(\lambda)-K](\Gamma_1+i\Gamma_2)f=0.$$

Обратно, если $[C(\lambda)-K]g=0$, то, выбирая $f\in D(A^*)$ так, чтобы

$$(\Gamma_1+i\Gamma_2)f=g,\ (\Gamma_1-i\Gamma_2)f=Kg,$$

находим, что $f\in D(A_K)$ и $C(\lambda)(\Gamma_1+i\Gamma_2)f=C(\lambda)g=Kg=(\Gamma_1-i\Gamma_2)f$, т. е. $f\in N_{\bar\lambda}(A)\dotplus D(A)$, и компонента f в $N_{\bar\lambda}$ — собственный вектор A_K.

Таким образом, имеем отображение $f\to(\Gamma_1+i\Gamma_2)f$ собственных подпространств, которое линейно и биективно.

2°. Пусть $\lambda\in\sigma_r(A_K)$. Тогда $\lambda\in\sigma_p((A_K)^*)=\sigma_p(A^{K^*})$. Рассуждая, как в п. 1°, мы докажем, что $0\in\sigma_p(C(\bar\lambda)-K^*)$. Учитывая, что (см. § 2) $C(\bar\lambda)=[C(\lambda)]^*$, получим $0\in\sigma_r(C(\lambda)-K)$.

Обратное утверждение получается, если провести те же рассуждения в обратном порядке.

3°. Пусть $\lambda\in\sigma_c(A_K)$, но $0\bar\in\sigma_c(C(\lambda)-K)$. Согласно 1°, 2°, в этом случае $0\in\rho(C(\lambda)-K)$. Покажем, что отсюда следует разрешимость уравнения

$$(A_K-\lambda E)x=h \tag{14}$$

при любом $h\in H$. Будем искать x в виде

$$x=f+g, \tag{15}$$

где $f\in N_{\bar\lambda}(A)$ — искомый вектор, g — фиксированное решение уравнения $(A^*-\lambda E)g=h$ (такой вектор g существует, например, в области определения произвольного самосопряженного расширения оператора A).

* Результаты этого и следующего параграфов легко переносятся на случай максимальных аккумуляторных расширений.

Очевидно, для x вида (15) $(A^* - \lambda E)\, x = h$. Обозначим $G_1 = K(\Gamma_1 + i\Gamma_2)\, g - (\Gamma_1 - i\Gamma_2)\, g$ $(G_1 \in \mathrm{H})$. Поскольку $0 \in \rho(C(\lambda) - K)$, существует вектор $G_2 \in \mathrm{H}$, для которого $[C(\lambda) - K]\, G_2 = G_1$. Выберем $\bar{f} \in D(A^*)$ так, чтобы

$$(\Gamma_1 + i\Gamma_2)\, \bar{f} = G_2,\ (\Gamma_1 - i\Gamma_2)\, \bar{f} = C(\lambda)\, G_2.$$

Тогда ясно, что $\bar{f} \in D(A) \dotplus \mathrm{N}_{\bar\lambda}^{-}(A)$. Пусть f — компонента $\bar{f}$ в $\mathrm{N}_{\bar\lambda}^{-}(A)$. Тогда

$$(\Gamma_1 - i\Gamma_2)(f + g) = C(\lambda)\, G_2 + K(\Gamma_1 + i\Gamma_2)\, g - G_1 =$$
$$= C(\lambda)\, G_2 + K(\Gamma_1 + i\Gamma_2)\, g - C(\lambda)\, G_2 + KG_2 =$$
$$= K(\Gamma_1 + i\Gamma_2)\, (f + g),$$

т. е. $f + g \in D(A_K)$ и x вида (15)—решение уравнения (14). Это означает, что $\lambda \bar{\in} \sigma_c(A_K)$.

Обратно, пусть $0 \in \sigma_c(C(\lambda) - K)$. Тогда, если $\lambda \bar{\in} \sigma_c(A_K)$, то $\lambda \in \rho(A_K)$. Покажем, что уравнение

$$[C(\lambda) - K]\, G = G_1$$

разрешимо при любом $G_1 \in \mathrm{H}$.

Будем искать решение в виде

$$G = (\Gamma_1 + i\Gamma_2)\, f, \tag{16}$$

где $f \in \mathrm{N}_{\bar\lambda}^{-}(A)$.

Выберем $d \in D(A^*)$ так, чтобы

$$(\Gamma_1 - i\Gamma_2)\, d = G_1,\ (\Gamma_1 + i\Gamma_2)\, d = 0. \tag{17}$$

Пусть $c \in D(A_K)$ – решение уравнения

$$(A_K - \lambda E)\, c = \lambda d - A^* d.$$

Тогда $(A^* - \lambda E)(c + d) = 0$; т. е. $c + d \in \mathrm{N}_{\bar\lambda}^{-}(A)$. Положим в (16) $f = c + d$. Имеем

$$[C(\lambda) - K]\, G = (\Gamma_1 - i\Gamma_2)\, f - K(\Gamma_1 + i\Gamma_2)\, f;$$

поскольку $c \in D(A_K)$, $(\Gamma_1 - i\Gamma_2)\, c = K(\Gamma_1 + i\Gamma_2)\, c$. Учитывая (17), получаем

$$[C(\lambda) - K]\, G = G_1.$$

Теорема доказана.

Воспользовавшись известной теоремой о возмущениях фредгольмовых операторов (см. [24], стр. 300), приходим к такому следствию.

Следствие 2. *Если сжатие K таково, что для некоторого унитарного в* H *оператора U оператор $K - U$ вполне непрерывен, то невещественная часть спектра оператора A_K может состоять только из собственных значений конечной кратности, причем для любого* λ $(\mathrm{Im}\,\lambda > 0)$ $\mathrm{ind}\,(A_K - \lambda E) = 0$*.

* $\mathrm{ind}\,(A_K - \lambda E) \overset{\mathrm{def}}{=} \dim \mathrm{Ker}\,(A_K - \lambda E) - \dim \mathrm{Ker}\,(A_K^* - \bar\lambda E)$.

Пользуясь теоремой 3, можно получить еще одно условие дискретности невещественной части спектра оператора A_K.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия:*

1) *оператор K имеет в* H *ограниченный обратный;*

2) *в* H *существует такое сжатие S, что оператор $KS+E$ вполне непрерывен.*

Тогда невещественная часть спектра оператора A_K может состоять только из собственных значений конечной кратности.

Если, кроме того, выполнено условие: 3) *оператор A_k имеет в верхней полуплоскости регулярную точку, то невещественная часть спектра оператора A_K состоит из не более, чем счетного множества изолированных собственных значений конечной кратности, не имеющего конечных невещественных предельных точек.*

Доказательство. Если P — оператор в H, а Q — оператор в H, имеющий ограниченный обратный, то точка 0 принадлежит точечному, непрерывному или остаточному спектру оператора P тогда и только тогда, когда то же имеет место для оператора QP. Поэтому утверждение теоремы 3 остается справедливым, если заменить $C(\lambda)-K$ на оператор-функцию

$$\Phi(\lambda)=[E+SC(\lambda)]^{-1}K^{-1}[C(\lambda)-K].$$

При этом оператор

$$\Phi(\lambda)+E=[E+SC(\lambda)]^{-1}[K^{-1}C(\lambda)-E]+E=$$
$$=[E+SC(\lambda)]^{-1}[E+SC(\lambda)+K^{-1}C(\lambda)-E]=$$
$$=[E+SC(\lambda)]^{-1}[SC(\lambda)+K^{-1}C(\lambda)]=$$
$$=[E+SC(\lambda)]^{-1}K^{-1}(KS+E)\,C(\lambda)$$

($\operatorname{Im}\lambda>0$) вполне непрерывен в H. Это, в частности, означает, что 0—либо регулярная точка, либо собственное значение конечной кратности для $\Phi(\lambda)$, а значит, и для $C(\lambda)-K$.

Если же выполнено 3), то соответствующее утверждение теоремы следует из аналитичности $\Phi(\lambda)$ при $\operatorname{Im}\lambda>0$ и теоремы о спектре аналитической оператор-функции [11, стр. 39].

Теорема доказана.

2. Проиллюстрируем полученные результаты на примере. Пусть H_1—сепарабельное гильбертово пространство, $H=L_2(H_1, a, b))$ ($-\infty<a<b<\infty$), A—минимальный оператор, порожденный в H дифференциальным выражением $-\dfrac{d^2}{dt^2}+B$, где B— самосопряженный положительно определенный оператор в H_1. Из результатов М. Л. Горбачука [12] следует, что пространство граничных значений оператора A может быть выбрано так: $\mathrm{H}=H_1\oplus H_1$,

$$\Gamma_1 y=\{\tilde{B}^{1/4}(y'(a)+\tilde{B}^{1/2}y(a)),\ \tilde{B}^{1/4}(y'(b)-\tilde{B}^{1/2}y(b))\},$$

$$\Gamma_2 y = \{\tilde{B}^{-\frac{1}{4}} y(a), -\tilde{B}^{-\frac{1}{4}} y(b)\} \quad (y \in D(A^*)),$$

где оператор B действует в негативном пространстве, построенном (см. [13]) по пространствам $D(B)$ (с нормой графика) и H_1, и равен сопряженному оператору коператору $B{:}D(B) \to H_1$.

Максимальные диссипативные расширения оператора A описываются формулой (3) (впервые это было доказано в [14]). Из следствия 2 и теоремы 4 теперь получаются результаты о спектрах расширений оператора A. Пользуясь интегральным представлением вектор-функции из $D(A^*)$, доказанным в [12], можно найти явный вид характеристической функции $C(\lambda)$:

$$C(\lambda) = [\Omega'(\lambda) - i\Omega(\lambda)]\,(\Omega'(\lambda) + i\Omega(\lambda)]^{-1}$$

(формулы для оператор-функций $\Omega(\lambda)$, $\Omega'(\lambda)$, действующих в $H_1 \oplus H_1$, приведены в [15]).

Аналогично можно рассмотреть дифференциальное выражение $(-1)^n \dfrac{d^{2n}}{dt^{2n}} + B$ (см. [16]) и другие дифференциальные операторы, для которых известно пространство граничных значений, связанное с краевыми задачами [17—19].

§ 5. Характеристическая функция расширения

1. Характеристическая функция максимального диссипативного оператора (как и всякого оператора с непустым резольвентным множеством) была определена А. В. Штраусом [20].

Определение (см. [20]). Предгильбертово пространство L со скалярным произведением $[.\,,.]$ называется граничным пространством максимального диссипативного оператора T в гильбертовом пространстве H, если существует линейный оператор Γ, отображающий $D(T)$ на L, такой, что для любых $f,\ g \in D(T)$

$$[\Gamma f, \Gamma g] = \frac{1}{i}\,\{(Tf, g)_H - (f, Tg)_H\}.$$

Оператор Γ называется граничным.

Пусть L' — граничное пространство оператора $-T^*$ и Γ' — соответствующий граничный оператор. Для любого $f \in D(T)$ существует единственный вектор $g \in D(T^*)$, такой, что $Tf - T^*g = \lambda(f - g)$, $\operatorname{Im}\lambda > 0$. Обозначим $\varphi = \Gamma f$, $\psi = \Gamma' g$. Тогда равенством $\psi = X(\lambda)\varphi$ ($\operatorname{Im}\lambda > 0$) определена характеристическая функция оператора T.

Вычислим характеристическую функцию $C_K(\lambda)$ оператора A_K в смысле приведенного определения, исходя из характеристической функции $C(\lambda)$ симметрического оператора A. Обозначим $R_K = \frac{1}{\sqrt{2}}(E - K^*K)^{1/2}$, $R_K = \frac{1}{\sqrt{2}}(E - KK^*)^{1/2}$. Пользуясь тождеством (5), нетрудно проверить, что, исходя из пространства граничных значений $(\mathrm{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ оператора A, можно определить граничные пространства операторов A_K и $-A_K^*$ формулами:

$$L = R_K \mathrm{H}, \quad \Gamma = R_K (\Gamma_1 + i\Gamma_2),$$

$$L' = R_K' \mathrm{H}, \quad \Gamma' = R_K' (\Gamma_1 - i\Gamma_2)$$

(скалярные произведения в L и L' индуцированы из H).

Пусть $f \in D(A_K)$, $g \in D(A_K^*)$, $A_K f - A_K^* g = \lambda (f - g)$ $(\mathrm{Im}\,\lambda > 0)$. Элементарные выкладки приводят к соотношению

$$(\Gamma_1 - i\Gamma_2) g = [E - C(\lambda) K^*]^{-1} [K - C(\lambda)] (\Gamma_1 + i\Gamma_2) f. \tag{18}$$

Если оператор K таков, что оператор R_K имеет ограниченный обратный (например, если $\|K\| < 1$), то из (18) сразу находим

$$C_K(\lambda) = R_K' [E - C(\lambda) K^*]^{-1} [K - C(\lambda)] R_K^{-1}. \tag{19}$$

В общем случае из (18) видно, что

$$C_K(\lambda) R_K = R_K' [E - C(\lambda) K^*]^{-1} [K - C(\lambda)]. \tag{20}$$

Заметим, что $K - C(\lambda) = [E - C(\lambda) K^*] K - C(\lambda)(E - K^* K) = [E - C(\lambda) K^*] K - 2C(\lambda) R_K^2$.

Подставляя в (20), получаем

$$C_K(\lambda) R_K = R_K' K - 2 R_K' [E - C(\lambda) K^*]^{-1} C(\lambda) R_K^2.$$

Известно [21, стр. 19], что $R_K' K = K R_K$. Отсюда

$$C_K(\lambda) = \{K - 2 R_K' [E - C(\lambda) K^*]^{-1} C(\lambda) R_K\} | R_K \mathrm{H}. \tag{21}$$

2. Пусть T — максимальный диссипативный оператор, L и L' — граничные пространства операторов T и $-T^*$ соответственно. Пусть L_1 и L_1' — еще одна аналогичная пара граничных пространств. Обозначим $X(\lambda)$ и $X_1(\lambda)$ $(\mathrm{Im}\,\lambda > 0)$ соответствующие характеристические функции оператора T. Элементарно доказывается, что существуют такие изометрчиеские отображения $U: L \to L_1$ и $U': L' \to L_1'$, что

$$X_1(\lambda) \equiv U' X(\lambda) U^{-1}. \tag{22}$$

Возвратимся к оператору $T = A_K$. Выше мы полагали $L = R_K \mathrm{H}$, $L' = R_K' \mathrm{H}$. Пусть T_K — преобразование Кэли оператора A_K. В [20] показано, что, полагая

$$L_1 = (E - T_K^* T_K)^{1/2} H, \quad L_1' = (E - T_K T_K^*)^{1/2} H$$

(со скалярными произведениями, индуцированными из H),

$$\Gamma_1 = \sqrt{2} (E - T_K^* T_K)^{1/2} (E - T_K)^{-1},$$

$$\Gamma_2 = \sqrt{2} (E - T_K T_K^*)^{1/2} (E - T_K^*)^{-1},$$

мы получаем такую характеристическую функцию $X_1(\lambda)$ оператора

A_K, что оператор-функция $\theta(\zeta) = -X_1\left(i\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)$ $(|\zeta|<1)$ совпадает с характеристической функцией сжатия T_K в смысле [22; 21].

Таким образом, формулы (19), (21), (22) приводят к явному выражению характеристической функции оператора T_K через $C(\lambda)$ и K. Интересно отметить, что получающиеся формулы по виду в точности совпадают с известными формулами М. С. Лившица—В. П. Потапова [23] для характеристической функции квазиунитарного оператора, хотя смысл характеристической функции $C(\lambda)$ и сжатия K в [23] совершенно иной.

Киевский отдел института
„Энергосетьпроект"

Поступила 25.X.1977

Ա. Ն. ԿՈՉՈՒԲԵՅ. Սիմետրիկ օպերատորների և նրանց լայնացման բնութագրող ֆունկցիաները *(ամփոփում)*

Ներբերվում է սիմետրիկ օպերատորի բնութագրող ֆունկցիայի նոր բնորոշում։

Ստացվել են տվյալներ սիմետրիկ օպերատորի լայնացման սպեկտրի մասին, որոնք դիֆերենցիալ օպերատորի դեպքում բնորոշվում են սահմանային պայմանների տերմիններում։

A. N. KOCHUBEI. *On characteristic functions of operators and their extensions* (summary)

A new definition of characteristic function of a symmetric operator is introduced. Some results concerning spectra of extensions of symmetric operators are obtained, which in case of a differential operator are formulated in terms of boundary conditions.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. С. Лившиц*. Об одном классе линейных операторов в гильбертовом пространстве, Матем. сб., 19, № 2, 1946, 239—260.
2. *М. С. Лившиц*. К теории изометрических операторов с равными дефектными числами, ДАН СССР, 58, № 1, 1947, 13—15.
3. *М. С. Лившиц*. Изометрические операторы с равными дефектными числами, квазиунитарные операторы, Матем. сб., 26, № 2, 1950, 247—264.
4. *А. В. Штраус*. К теории эрмитовых операторов, ДАН СССР, 67, № 4, 1949, 611—614.
5. *А. В. Штраус*. О расширениях и характеристической функции симметрического оператора, Изв. АН СССР, сер. матем., 32, № 1, 1968, 186—207.
6. *А. Н. Кочубей*. О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений, Матем. заметки, № 17, № 1, 1975, 41—48.
7. *И. С. Иохвидов*. Об ограниченности J-изометрических операторов, УМН, 16, № 4, 1961, 167—170.
8. *М. Г. Крейн, Ю. Л. Шмульян*. О дробно-линейных преобразованиях с операторными коэффициентами, Матем. иссл., 2, № 3, 1967, 64—96.
9. *K. Gustafson*. On projections of self-adjoint operators and operator product adjoints, Bull. Amer. Math. Soc., 75, № 4, 1969, 739—741.
10. *Н. Данфорд, Дж. Шварц*. Линейные операторы. Общая теория, ИЛ, М., 1962.
10. *Н. Данфорд, Дж. Шварц*. Линейные операторы. Общая теория, ИЛ, М., 1962.
раторов, «Наука», М., 1965.

12. *М. Л. Горбачук*. Самосопряженные граничные задачи для дифференциального уравнения второго порядка с неограниченным операторным коэффициентом, Функ. анализ, 5, № 1, 1971, 10—21.
13. *Ю. М. Березанский*. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, «Наукова думка», Киев, 1965.
14. *М. Л. Горбачук, А. Н. Кочубей, М. А. Рыбак*. Диссипативные расширения дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций, ДАН СССР, 205, № 5, 1972, 1029—1932.
15. *В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук*. О спектре самосопряженных расширений минимального оператора, порожденного уравнением Штурма—Лиувилля с операторным потенциалом, Укр. матем. ж., 24, № 6, 1972, 726—734.
16. *М. Л. Горбачук, А. Н. Кочубей*. Самосопряженные граничные задачи для некоторых классов дифференциально-операторных уравнений высокого порядка. ДАН СССР, 201, № 5, 1971, 1029—1032.
17. *М. И. Вишик*. Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений, Труды ММО, 1, 1952, 187—246.
18. *Ф. С. Рофе-Бекетов*. О самосопряженных расширениях дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций, Теория функций, функц. анализ и их приложения, 8, 1969, 3—24.
19. *Л. И. Вайнерман*. Самосопряженные граничные задачи для сильно эллиптических и гиперболических уравнений второго порядка в гильбертовом пространстве, ДАН СССР, 218, № 4, 1974, 745—748.
20. *А. В. Штраус*. Характеристические функции линейных операторов, Изв. АН СССР, сер. матем., 24, № 1, 1960, 43—74.
21. *Б. Секефальви-Надь, Ч. Фояш*. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве, «Мир», М., 1970.
22. *Ю. Л. Шмульян*. Операторы с вырожденной характеристической функцией, ДАН СССР, 93, № 6, 1953, 985—988.
23. *М. С. Лившиц, В. П. Потапов*. Теорема умножения характеристических матриц-функций, ДАН СССР, 72, № 4 ,1950, 625—628.
24. *Т. Като*. Теория возмущений линейных операторов, «Мир», М., 1972.
25. *В. М. Брук*. Об одном классе краевых задач со спектральным параметром в граничном условии, Матем. сб., 100, № 2, 1976, 210—216.