ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XV, № 3, 1980 Математика

Д. А. БЕРМАН

К ТЕОРИИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

1°. Обозначим через C множество всех непрерывных в сегменте $[-1, 1]$ функций $f(x)$. Через $L_n(f, x)$ обозначим интерполяционный многочлен Лагранжа степени $(n-1)$, построенный для n-ой строчки матрицы чисел $\{x_k^{(n)}\}$

$$-1 \leqslant x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \cdots < x_n^{(n)} \leqslant 1, \; n=1, 2, \cdots. \qquad (m)$$

Теорема Бернштейна—Фабера [1], [2] утверждает, что нет такой матрицы узлов вида (m), при которой для любой $f \in C$ выполняется равномерно соотношение $L_n(f, x) \to f(x)$, $n \to \infty$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Для узлов Чебышева

$$x_k^{(n)} = \cos\frac{(2n-2k+1)\pi}{2n}, \; k=1, 2, \cdots, n, \; n=1, 2, \cdots, \qquad (1)$$

которые в теории интерполяции функции действительного переменного являются в некотором смысле наилучшими, Г. Грюнвальд [3] и И. Марцинкевич [4] построили такую $f \in C$, что в каждой точке $x \in [-1, 1]$ выполняется равенство $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} B_n(f, x) = \infty$.

В связи с этими отрицательными результатами представляет значительный интерес теорема Фейера [5], которая формулируется следующим образом. Пусть матрица (m) составлена из чисел (1), и пусть $H_n(f, x)$— многочлен степени $2n-1$, построенный для $f \in C$ и узлов (1) и однозначно определяющийся из условий

$$H_n(f, x_k^{(n)}) = f(x_k^{(n)}), \; H_n'(f, x_k^{(n)}) = 0, \; k=1, 2, \cdots, n.$$

Тогда для любой $f \in C$ выполняется равномерно в $[-1, 1]$ соотношение

$$H_n(f, x) \to f(x), \; n \to \infty. \qquad (2)$$

Как известно

$$H_n(f, x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^{(n)}) V_k^{(n)}(x) [l_k^{(n)}(x)]^2, \qquad (3)$$

где

$$l_k^{(n)}(x) = \frac{\omega_n(x)}{(x-x_k^{(n)})\,\omega_n'(x_k^{(n)})},$$

$$V_k^{(n)}(x) = 1 - \frac{\omega_n''(x_k^{(n)})}{\omega_n'(x_k^{(n)})}(x - x_k^{(n)}),$$

$$\omega_n(x) = \prod_{k=1}^{n} (x - x_k^{(n)}).$$

Фейер [6] обнаружил, что линейные функции $\{V_k^{(n)}(x)\}_{k=1}^{n}$, $n=1, 2, \cdots$ играют важную роль в теории интерполяции. Матрицы узлов, для которых $V_k^{(n)}(x) \geqslant 0, -1 \leqslant x \leqslant 1$, $k=1, 2, \cdots, n$, $n=1, 2, \cdots$, он назвал нормальными, а матрицы узлов, для которых существует некоторое $\rho > 0$ такое, что $V_k^{(n)}(x) \geqslant \rho > 0$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $k=1, 2, \cdots, n$, $n=1, 2, \cdots$, он назвал строго нормальными. Фейер [6] доказал, что при нормальной матрице для любой $f \in C$ $H_n(f, x) \to f(x)$, $n \to \infty$, $-1 < x < 1$. Наряду с полиномами (3) естественно рассматривать полиномы

$$R_n(f, x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^{(n)}) [l_k^{(n)}(x)]^2,$$

которые по своей структуре проще полиномов (3). Очевидно, что степень $R_n(f, x)$ равна $2n-2$ и $R_n(f, x_k^{(n)}) = f(x_k^{(n)})$, $k=\overline{1, n}$. Грюнвальд [7] доказал, что при строго нормальной матрице для любой $\in C$ $R_n(f, x) \to f(x)$, $n \to \infty$, $-1 < x < 1$.

Настоящая статья посвящена изучению полиномов $H_n(f, z)$ и $R_n(f, z)$ в комплексной области. Узлами интерполяции служат точки

$$z_k^{(n)} = e^{i\theta_k^{(n)}}, \ \theta_k^{(n)} = \frac{(2k-1)\pi}{n} \pi, \ k=1, 2, \cdots, n, \ n=1, 2, \cdots, \tag{4}$$

или точки

$$z_k^{(n)} = e^{i\theta_k^{(n)}}, \ \theta_k^{(n)} = \frac{(2k-1)\pi}{n}, \ k=1, 2, \cdots, n, \ z=1, \ n=1, 2, \cdots, \tag{5}$$

которые получаются из точек (4) добавлением в качестве узла точки $z=1$. Отрезок $[-1, 1]$ вещественной оси заменяется кругом $|z| \leqslant 1$ Статья примыкает к работе [8].

2°. Пусть $p(z)$—произвольный многочлен и многочлен $H_n(p, z)$ построен при узлах (4) для $p(z)$. Положим, что степень $p(z)$ равна m и $m < n$. В [8] (см. стр. 792, формула (15)) было доказано, что

$$H_n(\zeta^s, z) - z^s = s\frac{z^s(1+z^n)}{n}, \ s=0, 1, 2, \cdots, n-1.$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$H_n(p, z) = p(z) + \frac{z(1+z^n)}{n} p'(z), \ m < n. \tag{6}$$

Из (6) вытекают любопытные следствия, которые в [8] не были отмечены.

1. Для любого многочлена $p(z)$ имеет место при достаточно большом n неравенство

$$|H_n(p, z) - p(z)| \leqslant \frac{2|p'(z)|}{n}, \ |z| \leqslant 1.$$

Отсюда, в частности, следует, равномерно в $|z| \leq 1$ $\lim_{n\to\infty} H_n(p, z) = p(z)$. В связи с этим полезно отметить, что существуют такие $f(z)$, аналитические в $|z| < 1$ и непрерывные в $|z| \leq 1$, что $\overline{\lim_{n\to\infty}} H_n(f, 1) = \infty$ (см. [9]).

2. При любом натуральном k имеет место равномерно внутри круга $|z| \leq 1$ равенство $\lim_{n\to\infty} H_n^{(k)}(p, z) = p^{(k)}(z)$. При $z=1$ процесс $\{H_n'(p, z)\}$ расходится, ибо из (6) следует, что $\lim_{n\to\infty} H_n'(p, 1) = 2p'(1)$.

3. Пусть степень m многочлена $p(z)$ не превосходит $(n-1)$, тогда из (6) следует, что $H_n(p, z)$ — многочлен степени $(n+m)$. В случае отрезка $[-1, 1]$ и узлов Чебышева (1) это свойство не имеет места, ибо в этом случае даже при $p(x) = x$

$$H_n(z, x) = x - \frac{T_{n-1}(x)\, T_n(x)}{n}, \quad T_n(x) = \cos n \arccos x,$$

то есть, $H_n(z, x)$ — многочлен степени $2n-1$.

3°. Известно [9], что если $f(z)$ регулярна в $|z| < 1$ и непрерывна в $|z| \leq 1$, то $H_n(f, z) \to f(z)$, $n \to \infty$, $|z| < 1$, причем сходимость равномерная внутри круга $|z| \leq 1$. Рассмотрим теперь случай дробно-рациональной функции $f(z)$. Пусть $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, где некоторые корни многочлена $Q(z)$ находятся внутри круга $|z| \leq 1$. Положим

$$Q(z) = a_0 \prod_{l=1}^{q} (z - a_l)^{k_l},$$

где корни $\{a_l\}_{l=1}^{s}$ находятся внутри круга $|z| \leq 1$, а корни $\{a_l\}_{l=s+1}^{q}$ находятся вне круга $|z| \leq 1$. Пусть

$$[Q(z)\, p(\zeta) - P(z)\, Q(\zeta)] : (z - \zeta) = K(z, \zeta). \tag{7}$$

Ясно, что $K(z, \zeta)$ есть многочлен, как относительно z, так и относительно ζ. Справедлива

Теорема 1. *Для любой дробно-рациональной функции $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ в точках z, удовлетворяющих условиям $|z| < 1$, $Q(z) \neq 0$ имеет место равенство*

$$\lim_{n\to\infty} H_n(f, z) = f(z) - \frac{1}{Q(z)} \sum_{l=1}^{s} r_{a_l}, \tag{8}$$

где $\{r_{a_l}\}_{l=1}^{s}$ — вычеты функции $\dfrac{K(z, \zeta)}{Q(\zeta)}$ относительно корней $\{a_l\}_{l=1}^{s}$, расположенных внутри круга $|z| \leq 1$.

Доказательство. Известно [9], что при узлах (4)

$$H_n(f, z)=\left(\frac{1+z^n}{n}\right)^2\sum_{k=1}^{n} f(z_k)\left(n-\frac{n-1}{z^k}z\right)\frac{z_k^2}{(z-z_k)^2}. \tag{9}$$

Так как при $f(z)\equiv 1$ $H_n(f, z)\equiv 1$, то из (9) следует, что

$$1=\left(\frac{1+z^n}{n}\right)^2\sum_{k=1}^{n}\left(n-\frac{n-1}{z_k}z\right)\frac{z_k^2}{(z-z_k)^2}. \tag{10}$$

В силу (9) и (10) имеем, что

$$H_n(f, z)-f(z)=\left(\frac{1+z^n}{n}\right)^2\frac{z}{Q(z)}\sum_{k=1}^{n}\frac{K(z, z_k)z_k}{Q(z_k)(z-z_k)}-$$

$$-\frac{(1+z^n)^2}{nQ(z)}\sum_{k=1}^{n}\frac{z_k K(z, z_k)}{Q(z_k)}. \tag{11}$$

Согласно (4) $\theta_{k+1}^{(n)}-\theta_k^{(n)}=\frac{2\pi}{n}$. Поэтому равенство (11) можно записать в виде

$$H_n(f, z)-f(z)=-\frac{(1+z^n)^2}{2\pi\, Q(z)}\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{i\theta_k^{(n)}}K(z, e^{i\theta_k^{(n)}})}{Q(e^{i\theta_k^{(n)}})}(\theta_{k+1}^{(n)}-\theta_k^{(n)})+$$

$$+\frac{z(1+z^n)^2}{2\pi\, Q(z)\, n}\sum_{k=1}^{n}\frac{K(z, e^{i\theta_k^{(n)}})\, e^{i\theta_k^{(n)}}}{Q(e^{i\theta_k^{(n)}})(z-e^{i\theta_k^{(n)}})}(\theta_{k+1}^{(n)}-\theta_k^{(n)}). \tag{12}$$

Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{i\theta_k^{(n)}}K(z, e^{i\theta_k^{(n)}})}{Q(e^{i\theta_k^{(n)}})}(\theta_{k+1}^{(n)}-\theta_k^{(n)})=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{K(z, \zeta)}{Q(\zeta)}d\zeta, \tag{13}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{K(z, e^{i\theta_k^{(n)}})\, e^{i\theta_k^{(n)}}}{Q(e^{i\theta_k^{(n)}})(z-e^{i\theta_k^{(n)}})}(\theta_{k+1}^{(n)}-\theta_k^{(n)})=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{K(z, \zeta)\, d\zeta}{Q(\zeta)(z-\zeta)}. \tag{14}$$

Интеграл (13) равен сумме вычетов функции $\frac{K(z, \zeta)}{Q(\zeta)}$, а интеграл (14) равен сумме вычетов функции $\frac{K(z, \zeta)}{Q(\zeta)(z-\zeta)}$.

Так как упомянутые суммы вычетов конечны и во втором слагаемом из (12) присутствует множитель $\frac{1}{n}$, то из (12), (13) и (14) вытекает (8).

Замечание 1. В равенстве (8) можно r_{a_l} заменить выражением

$$r_{a_l}=\frac{1}{(\lambda_l-1)!}\frac{d^{\lambda_l-1}}{d\zeta^{\lambda_l-1}}\left(\frac{(\zeta-a_l)^{\lambda_l}K(z, \zeta)}{Q(\zeta)}\right).$$

Поэтому, если корни $\{a_l\}_{l=1}^{s}$, расположенные в $|z|<1$, первой кратности, то из (8) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} H_n(f, z)=f(z)-\frac{1}{Q(z)}\sum_{l=1}^{s}\frac{K(z, a_l)}{Q'(a_l)}. \tag{15}$$

Из (7) получаем, что

$$K(z, a_l) = \frac{Q(z)P(a_l)}{z-a_l}. \tag{16}$$

Стало быть, в силу (15) и (16)

$$\lim_{n\to\infty} H_n(f, z)=f(z)-\frac{1}{Q(z)}\sum_{l=1}^{s}p(a_l)\frac{Q(z)}{(z-a_l)Q'(a_l)}. \tag{17}$$

Известно, что

$$\sum_{l=1}^{s}p(a_l)\frac{Q(z)}{(z-a_l)Q'(a_l)}=L_s(p, z),$$

где $L_s(p, z)$ — интерполяционный многочлен Лагранжа степени $(s-1)$, построенный при узлах $\{a_l\}_{l=1}^{s}$. Поэтому равенство (17) принимает вид

$$\lim_{n\to\infty} H_n(f, z)=f(z)-\frac{L_s(p, z)}{Q(z)}, \tag{18}$$

где $f(z)=\dfrac{p(z)}{Q(z)}$. Если степень многочлена $p(z)\leqslant s-1$, то $L_s(p, z)=$ $=p(z)$, а тогда из (18) получим, что в этом случае $\lim\limits_{n\to\infty} H_n(f, z)=0$, $|z|<1$.

4°. Как уже отмечалось, при узлах Чебышева (1) для любой $f\in C$ выполняется в $[-1, 1]$ равномерно соотношение (2). С другой стороны, в [10] было обнаружено, что если процесс $\{H_n(f, x)\}$ построить при узлах

$$x_0^{(n+2)}=1,\ x_k^{(n+2)}=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi,\ k=1, 2,\cdots, n,\ x_{n+1}^{(n+2)}=-1,$$
$$n=1, 2,\cdots, \tag{19}$$

полученных расширением узлов матрицы (1), добавлением в качестве узлов точек ± 1, то даже для $f(x)=|x|$ процесс $\{H_n(f, x)\}$ расходится при $x=0$. Более того, в [11], [12] доказано, что процесс $\{H_n(f, x)\}$, построенный при расширенной матрице узлов (19) для $f(x)=x^2$, расходится всюду в $(-1, 1)$. При $f(x)=x$ этот процесс расходится во всех точках $x\neq 0$ из $(-1, 1)$. Указанные результаты приводят к постановке вопроса о поведении процесса $\{H_n(f, z)\}$ в комплексной области при расширении матрицы узлов (4). Ради простоты вычислений, рассмотрим матрицу узлов (5), которая получается расширением матрицы (4), добавлением в качестве узла точки

$z=1$. Обозначим через $\widetilde{H}_n(f, z)$ многочлен степени $2n+1$, однозначно определяющийся из условий

$$\widetilde{H}_n(f, z_k^{(n)})=f(z_k^{(n)}), \widetilde{H}_n'(f, z_k^{(n)})=0, \ 1\leqslant k\leqslant n, \widetilde{H}_n(f, 1)=f(1),$$

$$\widetilde{H}_n'(f, 1)=0.$$

Процесс $\{\widetilde{H}_n(f, z)\}$ естественно назвать расширенным интерполяционным процессом Эрмита-Фейера. Из пункта 2° известно, что процесс $\{H_n(f, z)\}$, построенный при матрице (4) для многочлена, равномерно сходится к этому многочлену. При этом порядок остатка $O\left(\frac{1}{n}\right)$. Как уже отмечалось, в действительной области, при расширении матрицы узлов может наступить резкое ухудшение сходимости процесса $\{H_n(f, x)\}$. Поэтому интересно изучить этот вопрос в комплексной области. Мы изучим поведение процесса $\{\widetilde{H}_n(f, z)\}$, построенного при узлах (5) для случая, когда $p(z)$—многочлен. Выведем сперва формулу для $\widetilde{H}_n(p, z)$, где $p(z)$—заданный многочлен. Пусть

$$p(z)=\sum_{s=0}^{m} a_s z^s. \tag{20}$$

Можно считать, что $m<n$. Это ограничение не является существенным, ибо в дальнейшем $n\to\infty$. Известно, что в таком случае справедливо тождество

$$p(z)=\widetilde{H}_n(p, z)+\sum_{k=1}^{n} p'(z_k)\, l_k^2(z)(z-z_k)+p'(1)\left(\frac{1+z^n}{2}\right)^2(z-1), \tag{21}$$

где $\{l_k(z)\}$—фундаментальные полиномы Лагранжа узлов (5). В частности, при $p(z)=z^s$, $0\leqslant s\leqslant m$, после простых вычислений, из (21) получим

$$z^s-\widetilde{H}_n(\zeta^s, z)=\frac{s(z^n+1)^2(z-1)}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{z_k^{s+1}}{(1-z_k)^2(z-z_k)}+s\left(\frac{1+z^n}{2}\right)^2(z-1). \tag{22}$$

Заметим, что справедливо тождество

$$\frac{1}{(1-z_k)^2(z-z_k)}=\frac{1}{(z-1)^2(z-z_k)}+\frac{1}{(z-1)(z_k-1)^2}+$$
$$+\frac{1}{(z-1)^2(z_k-1)}. \tag{23}$$

Из (22) и (23) получим, что

$$z^s - \widetilde{H}_n(\zeta^s, z) = \frac{s(z^n+1)^2(z-1)^2}{n^2}\Bigg[\frac{1}{(z-1)^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{z_k^{s+1}}{z-z_k} +$$

$$+\frac{1}{z-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{z_k^{s+1}}{(z_k-1)^2} + \frac{1}{(z-1)^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{z_k^{s+1}}{z_k-1}\Bigg] + s\left(\frac{1+z^n}{2}\right)^2(z-1). \quad (24)$$

Так как $\{z_k\}_{k=1}^n$ — корни многочлена $\omega_n(z) = 1+z^n$, то

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z-z_k} = \frac{nz^{n-1}}{1+z^n}. \quad (25)$$

Далее, $\sum\limits_{k=1}^{n} z_k^v = 0$, $v = 1, 2, \cdots, (n-1)$. Поэтому из (25) выводим, что

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{z_k^{s+1}}{z-z_k} = -\frac{nz^s}{1+z^n},\ 0 \leqslant s < n. \quad (26)$$

В частности

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{z_k^{s+1}}{z_k-1} = \frac{n}{2}. \quad (27)$$

Дифференцируя (26) по z, получим

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{z_k^{s+1}}{(z-z_k)^2} = n\frac{sz^{s-1}+z^{n+s-1}(s-n)}{(1+z^n)^2}. \quad (28)$$

Стало быть

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{z_k^{s+1}}{(z_k-1)^2} = \frac{n(2s-n)}{4}. \quad (29)$$

Поэтому из (24) следует, что

$$z^s - \widetilde{H}_n(\zeta^s, z) = \frac{s(1+z^n)}{2n}(1+z^n-2z^s) + \frac{s^2}{2n}(1+z^n)^2(z-1).$$

Отсюда и из (20) вытекает, что

$$p(z) - \widetilde{H}_n(p, z) = \frac{(1+z^n)^2}{2n}p'(1) - \frac{1+z^n}{n}zp'(z) +$$

$$+\frac{(1+z^n)^2(z-1)}{2n}(zp'(z))'_{z=1}. \quad (30)$$

Из (30) непосредственно получается

Теорема 2. *Расширенный интерполяционный процесс Эрмита-Фейера $\{\widetilde{H}_n(f, z)\}$, построенный при узлах (5) для многочлена $p(z)$ степени m, удовлетворяет в круге $|z| \leqslant 1$ при $m < n$ неравенству*

$$|p(z) - \widetilde{H}_n(p, z)| \leqslant \frac{2}{n}|p'(1)| + \frac{2}{n}|zp'(z)| + \frac{4}{n}|(zp'(z))_{z=1}|.$$

Следствие. При $|z| \leqslant 1$

$$|p(z) - \widetilde{H}_n(p, z)| \leqslant \frac{C}{n}, \quad (31)$$

где константа C зависит лишь от многочлена p. Из (31), в частности, следует, что равномерно в $|z|\leqslant 1$ $\lim\limits_{n\to\infty}\widetilde{H}_n(p, z)=p(z)$.

Замечание 2. Формулу (30) можно также вывести с помощью формулы (6). Для этого достаточно заметить; что

$$\widetilde{H}_n(f, z)-H_n(f, z)=\omega_n^2(z)(az+b),\ \omega_n(z)=1+z^n,$$

где коэффициенты a и b однозначно определяются из системы уравнений

$$f(1)-H_n(f, 1)=4(a+b);\ -H_n'(f, 1)=4a(n+1)+4nb.$$

Мы предпочли дать здесь независимый вывод формулы (30).

Замечание 3. В пункте 2 отмечалось, что оператор $H_n(f, z)$, построенный при узлах (4), есть многочлен степени $n+m$, если $p(z)$ — многочлен степени m. Оператор $\widetilde{H}_n(f, z)$, построенный при расширенной системе узлов (5), вообще говоря, этим свойством не обладает. Из (30) видно, что $\{\widetilde{H}_n(f, z)\}$ — многочлен степени $n+m$, если выполняются дополнительные условия $p'(1)=p''(1)=0$.

5°. Рассмотрим теперь процесс $\{R_n(f, z)\}$ из пункта 1°, построенный при расширенной системе узлов (5). После простых вычислений получим, что в этом случае

$$R_n(\zeta^s,z)=\left(\frac{(z^n+1)(z-1)}{n}\right)^2\sum_{k=1}^{n}\frac{z_k^{2+s}}{(1-z_k)^2(z-z_k)^2}+\left(\frac{1+z^n}{2}\right)^2. \tag{32}$$

Так как

$$\frac{1}{(1-z_k)^2(z-z_k)^2}=\frac{1}{(z-1)^2(z-z_k)^2}+\frac{1}{(z-1)^3(z-z_k)}+$$
$$+\frac{1}{(z-1)^2(z_k-1)^2}+\frac{2}{(z-1)^3(z_k-1)},$$

то из (32) следует, что

$$R_n(\zeta^s, z)=\left[\frac{(z^n+1)(z-1)}{n}\right]^2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{z_k^{2+s}}{(z-1)^2(z-z_k)^2}+\frac{z_k^{2+s}}{(z-1)^3(z-z_k)}+\right.$$
$$\left.+\frac{z_k^{2+s}}{(z-1)^2(z_k-1)^2}+\frac{2z_k^{2+s}}{(z-1)^3(z_k-1)}\right)+\left(\frac{1+z^n}{2}\right)^2.$$

Отсюда, с помощью равенства (26—29), получим, что

$$R_n(\zeta^s, z)=\frac{(s+1)z^s+z^{n+s}(s+1-n)}{n}+\frac{(z^n+1)(z^n-2z^{s+1}+1)}{n(z-1)}+$$
$$+\frac{2s+2}{n}\left(\frac{z^n+1}{2}\right)^2. \tag{33}$$

Из (33) видно, что $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(\zeta^s, z)=0$, $|z|\leqslant 1$, $z\neq 1$, $s=1, 2,\cdots$. Итак, процесс $\{R_n(\zeta^s, z)\}$, $s=1, 2,\cdots$, расходится всюду в $|z|\leqslant 1$, кроме точек $z=1$ и $z=0$. Из (33) также видно, что процесс $\{R_n(1, z)\}$ расходится всюду в $|z|\leqslant 1$, кроме $z=1$.

Ленинградское ордена Октябрьской революции
высшее инженерное училище
имени адмирала С. О. Макарова

Поступила 17.IV.1978

Դ. Լ. ԲԵՐՄԱՆ. Կոմպլեքս տիրույթում ինտերպոլյացիայի տեսության վերաբերյալ *(ամփոփում)*

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է

$$z_k^{(n)}=e^{i\theta_k^{(n)}},\ \theta_k^{(n)}=\frac{(2k-1)\pi}{n},\ k=1, 2,\cdots, n,\ n=1,2,\cdots$$

հանգույցների դեպքում կոտորակային ռացիոնալ ֆունկցիաների համար Հերմիտ-Ֆեյերի ինտերպոլյացիոն պրոցեսը։ Ուսումնասիրվում է նաև Հերմիտ-Ֆեյերի $\{\widetilde{H}_n(f, z)\}_{n=1}^{\infty}$ պրոցեսը այնպիսի հանգույցների դեպքում, որոնք ստացվում են նախորդ հանգույցներին ավելացնելով $z=1$ կետը, երբ $f(z)$ ֆունկցիան կամայական բազմանդամ է։

Ապացուցվում է, որ վերջին պրոցեսը զուգամիտում է $|z|<1$ շրջանում $O\left(\frac{1}{n}\right)$ արագությամբ։

D. L. BERMAN. *To the interpolation theory in complex domain* (summary)

In the paper the Hermit—Feier interpolation process for fraction-rational functions in the nodes

$$z_k^{(n)}=e^{i\theta_k^{(n)}},\ \theta_k^{(n)}=\frac{(2k-1)\pi}{n},\ k=1, 2,\cdots, n,\ n=1, 2,\cdots$$

is investigated.

When $f(z)$ is an arbitrary polynom, the Hermit-Feier process $\{\widetilde{H}_n(f, z)\}_{n=1}^{\infty}$ at the nodes which are obtained by adding the $z=1$ point to the system of former nodes is also studied. It is proved that the latter process converges at a rate $O\left(\frac{1}{n}\right)$ for $|z|<1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. *Н. Бернштейн*. Несколько замечаний об интерполировании, Собр. соч., 1, М., Изд. АН СССР, 1952.
2. *G. Faber*. Über die interpolatorische Darstellung stetiger Funktionen, Jahresber. DMV, 23, 1914, 192—210.
3. *G. Grünwald*. Über Divergenzerscheinungen, Ann. Math., 37 1936, 908—918.
4. *J. Mancinkiewicz*. Sur la divergence des polynômes d'interpolation, Acta Litt as Sc. Szeged, 8, 1937, 131—135.
5. *L. Fejèr*. Über Interpolation, Gött. Nach., 1916, 66—91.
6. *L Fejèr*. Lagrangesche Interpolation und die Zugekörigen konjugierten Punkte, Math. Ann., 106, 1932, 1—55.

7. *G. Grünwald*. On the theory of interpolation, Acta Mathem., 75, 1943, 219—245.
8. *Д. Л. Берман*. К теории интерполяции в комплексной области, Изв. АН СССР, сер. матем., 36, № 4, 1972, 789—794.
9. *В. И. Смирнов, Н. А. Лебедев*. Конструктивная теория функций комплексного переменного, М., «Наука», 1964.
10. *Д. Л. Берман*. К теории интерполяции, ДАН СССР, 163, № 3, 1965, 551—554.
11. *Д. Л. Берман*. Исследование интерполяционного процесса Эрмита—Фейера, ДАН СССР, 187, № 2, 1969, 241—244.
12. *Д. Л. Берман*. Об одном всюду расходящемся интерполяционном процессе Эрмита—Фейера, Известия вузов, сер. матем., № 1, 1970, 3—8.