ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XV, № 3, 1980 Математика

Р. А. БАГИЯН

ОБОБЩЕНИЕ НЕРАВЕНСТВА С. Н. БЕРНШТЕЙНА И ПОЛИНОМОВ Б. М. ЛЕВИТАНА

Введение

Тонкие асимптотические свойства целых функций типа Миттаг-Леффлера

$$E_\rho(z, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma\left(\mu + \frac{k}{\rho}\right)} \quad (\rho > 0, \ -\infty < \mu < \infty) \tag{1}$$

послужили основой для построения гармонического анализа в комплексной области и теории представлений целых и аналитических функций конечного роста [1].

В совместных с М. М. Джрбашяном статьях автора [2, 3] были получены новые результаты о свойствах и интегральных представлениях функций $E_\rho(z, \mu)$, позволяющие получить новые применения функций типа Миттаг-Леффлера [4].

Настоящая статья посвящена еще одному применению функций (1).

В § 1 статьи, имеющем вспомогательный характер, приводятся некоторые предварительные сведения, необходимые нам для дальнейшего изложения. Здесь приводится также одна лемма, в которой на основании асимптотических свойств функций (1) устанавливается конечность величин некоторых интегралов.

В § 2 прежде всего устанавливается теорема 1, согласно которой любая целая функция $F(z)$ роста (ρ, σ) $(1 < \rho < +\infty, \ 0 < \sigma < \infty)$ во всей комплексной плоскости представляется в следующем виде:

$$F(z) = \int_0^{\infty} f(zt)\, \Phi_{\rho, \mu}(t)\, dt \quad (-\infty < \mu < +\infty), \tag{2}$$

где $f(zt)$ — целая функция порядка 1 и типа $\sigma^{1/\rho}$, а $\Phi_{\rho, \mu}(t)$ — известная функция, введенная в работах [2, 3].

Затем устанавливается основная теорема 2, с помощью которой при некоторых ограничениях на функцию $F(z)$ роста (ρ, σ), $1 < \rho < 2$ в представлении (2), утверждается ограниченность функций $f(z)$ на всей вещественной оси.

Эти две теоремы позволяют перенести известные факты из теории целых функций экспоненциального типа, ограниченных на вещественной оси, на случай целых функций конечного роста (ρ, σ) $(1 < \rho < 2)$, ограниченных уже в специальных угловых областях. В качестве непосредственного применения этих теорем приводятся теоремы 3 и 4, которые соответственно обобщают неравенство Бернштейна [5] и теорему Н. И. Ахиезера [6], а также строятся квазиполиномы типа Левитана, ассоциированные с функциями типа (1) и устанавливается их сходимость на всей вещественной оси.

§ 1. Предварительные сведения

1°. Приведем некоторые определения и сведения из монографии М. М. Джрбашяна [1] об интегральном и параметрическом представлении целых функций конечного роста, осуществляемых посредством функции типа Миттаг-Леффлера

$$E_\rho(z, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma\left(\mu + \frac{k}{\rho}\right)} \quad (\rho > 0,\ -\infty < \mu < +\infty), \tag{1.1}$$

которая, как известно, имеет порядок ρ и тип, равный единице. Пусть

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

— целая функция порядка ρ $(0 < \rho < \infty)$ и типа σ $(0 < \sigma < \infty)$. Тогда, следуя [1], функцию

$$g_{\rho, \mu}(\zeta, F) = \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma\left(\mu + \frac{k}{\rho}\right) a_k \zeta^{-1-k} \tag{1.2}$$

будем называть обобщенным преобразованием Бореля или $B_{\rho, \mu}$-преобразованием целой функции $F(z)$.

Будем говорить, что целая функция $F(z)$ имеет рост (ρ, σ), если ее порядок $\leqslant \rho$, причем, если ее порядок равен ρ, то тип не превосходит σ.

Известна (см. [1], теорему 6.3).

Теорема А. *Пусть $F(z)$ — целая функция роста (ρ, σ), где*

$$0 < \rho < +\infty \text{ и } 0 \leqslant \sigma < +\infty.$$

Тогда справедлива интегральная формула

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L E_\rho(z\zeta, \mu)\, g_{\rho, \mu}(\zeta, F)\, d\zeta \quad (|z| < \infty),$$

где L — произвольная замкнутая жорданова спрямляемая кривая, внутри которой лежат все особенности функции $g_{\rho, \mu}(\zeta, F)$.

Для значений параметров ρ и σ, $1 \leqslant \rho < 2$, $0 < \sigma < \infty$ введен класс $C_\sigma^{(\rho)}$ целых функций $f(z)$ роста (ρ, σ), удовлетворяющих условиям

$$\int_0^\infty |f(te^{-i\theta})|^2\, dt < +\infty$$

при

$$-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2\rho}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho} \text{ и } \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2\rho}\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2\rho}.$$

Полное описание класса $C_\sigma^{(\rho)}$ дается следующей теоремой (см. [1], частный случай теоремы 6.16 при $p=1$, $\omega=0$).

Теорема Б. *Класс $C_\sigma^{(\rho)}$ $(1\leqslant\rho<2,\ \sigma>0)$ совпадает с множеством функций $f(z)$, допускающих представление вида*

$$f(z)=\int_0^\sigma E_\rho(iz\tau^{1/\rho},\ \mu)\,\varphi_0(\tau)\,\tau^{\mu-1}\,d\tau+\int_0^\sigma E_\rho(-iz\tau^{1/\rho},\ \mu)\,\varphi_1(\tau)\,\tau^{\mu-1}\,d\tau,$$

где

$$\mu=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\rho},\ 1\leqslant\rho<2,\ \varphi_k(\tau)\in L^2(0;\ \sigma)$$

и единственным образом определяющихся из формул

$$\varphi_0(\tau)=\frac{1}{2\pi\rho}\frac{d}{d\tau}\int_{-\infty}^{+\infty} f(i(-iv)^{1/\rho})\,\frac{e^{-i\tau v}-1}{-iv}(-iv)^{\mu-1}dv,$$

$$\varphi_1(\tau)=\frac{1}{2\pi\rho}\frac{d}{d\tau}\int_{-\infty}^{+\infty} f(-i(iv)^{1/\rho})\,\frac{e^{-i\tau v}-1}{-iv}(iv)^{\mu-1}\,dv$$

почти всюду на $(0,\ \sigma)$.

2°. В дальнейшем мы будем существенно опираться на некоторые основные результаты работ [2, 3]. С этой целью приведем эти результаты в виде одной теоремы.

Теорема В. а) *Пусть*

$$1<\rho<+\infty \text{ и } -\infty<\mu<+\infty.$$

Тогда во всей конечной плоскости

$$E_\rho(z,\ \mu)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^\infty e^{z\tau}\,\Phi_{\rho,\mu}(\tau)\,d\tau \quad \text{при } 1<\rho<\infty,\ \frac{1}{\rho}\leqslant\mu<\infty\\ \displaystyle\int_0^\infty e^{z\tau}\,d\,\alpha_\mu(\tau) \qquad \text{при } \rho=1,\ 1\leqslant\mu<+\infty,\end{cases}\tag{1.3}$$

где

$$\Phi_{\rho,\mu}(\tau)=-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^\infty(-1)^k\frac{\Gamma\left(1-\mu+\frac{k+1}{\rho}\right)}{\Gamma(1+k)}\sin\pi\left(\frac{k+1}{\rho}-\mu\right)\tau^k,\tag{1.4}$$

— целая функция порядка $\rho/\rho-1$ *типа* $\sigma=(1-\rho^{-1})\rho^{-\frac{1}{\rho-1}}$, *обладающая свойствами*

$$\Phi_{\rho,\mu}(\tau)\geqslant 0,\ \tau\in[0,+\infty),\ \Phi_{\rho,\mu}(\tau)\in L(0,+\infty),$$

а

$$a_\mu(\tau)=\begin{cases}\dfrac{1-(1-\tau)^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}, & 0\leqslant\tau\leqslant 1\\[2mm] \dfrac{1}{\Gamma(\mu)}, & 1<\tau<+\infty.\end{cases}$$

б) *Функция* $\Phi_{\rho,\mu}(\tau)$ *является решением следующей проблемы моментов Стилтьеса:*

$$\frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma\left(\mu+\dfrac{n}{\rho}\right)}=\int_0^\infty \tau^n\,\Phi_{\rho,\mu}(\tau)\,d\tau\quad(n=0,1,2,\cdots). \tag{1.5}$$

в) *При условии* $1<\rho<+\infty,\ \dfrac{1}{\rho}\leqslant\mu<+\infty$ *справедливы неравенства*

$$|E_\rho^{(n)}(-z,\mu)|\leqslant\frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma\left(\mu+\dfrac{n}{\rho}\right)},\ \operatorname{Re} z\geqslant 0 \tag{1.6}$$

и все они достижимы в точке $z=0$.

3°. Напомним некоторые сведения о характере роста в комплексной области целой функции типа Миттаг-Леффлера.

Для любого $\varepsilon>0$ и β $(0<\beta<\pi)$ обозначим через $\gamma(\varepsilon,\beta)$ бесконечный контур плоскости ζ, пробегаемый в направлении неубывания $\arg\zeta$ и состоящий из следующих составных частей: двух лучей, $\arg\zeta=\pm\beta$, $\varepsilon\leqslant|\zeta|<+\infty$ и дуги окружности $|\arg\zeta|\leqslant\beta$, $|\zeta|=\varepsilon$, соединяющей концы $\varepsilon\exp\{\pm i\beta\}$ этих лучей. Очевидно, что контур $\gamma(\varepsilon,\beta)$ служит общей границей двух взаимнодополнительных областей — $G^{(-)}(\varepsilon,\beta)$ и $G^{(+)}(\varepsilon,\beta)$, лежащих, соответственно, слева и справа от него.

Всюду в дальнейшем для любого $\rho>\dfrac{1}{2}$ мы положим, что параметр β удовлетворяет условию

$$\frac{\pi}{2\rho}<\beta\leqslant\varkappa=\min\left\{\pi,\frac{\pi}{\rho}\right\}.$$

В этом случае справедливы (см. [1], стр. 127) следующие интегральные представления: если $z\in G^{(-)}(\varepsilon,\beta)$, то

$$E_\rho(z,\mu)=\frac{\rho}{2\pi i}\int_{\gamma(\varepsilon,\beta)}\frac{e^{\zeta^\rho}\,\zeta^{\rho(1-\mu)}\,d\zeta}{\zeta-z}\,d\zeta,\ \rho>\frac{1}{2};\ \mu>0,$$

если $z \in G^{(+)}(\varepsilon, \beta)$, то

$$E_\rho(z, \mu) = \rho z^{\rho(1-\mu)} e^{z^\rho} + \frac{\rho}{2\pi i} \int\limits_{\gamma(\varepsilon, \beta)} \frac{e^{\zeta^\rho} \zeta^{\rho(1-\mu)}}{\zeta - z} d\zeta.$$

Из этих формул вытекают следующие оценки:

для $|\arg z| \leqslant \beta$, $|z| \geqslant 0$,

$$|E'_\rho(z, \mu)| \leqslant M_1 (1+|z|)^{2\rho-\rho\mu-1} e^{\operatorname{Re} z^\rho} + \frac{M_2}{(1+|z|)^2}, \tag{1.7}$$

для $\beta \leqslant |\arg z| \leqslant \pi$, $|z| \geqslant 0$

$$|E'_\rho(z, \mu)| \leqslant \frac{M_2}{(1+|z|)^2}, \tag{1.8}$$

где M_1 и M_2 не зависят от z, а $E'_\rho(z, \mu)$ — производная функции типа Миттаг-Леффлера.

С помощью оценок (1.7) и (1.8) легко устанавливается следующая

Лемма. *Пусть* $1 < \rho < 2$, $\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$ и μ_0 — произвольный параметр. *Если* $\mu_0 > 2 - \frac{1}{2\rho}$, *то*

$$\int\limits_0^{+\infty} |E'_\rho(te^{-i\vartheta}, \mu_0)|^2 dt < +\infty, \frac{\pi}{2\rho} \leqslant |\vartheta| \leqslant \pi. \tag{1.9}$$

Если $\mu_0 > 2 - \frac{1}{\rho} + \mu$, *то*

$$J_\rho^{(\mp)}(\mu_0, \mu) \overset{\text{def}}{\equiv} \frac{1}{2\pi\rho} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |E'_\rho(\mp(-iv)^{1/\rho}, \mu_0)| \cdot |v|^{\mu-1} dv < +\infty. \tag{1.10}$$

Доказательство. Если $\frac{\pi}{2\rho} < |\vartheta| \leqslant \pi$, то из (1.8) следует, что

$$\int\limits_0^{+\infty} |E'_\rho(te^{-i\vartheta}, \mu_0)|^2 dt < M_2^2 \int\limits_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t)^4} < +\infty.$$

При $\vartheta = \pm \frac{\pi}{2\rho}$ в силу (1.7) и выбора параметра μ_0 будем иметь

$$\int\limits_0^{\infty} |E'_\rho(te^{\pm \pi i/2\rho}, \mu_0)|^2 dt < M_1^2 \int\limits_0^{+\infty} (1+t)^{4\rho-2\rho\mu_0-2} dt + C < +\infty,$$

так как $4\rho - 2\rho\mu_0 - 2 < -1$.

Аналогичным образом, из (1.7) получим

$$J_\rho^{(\mp)}(\mu_0, \mu) \equiv \frac{1}{2\pi\rho}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |E_\rho'(\mp(-iv)^{1/\rho}, \mu_0)| \cdot ||v|^{\mu-1}\, dv <$$

$$< \frac{M_1}{2\pi\rho}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(1+|v|)^{2-\mu_0-\frac{1}{\rho}}|v|^{\mu-1}\, dv + C_1 < +\infty,$$

так как $2-\mu_0-\dfrac{1}{\rho}+\mu<0$.

С другой стороны, поскольку $2-\dfrac{1}{\rho}+\mu>2-\dfrac{1}{2\rho}$ при рассматриваемых значениях параметров ρ и μ, то для одновременного выполнения условий (1.9) и (1.10) достаточно потребовать, чтобы $\mu_0>2-\dfrac{1}{\rho}+\mu$, например, если $\mu_0>2{,}5$, то утверждения (1.9) и (1.10) имеют место одновременно.

4°. В заключение параграфа приведем некоторые хорошо известные сведения [6] об одном классе целых функций. Имеется в виду класс целых функций B_σ экспоненциального типа $\leqslant\sigma$, для которых

$$\sup_{-\infty<x<+\infty}|f(x)|<+\infty.$$

Если $f(z)\in B_\sigma$, то она допускает представление

$$f(z)=f(0)+\frac{z}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}e^{izu}\,\Psi(u)\,du,$$

где $\Psi(u)\in L^2(-\sigma, \sigma)$.

Наряду с функцией $f(z)\in B_\sigma$ часто рассматривается ([6], стр. 183) сопряженная функция, которая определяется с помощью формулы

$$\tilde{f}(z)=\frac{z}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}e^{izu}\; i\operatorname{sgn}u\,\Psi(u)\,du, \tag{1.11}$$

где $\Psi(u)\in L^2(-\sigma, \sigma)$.

Отметим, что сопряженная функция также является целой функцией экспоненциального типа $\leqslant\sigma$.

Относительно класса B_σ С. Бернштейну [5] принадлежит одна замечательная теорема, которая гласит:

Если $f(z)\in B_\sigma$, то

$$\sup_{-\infty<x<\infty}|f'(x)|\leqslant\sigma\sup_{-\infty<x<+\infty}|f(x)|. \tag{1.12}$$

Следующая теорема Н. И. Ахиезера ([6], стр. 186) содержит неравенство С. Бернштейна в качестве специального случая.

Теорема Г. *Если $f(z) \in B_\sigma$, то при любом вещественном α и любом $x \in (-\infty, +\infty)$*

$$\text{а) } |\sin\alpha f'(x) - \sigma\cos\alpha f(x)| \leqslant \sigma \sup_{-\infty<x<+\infty} |f(x)|, \tag{1.13}$$

$$\text{б) } |\sin\alpha f'(x) + \cos\alpha \tilde{f}'(x)| \leqslant \sigma \sup_{-\infty<x<+\infty} |f(x)|. \tag{1.14}$$

В своей заметке [7] Б. М. Левитан показал, что функции класса B_σ являются пределами определенным образом сходящихся к ним тригонометрических периодических полиномов.

Позднее М. Г. Крейн [8] дал существенно иное доказательство теоремы Левитана.

Упомянутые полиномы Левитана строятся следующим образом. Для функции $f(z) \in B_\sigma$ положим

$$S_n(f;\ x) \equiv \sum_{k=-n}^{n} h\, E_h(kh)\, e^{ikhx},\ -\infty < x < +\infty, \tag{1.15}$$

где при $h = \sigma/n$, n — натуральное число

$$E_h(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu}\left(\frac{2\sin\frac{hu}{2}}{hu}\right) f(u)\, du, \tag{1.16}$$

$$E_h(x) = 0,\ |x| > \sigma + h.$$

Справедлива

Теорема. (М. Г. Крейн [8]). *Если $f(z) \in B_\sigma$, то тригонометрические суммы $S_n(f;\ x)$ $(n \to \infty)$ сходятся к $f(x)$, притом равномерно в каждом конечном интервале. Кроме того*

$$S_n(f;\ x) \leqslant \sup_{-\infty<x<+\infty} |f(x)|\ (-\infty < x < +\infty,\ n = 1, 2, \cdots),$$

и если $f(x)$ всюду неотрицательна, то и суммы $S_n(f,\ x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ обладают этим свойством.

§ 2. Основные результаты

Нижеследующая теорема устанавливает связь между целыми функциями любого конечного роста и целыми функциями экспоненциального типа.

Теорема 1. *Каждая целая функция порядка ρ $(1 < \rho < \infty)$ и нормального типа σ представляется во всей плоскости в виде*

$$F(z) = \int_0^\infty f(zt)\, \Phi_{\rho,\mu}(t)\, dt,\ -\infty < \mu < +\infty, \tag{2.1}$$

где $f(z)$ — целая функция экспоненциального типа $\sigma^{1/\rho}$, а $\Phi_{\rho,\mu}(t)$ определяется из (1.4).

Доказательство. В силу теоремы А имеем

$$F(z)=\int_L E_\rho(z\zeta,\ \mu)\ g_{\rho,\mu}(\zeta,\ F)\ d\zeta\ \ (|z|<\infty), \tag{2.2}$$

где L — произвольная замкнутая жорданова спрямляемая кривая, внутри которой лежат все особенности $B_{\rho,\mu}$—преобразования (1, 2) целой функции $F(z)$.

С другой стороны, из (1.3) теоремы В вытекает следующее интегральное представление, имеющее место на всей комплексной плоскости

$$E_\rho(z\zeta,\ \mu)=\int_0^\infty e^{z\zeta t}\ \Phi_{\rho,\mu}(t)\ dt. \tag{2.3}$$

Подставляя (2.3) в (2.2) и меняя порядок интегрирования получим

$$F(z)=\int_L\left\{\int_0^\infty e^{z\zeta t}\ \Phi_{\rho,\mu}(t)\,dt\right\}\ g_{\rho,\mu}(\zeta,\ F)\ d\zeta=$$

$$=\int_0^{+\infty}\left\{\int_L e^{z\zeta t}\ g_{\rho,\mu}(\zeta,\ F)\ d\zeta\right\}\Phi_{\rho,\mu}(t)\ dt=\int_0^\infty f(zt)\ \Phi_{\rho,\mu}(t)\ dt,$$

где

$$f(zt)=\int_L e^{z\zeta t}\ \ g_{\rho,\mu}(\zeta,\ F)\ d\zeta.$$

Для завершения доказательства нам остается вычислить порядок ρ_0 и тип σ_0 функции $f(z)$.

Пусть

$$F(z)=\sum_{k=0}^\infty a_k z^k,\ f(z)=\sum_{k=0}^\infty b_k z^k.$$

Подставив эти выражения в (2.1), почленно проинтегрировав и используя равенства (1.5) теоремы В, получим

$$\sum_{k=0}^\infty a_k z^k=\int_0^\infty\sum_{k=0}^\infty b_k z^k t^k\ \Phi_{\rho,\mu}(t)\ dt=$$

$$=\sum_{k=0}^\infty b_k z^k\int_0^\infty t^k\ \Phi_{\rho,\mu}(t)\ dt=\sum_{k=0}^\infty b_k\ \frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma\left(\mu+\frac{k}{\rho}\right)}\ \ z^k.$$

Таким образом, между коэффициентами степенных разложений функций $F(z)$ и $f(z)$ мы получили следующую связь:

$$a_k=\frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma\left(\mu+\frac{k}{\rho}\right)}\, b_k\ (k=0,\ 1,\ 2,\cdots),\ \underset{-\infty<\mu<\infty}{1<\rho<\infty}. \tag{2.4}$$

Пользуясь известными соотношениями между коэффициентами степенного разложения целой функции $H(z)=\sum_{k=0}^{\infty} h_k z^k$ и ее ростом (см. [9], стр. 13)

$$\rho_H=\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{k\ln k}{\ln\frac{1}{|h_k|}},\ \sigma_H=\frac{1}{\rho e}\overline{\lim_{k\to\infty}}\ k\,|h_k|^{\rho/k} \tag{2.5}$$

для функции $f(z)$ соответственно будем иметь

$$\rho_0=\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{k\ln k}{\ln\frac{1}{|b_k|}},\ \sigma_0=\frac{1}{\rho_0 e}\overline{\lim_{k\to\infty}}\ k\,|b_k|^{\rho_0/k}. \tag{2.6}$$

Из (2.6) и (2.4) следует

$$\rho_0=\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{k\ln k}{\ln\frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(\mu+k/\rho)}+\ln\frac{1}{|a_k|}}=\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{k\ln k}{\ln\frac{1}{|a_k|}\left[1+\ln\frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(\mu+k/\rho)}\Big/\ln\frac{1}{|a_k|}\right]},$$

Пользуясь асимптотическими формулами

$$\Gamma(1+k)\sim k^{k+\frac{1}{2}}e^{-k},\ k\to\infty$$

и

$$\Gamma\left(\mu+\frac{k}{\rho}\right)\sim\left(\mu+\frac{k}{\rho}-1\right)^{\mu+\frac{k}{\rho}-\frac{1}{2}}e^{-\mu-\frac{k}{\rho}+1}, \tag{2.7}$$

а также формулой (2.5), простым вычислением получим, что $\rho_0=1$ и

$$\sigma_0=\frac{1}{e}\overline{\lim_{k\to\infty}}\,k\,|b_k|^{1/k}=\frac{1}{e}\overline{\lim_{k\to\infty}}\,k\left|\frac{\Gamma\left(\mu+\frac{k}{\rho}\right)}{\Gamma(1+k)}\right|^{1/k}|a_k|^{1/k}=\sigma^{1/\rho},$$

ввиду (2.7) и (2.5)

В связи с представлением (2.1) теоремы 1 отметим следующее. Пусть

$$F(z)=\int_0^{\infty} f(zt)\,\Phi_{\rho,\mu}(t)\,dt, \tag{2.1}$$

где $f(z)\in B_{\sigma^{1/\rho}}$.

В этом случае целая функция $F(z)$ имеет рост (ρ,σ) $(1<\rho<\infty,\ 0<\sigma<\infty)$ и, разумеется, будет ограниченной на вещественной оси $-\infty<x<+\infty$.

Отсюда непосредственно следует, что все свойства для функций класса B_σ, т. е. теоремы о неравенстве С. Н. Бернштейна—Н. И. Ахиезера и полиномах Б. М. Левитана перенесутся на целые функции роста (ρ, σ) $(\rho > 1,\ 0 < \sigma < \infty)$ и ограниченные на всей оси. Для этого достаточно в теоремах В и Г вместо x записать xt, $0 < t < \infty$, умножить на функцию $\Phi_{\rho,\mu}(t)$ и проинтегрировать по t вдоль промежутка $(0, \infty)$.

Иначе говоря, если мы имеем некоторую дополнительную информацию о функции $f(z)$, то мы будем иметь соответствующую информацию о $F(z)$. Но интересно поставить обратную задачу. Если известна информация о $F(z)$, то что можно сказать о $f(z)$? Если конкретно. При каких условиях, наложенных на $F(z)$, функция $f(z)$ из (2.1) будет принадлежать классу B_σ? Мы сейчас займемся решением именно этого вопроса.

2°. Пусть параметры ρ и β подчинены условиям

$$1 \leqslant \rho < 2,\ \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\rho} = 1,$$

а M обозначает следующее множество:

$$M \equiv \left\{\varphi;\ |\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2\beta}\right\} U \left\{\varphi;\ |\varphi - \pi| \leqslant \frac{\pi}{2\beta}\right\}.$$

Обозначим через $\Delta(\beta)$ объединение угловых областей

$$\Delta(\beta) \equiv \left\{z;\ |\arg z| < \frac{\pi}{2\beta}\right\} U \left\{z;\ |\arg z - \pi| < \frac{\pi}{2\beta}\right\}.$$

Впредь всюду будем предполагать, что параметры ρ, $\mu = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\rho}$ и μ_0 лежат в пределах

$$1 \leqslant \rho < 2,\ \mu_0 > 2 - \frac{1}{\rho} + \mu. \tag{2.8}$$

Определение. Целая функция $F(z)$ принадлежит классу $B_\sigma^{(\rho)}$, если она имеет порядок ρ, конечный тип σ и удовлетворяет условиям

$$\sup_{\theta \in M} |F(re^{-i\theta})| \leqslant C,\ r \in [0, +\infty). \tag{2.9}$$

Ясно, что при $\rho = 1$ это известный класс $B_\sigma^{(1)} \equiv B_\sigma$ целых функций экспоненциального типа, ограниченных на вещественной оси. С помощью теоремы 1, а также теоремы, которую мы сейчас докажем, устанавливается связь между этими двумя классами целых функций.

Теорема 2. *Пусть $F(z) \in B_\sigma^{(\rho)}$. Тогда целая функция $f(z)$ экспоненциального типа $\sigma^{1/\rho}$, фигурирующая в представлении* (2.1) *функции $F(z)$, удовлетворяет на всей действительной оси неравенству*

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} |f(x)| \leqslant CK(\rho), \tag{2.10}$$

где $K(\rho)$ — постоянная, т. е. $f(z) \in B_{\sigma^{1/\rho}}$.

Доказательство. Для значений параметров ρ и μ_0, удовлетворяющих условиям (2.8), введем в рассмотрение следующую вспомогательную функцию:

$$G(z) \overset{\text{def}}{\equiv} F(z)\, E'_\rho(iz, \mu_0), \tag{2.11}$$

где $F(z)$ удовлетворяет условию (2.9), а $E'_\rho(iz, \mu_0)$ — производная функции типа Миттаг-Леффлера, заданной формулой (1.1).

Используя асимптотическую оценку (1.8) для $E'_\rho(z, \mu_0)$, убеждаемся, что в области $\Delta(\beta)$ функция $E'_\rho(iz, \mu_0)$ имеет порядок $O\left(\frac{1}{|z|^2}\right)$.

Поскольку параметры ρ, μ и μ_0 удовлетворяют условию леммы, то вместе с (2.9) будем иметь

1°.

$$\int_0^\infty |E'_\rho(te^{-i\vartheta}, \mu_0)|^2\, dt < +\infty, \quad \frac{\pi}{2\rho} \leqslant |\vartheta| \leqslant \pi. \tag{2.12}$$

2°. Интегралы

$$\frac{1}{2\pi\rho}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\pm(-iv)^{1/\rho})\, E'_\rho(\mp(-iv)^{1/\rho};\ \mu_0)\, e^{-i\tau v}(iv)^{\mu-1}\, dv \tag{2.13}$$

$$\tau \in (0, +\infty)$$

абсолютно и равномерно сходятся и не превосходят $CJ_\rho^{(\mp)}(\mu_0, \mu)$ для указанных значений параметров.

Так как $F(z)$ имеет рост (ρ, σ) $(1<\rho<2,\ 0<\sigma<+\infty)$, а $E'_\rho(iz, \mu_0)$ порядок ρ и тип 1, то $G(z)$ имеет порядок ρ и тип $\sigma+1$.

Из условий (2.9) и (2.12) следует, что функция $G(z)$, определенная формулой (2.11), принадлежит классу $C_{\sigma+1}^{(\rho)}$. Следовательно, в силу теоремы Б для нее имеет место представление вида

$$G(z) = F(z)\, E'_\rho(iz, \mu_0) = \int_0^{\sigma+1} E_\rho(iz\tau^{1/\rho}, \mu)\, \varphi_0(\tau)\, \tau^{\mu-1}\, d\tau +$$

$$+ \int_0^\infty E_\rho(-iz\tau^{1/\rho}, \mu)\, \varphi_1(\tau)\, \tau^{\mu-1}\, d\tau, \tag{2.14}$$

где

$$\varphi_0(\tau) = \frac{1}{2\pi\rho}\frac{d}{d\tau}\int_{-\infty}^{+\infty} F(i(-iv)^{1/\rho})\, E'_\rho(-(-iv)^{1/\rho}, \mu_0)\frac{e^{-i\tau v}-1}{-iv}(iv)^{\mu-1}\, dv,$$

$$\varphi_1(\tau) = \frac{1}{2\pi\rho}\frac{d}{d\tau}\int_{-\infty}^{+\infty} F(-i(-iv)^{1/\rho})\, E'_\rho((-iv)^{1/\rho}, \mu_0)\, \frac{e^{-i\tau v}-1}{-iv}\, (iv)^{\mu-1}\, dv.$$

Далее имеем

$$\varphi_0(\tau)=\frac{1}{2\pi\rho}\int_{-\infty}^{+\infty}F(i(-iv)^{1/\rho})\,E'_\rho\,(-(-iv)^{1/\rho},\ \mu_0)\,e^{-i\tau v}(iv)^{\mu-1}\,dv$$

и

$$\varphi_1(\tau)=\frac{1}{2\pi\rho}\int_{-\infty}^{+\infty}F(-i(-iv)^{1/\rho})\,E'_\rho\,((-iv)^{1/\rho},\ \mu_0)\,e^{-i\tau v}\,(iv)^{\mu-1}\,dv.$$

Из (2.13) вытекает, что

$$|\varphi_0(\tau)|\leqslant CJ_\rho^{(-)}(\mu_0,\ \mu)\ \text{ и }\ |\varphi_1(\tau)|< CJ_\rho^{(+)}(\mu_0,\ \mu), \tag{2.15}$$

при $\tau\in(0,\ \sigma+1)$.

Теперь в силу представления (2.1) мы можем переписать равенство (2.14) в следующей эквивалентной форме:

$$F(z)\,E'_\rho\,(iz,\ \mu_0)=\int_0^\infty\{f(zt)\,E'_\rho\,(iz,\ \mu_0)\}\,\Phi_{\rho,\mu}(t)\,dt=$$

$$=\int_0^{\sigma+1}E_\rho\,(iz\tau^{1/\rho},\ \mu)\,\varphi_0(\tau)\,\tau^{\mu-1}\,d\tau+\int_0^{\sigma+1}E_\rho\,(-iz\tau^{1/\rho},\ \mu)\,\varphi_1(\tau)\,\tau^{\mu-1}\,d\tau. \tag{2.14'}$$

Положив здесь $z\equiv x$ и используя представление (1.3) теоремы B, получим для $-\infty<x<+\infty$

$$\int_0^\infty\{f(xt)\,E'_\rho\,(ix,\ \mu_0)\}\,\Phi_{\rho,\mu}(t)\,dt=\int_0^{\sigma+1}E_\rho\,(ix\tau^{1/\rho},\ \mu)\,\varphi_0(\tau)\,\tau^{\mu-1}\,d\tau+$$

$$\int_0^{\sigma+1}E_\rho\,(-ix\tau^{1/\rho},\ \mu)\,\varphi_1(\tau)\,\tau^{\mu-1}\,d\tau=\int_0^{\sigma+1}\left\{\int_0^\infty e^{ix\tau^{1/\rho}t}\,\Phi_{\rho,\mu}(t)\,dt\right\}\varphi_0(\tau)\,\tau^{\mu-1}\,d\tau+$$

$$+\int_0^{\sigma+1}\left\{\int_0^\infty e^{-ix\tau^{1/\rho}t}\,\Phi_{\rho,\mu}(t)\,dt\right\}\varphi_1(\tau)\,\tau^{\mu-1}\,d\tau.$$

В последнем выражении, поменяв порядок интегрирования и объединив слагаемые, будем иметь

$$\int_0^\infty\{f(xt)\,E'_\rho\,(ix,\ \mu_0)\}\,\Phi_{\rho,\mu}(t)\,dt=$$

$$=\int_0^\infty\left\{\int_0^{\sigma+1}e^{ix\tau^{1/\rho}t}\,\varphi_0(\tau)\,\tau^{\mu-1}\,d\tau+\int_0^{\sigma+1}e^{-ix\tau^{1/\rho}t}\,\varphi_1(\tau)\,\tau^{\mu-1}\,d\tau\right\}\Phi_{\rho,\mu}(t)\,dt.$$

Отсюда следует формула

$$f(xt)\,E'_{\rho}(ix,\mu_0)=\int_0^{\sigma+1} e^{ix\tau^{1/\rho}t}\varphi_0(\tau)\,\tau^{\mu-1}\,d\tau+\int_0^{\sigma+1} e^{-ix\tau^{1/\rho}t}\varphi_1(\tau)\,\tau^{\mu-1}\,d\tau. \quad (2.16)$$

Для сколь угодно малого $\varepsilon \left(0<\varepsilon<\dfrac{1}{\Gamma\left(\mu_0+\dfrac{1}{\rho}\right)}\right)$ мы можем выбрать такое $\gamma>0$, что

$$|E'_{\rho}(\pm i\gamma,\mu_0)|>\frac{1}{\Gamma\left(\mu_0+\dfrac{1}{\rho}\right)}-\varepsilon. \quad (2.17)$$

Положив в (2.16) $x=\pm\gamma$ и используя последнее неравенство, соответственно будем иметь

$$f(\pm\gamma t)=\frac{1}{E'_{\rho}(\pm i\gamma,\mu_0)}\left\{\int_0^{\sigma+1} e^{\pm i\gamma\tau^{1/\rho}t}\varphi_0(\tau)\tau^{\mu-1}\,d\tau+\int_0^{\sigma+1} e^{\mp i\gamma\tau^{1/\rho}t}\varphi_1(\tau)\tau^{\mu-1}\,d\tau\right\}. \quad (2.18)$$

Если оценить (2.18) сверху и учесть (2.15) и (2.17), то получим при $-\infty<x<+\infty$

$$|f(x)|<\frac{C}{\left[\Gamma\left(\mu_0+\dfrac{1}{\rho}\right)\right]^{-1}-\varepsilon}\cdot\frac{(\sigma+1)^{\mu}}{\mu}\left[J_{\rho}^{(-)}(\mu_0,\mu)+J_{\rho}^{(+)}(\mu_0,\mu)\right],$$

где $\mu=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2\rho}\cdot$

Наконец, обозначив правую часть последнего неравенства через $K(\rho)$, приходим к утверждению (2.10) теоремы.

В заключение отметим, что вопрос о точном определении константы $K(\rho)$ в неравенстве (2.10), представляющий несомненный интерес, остается открытым.

Теорема 2 позволяет обобщить известные теоремы для класса B_{σ} на классы $B_{\sigma}^{(\rho)}$ $(1<\rho<2)$, а именно, обобщить неравенство Бернштейна, построить обобщенные полиномы Левитана, ассоциированные с функциями типа Миттаг-Леффлера и т. д. Приступим к решению этих вопросов.

Введем понятие сопряженной функции роста (ρ,σ) по формуле

$$\tilde{F}(z)=\int_0^{\infty}\tilde{f}(zt)\,\Phi_{\rho,\mu}(t)\,dt,$$

где $\tilde{f}(z)$ — сопряженная функция экспоненциального типа, определяемая по формуле (1.11). Отсюда следует, что

$$\widetilde{F}(z)=\int_{0}^{+\infty}\left\{\frac{z}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sigma}^{\sigma}e^{izut}\,i\operatorname{sgn}u\,\Psi(u)\,du\right\}\Phi_{\rho,\mu}(t)\,dt=$$

$$=\frac{z}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sigma}^{\sigma}E_{\rho}(izu,\mu)\,i\operatorname{sgn}u\,\Psi(u)\,du,\quad \Psi(u)\in L^{2}(-\sigma,\sigma).$$

Обозначив через

$$m_{f}=\sup|f(x)|,\quad C=\sup_{\vartheta\in M}|F(re^{-i\vartheta})|,\quad r\in(0,+\infty),$$

докажем теорему, которая является обобщением теоремы Г на случай класса целых функций $B_{\sigma}^{(\rho)}$.

Теорема 3. *Если* $F(z)\in B_{\sigma}^{(\rho)}$ $(1<\rho<2,\ 0<\sigma<\infty)$, *то при любом вещественном* α *и* $-\infty<x<+\infty$

$$\text{а)}\ |\sin\alpha F'(x)-\sigma^{1/\rho}\cos\alpha F(x)|\leqslant\sigma^{1/\rho}\frac{m_{f}}{\Gamma(\mu)}\leqslant\sigma^{1/\rho}\frac{CK(\rho)}{\Gamma(\mu)},\tag{2.19}$$

$$\text{б)}\ |\sin\alpha F'(x)+\cos\alpha\widetilde{F}'(x)|\leqslant\sigma^{1/\rho}\frac{m_{f}}{\Gamma(\mu)}<\sigma^{1/\rho}\frac{CK(\rho)}{\Gamma(\mu)},\quad \mu=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\rho}.$$

Доказательство. а) Легко видеть, что

$$\sin\alpha F'(x)-\sigma^{1/\rho}\cos\alpha F(x)=\sin\alpha\int_{0}^{\infty}f_{x}'(xt)\,\Phi_{\rho,\mu}(t)\,dt-$$

$$-\sigma^{1/\rho}\cos\alpha\int_{0}^{\infty}f(xt)\,\Phi_{\rho,\mu}(t)\,dt=\int_{0}^{\infty}[\sin\alpha f_{x}'(xt)-\sigma^{1/\rho}\cos\alpha f(xt)]\,\Phi_{\rho,\mu}(t)\,dt.$$

Отсюда имеем

$$|\sin\alpha F_{x}'(x)-\sigma^{1/\rho}\cos\alpha F(x)|\leqslant\int_{0}^{\infty}|\sin\alpha f_{x}'(xt)-\sigma^{1/\rho}\cos\alpha f(xt)|\,\Phi_{\rho,\mu}(t)\,dt.$$

Согласно неравенству (1.13) теоремы 1

$$|\sin\alpha f_{x}'(xt)-\sigma^{1/\rho}\cos\alpha f(xt)|\leqslant\sigma^{1/\rho}\cdot m_{f},$$

откуда следует, что на всей оси $-\infty<x<+\infty$

$$|\sin\alpha F'(x)-\sigma^{1/\rho}\cos\alpha F(\alpha)|\leqslant\sigma^{1/\rho}m_{f}\int_{0}^{\infty}|\Phi_{\rho,\mu}(t)|\,dt\leqslant\sigma^{1/\rho}\frac{m_{f}}{\Gamma(\mu)}.$$

Утверждение а) теоремы получено, поскольку в силу теоремы 2 $m_{f}\leqslant CK(\rho)$.

Не останавливаясь на доказательстве пункта (б), поскольку оно осуществляется аналогичным образом, рассмотрим частные случаи этой теоремы.

Положив в (2.19) $\alpha=\frac{\pi}{2}$ будем иметь

$$|F'(x)|\leqslant \sigma^{1/\rho}\,\frac{m_f}{\Gamma(\mu)},\quad m_f=\sup_{-\infty<x<+\infty}|f(x)|,\quad \mu=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\rho}\cdot$$

Далее из представления (2.1) следует, что при любом натуральном k

$$F^{(k)}(x)=\int\limits_0^\infty f^{(k)}(xt)\,t^k\,\Phi_{\rho,\mu}(t)\,dt,\ -\infty<x<+\infty.$$

Но так как

$$\sup|f^{(k)}(xt)|\leqslant\sigma^{k/\rho}\sup|f(xt)|=\sigma^{k/\rho}\,m_f,$$

то, учитывая равенство (1.5) теоремы А, получим

$$\sup_{-\infty<x<\infty}|F^{(k)}(x)|\leqslant\sigma^{k/\rho}\,m_f\int\limits_0^\infty t^k\,\Phi_{\rho,\mu}(t)dt=\sigma^{k/\rho}\,m_f\,\frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma\left(\mu+\dfrac{k}{\rho}\right)}\cdot\tag{2.20}$$

Теперь покажем, что если некоторое семейство функций $F(z)\in B_\sigma^{(\rho)}$ равномерно ограничено на вещественной оси, то оно равномерно ограничено также в каждой конечной части комплексной плоскости. Это следует из таких рассуждений ([6], стр. 183—184).

Из теоремы (2.20) и разложения в ряд Тейлора функции

$$F(z)=\sum_{k=0}^\infty\frac{F^{(k)}(x)}{k!}(iy)^k,$$

Имеем

$$|F(z)|\leqslant m_f\sum_{k=0}^\infty\frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(\mu+k/\rho)\,k!}\,\sigma^{k/\rho}|y|^k=m_f\,E_\rho(\sigma^{1/\rho}|y|,\ \mu).$$

Отсюда следует также, что

$$|F'(z)|\leqslant\sigma^{1/\rho}\,\frac{m_f}{\Gamma(\mu)}\,E_\rho(\sigma^{1/\rho}|y|,\ \mu).$$

3°. Также без труда мы можем построить обобщенные полиномы Левитана, ассоциированные с функциями типа Миттаг-Леффлера. Если в формуле (1.15) вместо z положить zt, умножить обе ее части на $\Phi_{\rho,\mu}(t)\,dt$ и проинтегрировать вдоль промежутка $0<t<\infty$, то, используя опять представление (1.3) теоремы В, получим

$$S_n^{(\rho)}(F;\ z)\equiv\int\limits_0^\infty S_n(f;\ zt)\,\Phi_{\rho,\mu}(t)\,dt=$$

$$= \sum_{k=-n}^{n} hE_h(kh) \int_0^{\infty} e^{ikhzt} \Phi_{\rho,\mu}(t)\, dt =$$

$$= \sum_{k=-n}^{n} hE_h(kh)\, E_\rho(ikhz, \mu), \tag{2.21}$$

причем $E_h(kh)$ определяются из формулы (1.16),

Функции $S_n^{(\rho)}(F, z)$ будем называть полиномами типа Левитана, ассоциированными с функциями типа Миттаг-Леффлера.

Из определения (2.21) вытекает ряд свойств полиномов типа Левитана.

1°. Если $f(x)$ — вещественна $(-\infty < x < \infty)$, то и полиномы типа Левитана $S_n^{(\rho)}(F, x)$ вещественны.

2°. Если $f(x) \geqslant 0 \, (-\infty < x < \infty)$, то $S_n^{(\rho)}(F, x) \geqslant 0$, $\mu \geqslant \dfrac{1}{\rho}$.

3°. Если $f(z) \equiv 1$, то $S_n^{(\rho)}(F; z) = 1/\Gamma(\mu)$.

4°. Если $|f(x)| \leqslant A \, (-\infty < x < \infty)$, где A — не зависящая от x постоянная, то $|S_n^{(\rho)}(F; x)| \leqslant A/\Gamma(\mu)$.

Таким образом, эти свойства являются следствием аналогичных свойств классических полиномов Левитана ([6], стр. 194—195) и равенства (2.21).

Теорема, которую мы сейчас приведем, обобщает теорему Левитана.

Теорема 4. *Если $F(z) \in B_\sigma^{(\rho)}$ $(1 < \rho < 2,\ \sigma > 0)$, то полиномы типа Левитана, ассоциированные с функциями типа Миттаг-Леффлера $S_n^{(\rho)}(F, x)$ при $n \to \infty$ сходятся к $F(x)$, притом равномерно в конечном интервале.*

Доказательство. Составим разность

$$F(x) - S_n^{(\rho)}(F; x) = \int_0^{\infty} f(xt)\, \Phi_{\rho,\mu}(t)\, dt - \sum_{k=-n}^{n} hE_h(kh)\, E_\rho(ikhx, \mu) =$$

$$= \int_0^{\infty} f(xt)\, \Phi_{\rho,\mu}(t)\, dt - \sum_{k=-n}^{n} hE_h(kh) \int_0^{\infty} e^{ikhxt}\, \Phi_{\rho,\mu}(t)\, dt =$$

$$= \int_0^{\infty} [f(xt) - \sum_{k=-n}^{n} hE_h(kh)^{ikhxt}]\, \Phi_{\rho,\mu}(t)\, dt =$$

$$= \int_0^{\infty} [f(xt) - S_n(f; xt)]\, \Phi_{\rho,\mu}(t)\, dt.$$

По теореме Левитана в каждой конечной части вещественной оси имеет место оценка

$$|f(xt) - S_n(f;\ xt)| < \varepsilon, \quad n > N(\varepsilon).$$

Следовательно

$$|F(x) - S_n^{(\rho)}(F;\ x)| \leqslant \varepsilon/\Gamma(\mu),$$

что и требовалось доказать.

Автор выражает глубокую благодарность академику АН Армянской ССР М. М. Джрбашяну за постановку задачи и внимание к работе.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 26.IX.1978

Ռ. Ա. ԲԱՂԻՅԱՆ. Ս. Ն. Բեռնշտեյնի անհավասարության և Բ. Մ. Լևիտանի պոլինոմների ընդհանրացումը *(ամփոփում)*

Հիմնվելով Մ. Մ. Ջրբաշյանի մի շարք ընդհանուր արդյունքների վրա ամբողջ ֆունկցիաների տարբեր լայն դասերի ինտեգրալ ներկայացումների վերաբերյալ, այստեղ ապացուցվում է ինտեգրալ ներկայացում ամբողջ ֆունկցիաների $B_\sigma^{(\rho)}$ $(1<\rho<2,\ \sigma>0)$ *դասի համար, որոնք ունեն աճում և բավարարում են*

$$\sup_{z\in G_\rho} |F(z)| \leqslant M_F < +\infty$$

պայմանին որտեղ G_ρ — *հետևյալ անկյունային տիրույթների միավորումն է*

$$|\mathrm{Arg}\, z| \leqslant \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\rho}\right) \text{ և } |\mathrm{Arg}\, z-\pi| \leqslant \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\rho}\right).$$

Դա թույլ է տալիս ընդհանրացնել Ս. Ն. Բեռնշտեյնի լավ հայտնի անհավասարությունը վերաբերվող $B_\sigma^{(1)}$ *դասին, այսինքն σ-էքսպոնենցիալ տիպի և սահմանափակ իրական առանցքի վրա ամբողջ ֆունկցիայի ածանցյալի գնահատականի մասին։*

R. A. BAGIAN. *Generalized S. N. Bernstein inequalities and B. M. Levitan polinomials* (summary)

Bazing upon a number of general results of M. M. Jrbashian on integral representations of classes of entire functions, integral representations of entire functions meeting the requirment

$$\sup_{z\in G_\rho} |F(z)| \leqslant M_F < +\infty$$

is found, where G_ρ is a colection of angular domains

$$|\mathrm{Arg}\, z| \leqslant \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\rho}\right) \text{and } |\mathrm{Arg}\, z-\pi| \leqslant \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\rho}\right).$$

This enables to generalize a well known Bernstein inequality referring to the class $B_\sigma^{(1)}$, i. e. to evaluation of the derivative of an exponential type entire function bounded on the real axis.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., 1966.
2. *М. М. Джрбашян* и *Р. А. Багиян.* Об интегральных представлениях и мерах, ассоциированных с функциями типа Миттаг—Леффлера, ДАН СССР, 223, № 6, 1975.
3. *М. М. Джрбашян* и *Р. А. Багиян.* Об интегральных представлениях и мерах, ассоциированных с функциями типа Миттаг—Леффлера, Изв. АН Арм. ССР, сер. «Математика», 10, № 6, 1975.
4. *Р. А. Багиян.* Квазиполиномы типа Бернштейна—Хаусдорфа, ассоциированные с функциями типа Миттаг—Леффлера и $<\rho, \mu>$-проблема моментов, ДАН Арм. ССР, 61, № 3, 1975.
5. *С. Н. Бернштейн.* Экстремальные свойства полиномов, ОНТИ, 1937, стр. 134. гл. III, § 10.
6. *Н. И. Ахиезер.* Лекции по теории аппроксимации, М., 1965, гл. 4.
7. *Б. М. Левитан.* Об одном обобщении неравенства С. Н. Бернштейна и H. Bohr'a, ДАН СССР, 15, № 4, 1937.
8. *М. Г. Крейн.* О представлении функций интегралами Фурье—Стилтьеса. Ученые записки Куйбышевского пединститута, вып. 7, 1943.
9. *Б. Я. Левин.* Распределение корней целых функций, ГИТТЛ, 1958, гл. I.