

Г. В. ВИРАБЯН

О СПЕКТРАЛЬНОМ РАЗЛОЖЕНИИ ГОЛОМОРФНОЙ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИИ С НЕПРЕРЫВНЫМ СПЕКТРОМ

В работах [1, 2] нами был рассмотрен одия класс самосопряженных квадратичных операторных пучков при наличии чисто непрерывного спектра.

В настоящей работе изучаются спектральные разложения голоморфной оператор-функции и полиномиального операторного пучка на изолированной части непрерывного спектра, а также устанавливаются формулы построения системы собственных функционалов через резольвенты соответствующих операторов.

§ 1. Спектральное разложение голоморфной оператор-функции

Пусть H —сепарабельное комплексное гильбертово пространство и R —алгебра всех линейных ограниченных операторов, действующих в H .

Пусть G —некоторая односвязная область комплексной плоскости, симметричная относительно вещественной оси. В области G рассмотрим голоморфную оператор-функцию со значениями из R , относительно которой предположим, что она является самосопряженной, т. е. $[L(\lambda)]^* = L(\bar{\lambda})$, $\lambda \in G$.

Спектром $L(\lambda)$ называется множество $\sigma(L)$ таких $\lambda_0 \in G$, для которых $L(\lambda_0)$ необратим.

Определение. Точка $\lambda_0 \in \sigma(L)$ называется точкой непрерывного спектра, если область значений оператора $L(\lambda_0)$ всюду плотна в H , а обратный оператор $L^{-1}(\lambda_0)$ неограничен.

Относительно самосопряженной оператор-функции $L(\lambda)$ сделаем следующие предположения:

1. Спектр $L(\lambda)$ непрерывен и совпадает с некоторым отрезком $[a, b] \subset G$ вещественной оси.

2. $L(a) \ll 0$, $L(b) \gg 0$, т. е. существует такое число $\rho > 0$, что $(L(a)f, f) \leq -\rho(f, f)$, $(L(b)f, f) \geq \rho(f, f)$ для всех $f \in H$.

3. Уравнение $(L(\lambda)f, f) = 0$ для любого отличного от нуля элемента $f \in H$ имеет ровно один, и притом простой, корень в G .

Здесь $(\cdot, \cdot)$ —означает скалярное произведение гильбертова пространства H .

При сделанных выше предположениях 2 и 3 согласно теореме А. И. Вироуба и В. И. Мацаева [3] существует подобный самосо-

прямому оператору $Z \in R$ так, что оператор функции $L(\lambda)$ допускает представление

$$L(\lambda) = L_+(\lambda) \cdot (Z - \lambda I), \quad (\lambda \in G), \quad (1)$$

где $L_+(\lambda)$ голоморфна и обратима в G , а спектр $\sigma(Z) \subset [a, b]$. Из представления (1) сразу вытекает, что если при некотором $c \in [a, b]$ оператор $L(c)$ вполне непрерывен, то собственные векторы оператор-функции $L(\lambda)$, отвечающие собственным значениям из отрезка $[a, b]$, образуют безусловный базис в H .

Лемма 1. При предположениях 1–3 оператор Z имеет непрерывный спектр.

Доказательство. Из представления (1) имеем

$$\begin{aligned} (Z - \lambda I) &= L_+^{-1}(\lambda) \cdot L(\lambda), \\ (Z - \lambda I)^{-1} &= L_+^{-1}(\lambda) \cdot L_+(\lambda) \end{aligned} \quad \lambda \in G, \quad (2)$$

откуда видно, что если $\lambda \in \sigma(Z)$, то область значений оператора $Z - \lambda I$ всюду плотна в H , а оператор $(Z - \lambda I)^{-1}$ неограниченный. Это означает, что точка λ является точкой непрерывного спектра оператора Z . Лемма доказана.

Обозначим через Y самосопряженный оператор, подобный оператору Z , так что

$$\begin{aligned} Z &= T^{-1} Y T; \quad Y = T Z T^{-1}; \\ Z^* &= T^* Y T^{*-1}; \quad Y^* = T^{*-1} Z^* T^*, \end{aligned} \quad (3)$$

где T — обратимый оператор из R .

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} (Z - \lambda I) &= T^{-1} (Y - \lambda I) T, \quad (Y - \lambda I) = T (Z - \lambda I) T^{-1}, \\ (Z^* - \lambda I) &= T^* (Y - \bar{\lambda} I) T^{*-1}, \quad (Y^* - \bar{\lambda} I) = T^{*-1} (Z^* - \bar{\lambda} I) T^*. \end{aligned} \quad (4)$$

Из этих равенств легко усмотреть, что спектр самосопряженного оператора Y совпадает со спектром оператора Z и также является непрерывным. Согласно общей теореме Р. А. Александрияна [4] о спектральном разложении общих самосопряженных операторов, существует всюду плотное в H , инвариантное относительно оператора Y линейное топологическое пространство Ω_Y с более сильной топологией, чем исходная сходимости в H , так что имеет место вложение

$$\Omega_Y \subset H \subset \Omega_Y^*. \quad (5)$$

У оператора Y имеется полная система собственных функционалов $\{t_\lambda\}$ из сопряженного пространства Ω_Y^* и имеет место следующая формула разложения

$$(\varphi, \psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} t_\lambda(\varphi) \cdot \overline{t_\lambda(\psi)} d\rho(\lambda), \quad \varphi, \psi \in \Omega_Y, \quad (6)$$

где $\rho(\lambda)$ — спектральная мера оператора Y .

Рассмотрим в H новое линейное многообразие

$$\Omega_Z = T^* \Omega_Y \quad (\Omega_Y = T^{*-1} \Omega_Z). \quad (7)$$

Сходимость в Ω_Z вводим следующим образом. Мы скажем, что $\psi_n \xrightarrow{\Omega_Z} 0$ ($\psi_n = T^* \varphi_n \in \Omega_Z$), если $\varphi_n = T^{*-1} \psi_n \xrightarrow{\Omega_Y} 0$ при $n \rightarrow \infty$. Ясно, что введенная таким образом топология более сильная, чем сходимость в H и что линейное пространство Ω_Z также всюду плотно расположено в исходном гильбертовом пространстве H . В самом деле, пусть $\psi_n \xrightarrow{\Omega_Z} 0$ ($\psi_n = T^* \varphi_n \in \Omega_Z$, $\varphi_n \in \Omega_Y$), тогда $T^{*-1} \psi_n \xrightarrow{\Omega_Y} 0$ и следовательно $T^{*-1} \psi_n \xrightarrow{H} 0$. Отсюда в силу непрерывности оператора T^* имеем $\psi_n \xrightarrow{H} 0$. Далее, пусть $f = T^* g$ — произвольный элемент из H , где $g \in H$. В силу плотности пространства Ω_Y существует последовательность $\varphi_n \in \Omega_Y$, так что $\varphi_n \xrightarrow{H} g$. Но тогда $\psi_n = T^* \varphi_n \xrightarrow{H} T^* g = f$, $\psi_n \in \Omega_Z$.

Рассмотрим вложение

$$\Omega_Z \subset H \subset \Omega_Z^*, \quad (8)$$

где Ω_Z^* — сопряженное пространство линейных ограниченных функционалов над линейным топологическим пространством Ω_Z .

Построим новую систему функционалов по формуле

$$l_\lambda(\psi) = t_\lambda(T^{*-1} \psi), \quad \psi \in \Omega_Z. \quad (9)$$

Функционалы (9) являются линейными непрерывными функционалами над Ω_Z . Действительно, линейность очевидна, а непрерывность следует из того, что если $\psi_n \xrightarrow{\Omega_Z} 0$, то $T^{*-1} \psi_n \xrightarrow{\Omega_Y} 0$ и следовательно в силу непрерывности функционалов t_λ , $l_\lambda(\psi_n) = t_\lambda(T^{*-1} \psi_n) \rightarrow 0$.

Пространство Ω_Z инвариантно относительно оператора Z^* . В самом деле, пусть $\psi \in \Omega_Z$, тогда из (3) имеем $Z^* \psi = T^* Y T^{*-1} \psi$, где $T^{*-1} \psi \in \Omega_Y$, а из соотношения $Y \Omega_Y \subset \Omega_Y$ и (7) заключаем $Z^* \psi \in \Omega_Z$. Вышестроенные линейные функционалы l_λ являются собственными функционалами для оператора Z . Действительно, для любого $\psi \in \Omega_Z$ имеем

$$l_\lambda((Z^* - \lambda I) \psi) = l_\lambda(T^*(Y - \lambda I) T^{*-1} \psi) = t_\lambda((Y - \lambda I) T^{*-1} \psi) = 0. \quad (10)$$

Здесь мы использовали соотношение (4) и тот факт, что t_λ есть собственный функционал оператора Y .

Рассмотрим новое линейное многообразие $\Omega_L(\lambda)$, которое задается по формуле

$$\Omega_L(\lambda) = L_+^{*-1}(\lambda) \Omega_Z. \quad (11)$$

Мы скажем, что $\varphi_n \xrightarrow{\Omega_L(\lambda)} 0$ ($\varphi_n \in \Omega_L(\lambda)$), если $\psi_n = L_+^*(\lambda) \varphi_n \xrightarrow{\Omega_Z} 0$.

Таким образом, определенная сходимость сильнее чем сходимость гильбертова пространства H . В самом деле, пусть $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{Q}_L(\lambda)} 0$ ($\varphi_n \in \mathcal{Q}_L(\lambda)$), тогда $L_+^* \varphi_n \xrightarrow{H} 0$ и следовательно в силу обратимости оператор-функции $L_+^*(\lambda)$ имеем $\varphi_n \xrightarrow{H} 0$. $\mathcal{Q}_L(\lambda)$ плотно в H . Пусть $f \in H$, тогда существует последовательность $\psi_n \in \mathcal{Q}_Z$, так что $\psi_n \xrightarrow{H} L_+^*(\lambda) f$ и поэтому

$$L_+^{*-1}(\lambda) \psi_n \xrightarrow{H} f \quad (L_+^{*-1}(\lambda) \psi_n \in \mathcal{Q}_L(\lambda)).$$

Покажем, что оператор-функция $L(\lambda)$ отображает линейное пространство $\mathcal{Q}_L(\lambda)$ в линейное пространство $\mathcal{Q}_Z$. Пусть ω — произвольный элемент из пространства $\mathcal{Q}_L(\lambda)$. Тогда в силу (11) $\omega = L_+^{*-1}(\lambda) \psi$, где $\psi \in \mathcal{Q}_Z$. Поскольку $L(\lambda) = (Z^* - \lambda I) L_+^*(\lambda)$, то имеем

$$L(\lambda) \omega = L(\lambda) L_+^{*-1}(\lambda) \psi = (Z^* - \lambda I) \psi \in \mathcal{Q}_Z. \quad (12)$$

Лемма 2. Собственные функционалы l_λ оператора Z являются собственными функционалами для оператор-функции $L(\lambda)$.

Доказательство этой леммы сразу следует из соотношения (12) и из следующего равенства:

$$l_\lambda(L(\lambda) \omega) = l_\lambda((Z^* - \lambda I) \psi) = 0, \quad \omega \in \mathcal{Q}_L(\lambda), \quad \psi \in \mathcal{Q}_Z. \quad (13)$$

Перейдем теперь к установлению формулы разложения для оператор-функции $L(\lambda)$.

Пусть $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{Q}_Z$, тогда

$$\psi_1 = T^* \varphi_1, \quad \varphi_1 = T^{*-1} \psi_1 \in \mathcal{Q}_Y, \quad (14)$$

$$\psi_2 = T^* \varphi_2, \quad \varphi_2 = T^{*-1} \psi_2 \in \mathcal{Q}_Y.$$

Согласно формуле разложения (6) для оператора Y имеем

$$\begin{aligned} (\varphi_1, \varphi_2) &= (T^{*-1} \psi_1, T^{*-1} \psi_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t_\lambda (T^{*-1} \psi_1) \cdot \overline{t_\lambda (T^{*-1} \psi_2)} d\rho(\lambda) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} l_\lambda(\psi_1) l_\lambda(\psi_2) d\rho(\lambda). \end{aligned} \quad (15)$$

Вводим в гильбертовом пространстве H новое скалярное произведение по формуле

$$\langle f, g \rangle = (T^{-1} T^{*-1} f, g), \quad f, g \in H. \quad (16)$$

Тогда формула разложения для оператора Z принимает вид

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} l_\lambda(\psi_1) \cdot \overline{l_\lambda(\psi_2)} d\rho(\lambda), \quad \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{Q}_Z. \quad (17)$$

Поскольку собственные функционалы l_λ оператора Z одновременно являются и собственными функционалами оператор-функции $L(\lambda)$, то полученную формулу (17) можно считать и формулой разложения для

голоморфной оператор-функции $L(\lambda)$. Таким образом, нами установлена следующая

Теорема (о разложении). Если голоморфная самосопряженная оператор-функция $L(\lambda)$ удовлетворяет вышеприведенным условиям 1.—3., то у нее имеется система собственных функционалов $\{l_\lambda\}$, соответствующая части непрерывного спектра $L(\lambda)$ и имеет место формула разложения

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} [l_\lambda(\psi_1) \cdot \overline{l_\lambda(\psi_2)}] d\rho(\lambda), \quad \psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{Q}_Z. \quad (18)$$

Замечание 1. В качестве оператора подобия T , фигурирующего в вышеприведенных построениях, можно взять следующий оператор [3]:

$$T = S_0^{-1/2}, S_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} L^{-1}(\lambda) d\lambda, \quad (19)$$

где $\Gamma \subset G$ — произвольный контур, охватывающий спектр $\sigma(Z)$ оператора Z . При наших предположениях оператор S_0 равномерно положительный. Обратный оператор S_0^{-1} имеет вид [3]

$$S_0^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (Z^* - \lambda I)^{-1} L(\lambda) (Z - \lambda I)^{-1} d\lambda. \quad (20)$$

Замечание 2. Оператор Z , фигурирующий в представлении (1), удовлетворяет операторному уравнению [3]

$$L(Z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} L(\lambda) \cdot (Z - \lambda I)^{-1} d\lambda = 0. \quad (21)$$

§ 2. Построение собственных функционалов голоморфной оператор-функции

Цель настоящего параграфа — получить формулу для построения собственных функционалов голоморфной оператор-функции $L(\lambda)$, рассмотренной в предыдущем параграфе.

Из представления оператор-функции $L(\lambda)$ (1) для резольвенты оператора Z имеем

$$R_\lambda(Z) = (Z - \lambda I)^{-1} = L^{-1}(\lambda) L_+(\lambda), \quad \lambda \in G \setminus [a, b]. \quad (22)$$

Резольвента самосопряженного оператора Y в силу отношения (4) имеет вид

$$R_\lambda(Y) = (Y - \lambda I)^{-1} = T(Z - \lambda I)^{-1} T^{-1} = T R_\lambda(Z) \cdot T^{-1}, \quad \lambda \in G \setminus [a, b]. \quad (23)$$

Собственные функционалы t_λ самосопряженного оператора Y получаются по формуле Р. А. Александрияна [5]

$$t_\lambda(\varphi) = \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{((R_{\lambda+i\tau}(Y) - R_{\lambda-i\tau}(Y))g, \varphi)}{((R_{\lambda+i\tau}(Y) - R_{\lambda-i\tau}(Y))g, g)}, \quad \varphi \in \mathfrak{Q}_Y, \quad (24)$$

g — порождающий элемент оператора Y в H , $\lambda \in \sigma(Z)$.

Предел существует почти всюду по спектральной мере $\rho(\lambda)$ оператора Y .

Пусть теперь $\psi \in \mathcal{Q}_Z$, тогда $\varphi = T^{*-1} \psi \in \mathcal{Q}_T$ и в силу (23), (24) для собственных функционалов (9) оператора Z имеем

$$\begin{aligned} l_\lambda(\psi) &= t_\lambda(T^{*-1}\psi) = \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{(T(R_{\lambda+i\tau}(Z) - R_{\lambda-i\tau}(Z)) T^{-1} g, T^{*-1}\psi)}{(T(R_{\lambda+i\tau}(Z) - R_{\lambda-i\tau}(Z)) T^{-1} g, g)} = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{((R_{\lambda+i\tau}(Z) - R_{\lambda-i\tau}(Z)) g_0, \psi)}{((R_{\lambda+i\tau}(Z) - R_{\lambda-i\tau}(Z)) g_0, g_1)} \psi \in \mathcal{Q}_Z, \end{aligned} \quad (25)$$

где $g_0 = T^{-1}g$, $g_1 = T^*g$.

Подставляя выражение (22) для резольвенты оператора Z в (25), мы получаем следующую формулу для построения собственных функционалов голоморфной оператор-функции $L(\lambda)$

$$\begin{aligned} l_\lambda(\psi) &= \lim_{\tau \rightarrow +0} \times \\ &\times \frac{((L^{-1}(\lambda+i\tau) L_+(\lambda+i\tau) - L^{-1}(\lambda-i\tau) L_+(\lambda-i\tau)) g_0, \psi)}{L^{-1}(\lambda+i\tau) L_+(\lambda+i\tau) - L^{-1}(\lambda-i\tau) L_+(\lambda-i\tau)} g_0, g_1, \psi \in \mathcal{Q}_Z. \end{aligned} \quad (26)$$

§ 3. Спектральное разложение полиномиального операторного пучка

Рассмотрим полиномиальный операторный пучок

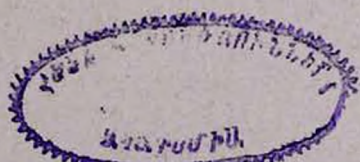
$$L(\lambda) = \lambda^n A_n + \lambda^{n-1} A_{n-1} + \dots + \lambda A_1 + A_0, \quad (27)$$

где A_i ($i = 0, 1, \dots, n$) — линейные ограниченные операторы из R , причем $A_n = I$ — единичный оператор. Полиномиальный пучок $L(\lambda)$ есть частный случай голоморфной оператор-функции и если он удовлетворяет условиям 1—3 первого параграфа, то для него выполняются вышеприведенные построения и более того, оказывается, что в этом случае голоморфную оператор-функцию $L_+(\lambda)$, которая фигурирует в представлении (1), можно написать в явном виде через оператор Z , а именно

$$L_+(\lambda) = - \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^j \lambda^{j-m} A_{n-m+1} Z^{n-j}. \quad (28)$$

Однако специфический вид полиномиального пучка позволяет более детально изучить спектральное разложение по собственным функционалам. Полиномиальный пучок $L(\lambda)$, при его линейаризации, порождает матричный оператор

$$N = \begin{pmatrix} -A_{n-1} - A_{n-2} \dots - A_1 - A_0 \\ I & O & \dots & O & O \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ O & O \dots & I & O \end{pmatrix}, \quad (29)$$



который действует в ортогональной сумме n копий исходного гильбертова пространства H

$$\hat{H} = \underbrace{H \oplus \dots \oplus H}_n. \quad (30)$$

Скалярное произведение в $\hat{H}$ определяется через скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ — пространства H по формуле

$$\begin{aligned} \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle &= (u_1, v_1) + \dots + (u_n, v_n); \\ \hat{u} &= \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad \hat{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \hat{H}. \end{aligned} \quad (31)$$

Между спектральными свойствами полиномиального пучка $L(\lambda)$ у матричного оператора N имеется тесная связь. В частности, существование полной системы корневых векторов оператора N в $\hat{H}$ эквивалентно n -кратной полноте системы собственных и присоединенных элементов полиномиального пучка в гильбертовом пространстве H .

Мы скажем, что полиномиальный операторный пучок $L(\lambda)$ имеет чисто непрерывный спектр, если спектр матричного оператора N в гильбертовом пространстве $\hat{H}$ является чисто непрерывным.

Относительно пучка $L(\lambda)$ сделаем следующие предположения:

Условие 1. Линейные ограниченные операторы $A_i (i = 0, 1, \dots, n-1)$ являются самосопряженными операторами в H .

Условие 2. Существуют вещественные числа $\gamma_0 > \gamma_1 > \dots > \gamma_n$ такие, что $(-1)^k L(\gamma_k) (k = 0, 1, \dots, n)$ — равномерный положительный оператор.

Условие 3. Пучок $L(\lambda)$ имеет чисто непрерывный спектр.

При сделанных предположениях 1–2 оператор N оказывается подобным самосопряженному оператору $\bar{N}$. Это означает, что существует линейный ограниченный обратимый оператор S и самосопряженный в $\hat{H}$ оператор $\bar{N}$, так что

$$N = S^{-1} \bar{N} S, \quad \bar{N} = SNS^{-1}. \quad (32)$$

Повторяя те же построения, что уже было сделано в § 1, мы установим следующую теорему.

Теорема 2. При выполнении условий 1–3 существует инвариантное относительно матричного оператора N , состоящего из всюду плотного множества векторов $\hat{H}$, линейное топологическое пространство $\hat{\Omega}_N$, сходимость в котором влечет сходимость в $\hat{H}$, такое что в сопряженном пространстве $\hat{\Omega}_N^*$ у матричного опе-

ратора N имеется полная система собственных функционалов $\{l_\lambda\}$ и имеет место формула разложения

$$[\hat{\varphi}, \hat{\psi}] = \int_{-\infty}^{+\infty} l_\lambda(\hat{\varphi}) \cdot \overline{l_\lambda(\hat{\psi})} d\rho(\lambda), \quad \hat{\varphi}, \hat{\psi} \in \hat{\mathcal{Q}}_N, \quad (33)$$

где $[\cdot, \cdot]$ означает новое скалярное произведение, заданное в форме

$$[\hat{\varphi}, \hat{\psi}] = \langle S^{-1} \hat{\varphi}, S^{-1} \hat{\psi} \rangle, \quad \hat{\varphi}, \hat{\psi} \in \hat{\mathcal{Q}}_N. \quad (34)$$

Перейдем теперь к построению спектрального разложения полиномиального пучка $L(\lambda)$. Обозначим через $\mathcal{Q}_k$ ($k=1, \dots, n$) множество k -ых компонент всевозможных векторов из линейного пространства $\hat{\mathcal{Q}}_N$. Очевидно, что $\mathcal{Q}_k$ ($k=1, \dots, n$) является линейным многообразием в гильбертовом пространстве H .

Положим

$$\hat{\mathcal{Q}}_k = \left\{ \hat{\varphi}_k : \hat{\varphi}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \varphi_k \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi_k \in \mathcal{Q}_k \right\} \quad (k=1, \dots, n). \quad (35)$$

Относительно линейного пространства $\hat{\mathcal{Q}}_N$ предположим, что оно представляется как ортогональная сумма подпространств $\hat{\mathcal{Q}}_k$ ($k=1, \dots, n$)

$$\hat{\mathcal{Q}}_N = \hat{\mathcal{Q}}_1 \oplus \dots \oplus \hat{\mathcal{Q}}_n. \quad (\text{Условие 4}). \quad (36)$$

В пространстве $\mathcal{Q}_1$ определим сходимость следующим образом. Мы скажем что

$$\varphi_1^{(m)} \rightarrow 0 \text{ в } \mathcal{Q}_1 (\varphi_1^{(m)} \in \mathcal{Q}), \text{ если } \hat{\varphi}_k^{(m)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \varphi_k \\ \vdots \end{pmatrix} \rightarrow 0$$

в $\hat{\mathcal{Q}}_N$ ($k=1, \dots, n$) при $n \rightarrow \infty$. В векторе $\hat{\varphi}_k^{(m)}$ элемент $\varphi_k^{(m)}$ стоит на k -ой строке. Пространство $\mathcal{Q}_1$ с такой сходимостью обозначим через $\mathcal{Q}_L$. Сходимость в $\mathcal{Q}_L$ влечет сходимость в H и поэтому имеет место оснащение

$$\mathcal{Q}_L \subset H \subset \mathcal{Q}_L^*, \quad (37)$$

где $\mathcal{Q}_L^*$ — сопряженное пространство линейных непрерывных функционалов над $\mathcal{Q}_L$.

Сопряженный к N оператор N^* в гильбертовом пространстве H имеет вид

$$N^* = \begin{pmatrix} -A_{n-1} & I & O & \dots & O & O \\ -A_{n-2} & O & I & \dots & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -A_1 & O & O & \dots & O & I \\ -A_0 & O & O & \dots & O & O \end{pmatrix}. \quad (38)$$

В самом деле, имеет место равенство

$$\begin{aligned} \langle N^* \hat{\varphi}, \hat{\psi} \rangle &= (-A_{n-1} \varphi_1 - A_{n-2} \varphi_2 - \dots - A_1 \varphi_{n-1} - A_0 \varphi_n, \psi_1) + \\ &+ (\varphi_1, \psi_2) + \dots + (\varphi_{n-1}, \psi_n) = (\varphi_1, -A_{n-1} \psi_1 + \psi_2) + \\ &+ (\varphi_2, -A_{n-2} \psi_1 + \psi_3) + \dots + (\varphi_{n-1}, -A_1 \psi_1 + \psi_n) + (\varphi_n, -A_0 \psi_1) = \\ &= \langle \hat{\varphi}, N^* \hat{\psi} \rangle, \end{aligned} \quad (39)$$

для любых $\hat{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}$ и $\hat{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}$ из H .

Между линейными пространствами $\mathcal{Q}_k$ ($k=1, \dots, n$) имеет место следующие включения:

$$\mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}_1 \supseteq \mathcal{Q}_2 \supseteq \dots \supseteq \mathcal{Q}_n. \quad (40)$$

Действительно, пусть $\psi \in \mathcal{Q}_n$, тогда вектор $\hat{\psi} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \psi \end{pmatrix} \in \hat{\mathcal{Q}}_N$ и следова-

тельно в силу инвариантности $\hat{\mathcal{Q}}_N$ относительно оператора N^* , вектор

$$N^* \hat{\psi} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \psi \\ 0 \end{pmatrix} \in \hat{\mathcal{Q}}_N. \text{ откуда следует } \psi \in \mathcal{Q}_{n-1}. \text{ Далее, имеем } N^{*2} \hat{\psi} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \psi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{Q}_N, \psi \in \mathcal{Q}_{n-2}. \text{ Продолжая этот процесс, из } N^{*n-1} \hat{\psi} = \begin{pmatrix} \psi \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{Q}_N$$

окончательно получим $\psi \in \mathcal{Q}_1$.

Покажем, что линейное пространство $\mathcal{Q}_1$ инвариантно относительно полиномиального операторного пучка $L(\lambda)$. Пусть $\varphi \in \mathcal{Q}_1$, тогда вектор

$$\hat{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \hat{\mathcal{Q}}_N \text{ и следовательно}$$

$$N^* \hat{\varphi} = \begin{pmatrix} -A_{n-1} \varphi \\ -A_{n-2} \varphi \\ \vdots \\ -A_1 \varphi \\ -A_0 \varphi \end{pmatrix} \in \hat{\mathcal{Q}}_N. \quad (41)$$

Отсюда в силу включений (40) заключаем

$$\begin{aligned} A_{n-1} \varphi \in \mathcal{Q}_L, A_{n-2} \varphi \in \mathcal{Q}_2 \subset \mathcal{Q}_L, \dots \\ \dots, A_1 \varphi \in \mathcal{Q}_{n-1} \subset \mathcal{Q}_L, A_0 \varphi \in \mathcal{Q}_n \subset \mathcal{Q}_L. \end{aligned} \quad (42)$$

Таким образом, пространство $\mathcal{Q}_L$ инвариантно относительно оператора A_k ($k=0, 1, \dots, n$) и следовательно инвариантно относительно операторного пучка $L(\lambda)$.

Определение. Отличный от нулевого линейный непрерывный функционал t_λ из $\mathcal{Q}_L^*$ называется собственным функционалом, соответствующим собственному значению λ_0 для полиномиального операторного пучка, если для любого элемента $\varphi \in \mathcal{Q}_L$ выполняется соотношение

$$t_{\lambda_0}(L(\lambda_0) \varphi) = 0. \quad (43)$$

Относительно линейного многообразия $\hat{\mathcal{Q}}_N$, кроме (36), сделаем еще одно предположение, что все $\mathcal{Q}_k$ ($k=1, \dots, n$) состоят из одних и тех же элементов, т. е. в соотношениях (40) имеет место знак равенства, а именно предположим, что

$$\mathcal{Q}_L = \mathcal{Q}_1 = \dots = \mathcal{Q}_n \quad (\text{Условие 5}).$$

Пусть φ — произвольный элемент из $\mathcal{Q}_L$, тогда вектор $\hat{\varphi}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \varphi \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$,

для которого элемент φ является k -ой компонентой, принадлежит $\hat{\mathcal{Q}}_N$. Рассмотрим функционалы, заданные по формуле

$$t_\lambda^{(k)}(\varphi) = l_\lambda(\hat{\varphi}_k) \quad (k=1, \dots, n), \quad \varphi \in \mathcal{Q}_L, \quad \hat{\varphi}_k \in \hat{\mathcal{Q}}_N. \quad (44)$$

Здесь l_λ — собственный функционал матричного оператора N .

Таким образом, построенный функционал $t_\lambda^{(k)}$ ($k=1, \dots, n$) является линейным непрерывным (в смысле топологии $\mathcal{Q}_L$) функционалом над $\mathcal{Q}_L$. В самом деле, для любых элементов φ и ψ из $\mathcal{Q}_k$ ($k=1, \dots, n$) и произвольных чисел α и β имеем

$$\begin{aligned} t_\lambda^{(k)}(\alpha\varphi + \beta\psi) = l_\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \alpha\varphi + \beta\psi \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \cdot l_\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \varphi \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot l_\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \psi \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \cdot t_\lambda^{(k)}(\varphi) + \beta t_\lambda^{(k)}(\psi) \\ (k=1, \dots, n). \end{aligned} \quad (45)$$

Далее, если

$$\varphi^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{Q}_L} 0 \quad (\varphi^{(n)} \in \mathcal{Q}_L), \quad \text{то} \quad \hat{\varphi}_k^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \varphi^{(n)} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\hat{\mathcal{Q}}_N} \hat{0} \quad (\hat{\varphi}_k^{(n)} \in \hat{\mathcal{Q}}_N)$$

Таким образом, вышепостроенные функционалы (44) являются собственными функционалами полиномиального операторного пучка $L(\lambda)$ из пространства $\mathfrak{Q}_L$.

Пусть теперь $\{\varphi_j\}_1^n$ и $\{\psi_j\}_1^n$ — произвольные наборы из n элементов линейного пространства $\mathfrak{Q}_L$. Тогда векторы

$$\hat{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} \text{ и } \hat{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}$$

принадлежат пространству $\mathfrak{Q}_N$. Поэтому на основании формулы разложения (33) выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} (\varphi_1, \psi_1) + \dots + (\varphi_n, \psi_n) &= \langle \hat{\varphi}, \hat{\psi} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} L_\lambda(\hat{\varphi}) \cdot \overline{L_\lambda(\hat{\psi})} d\rho(\lambda) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[L_\lambda \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + L_\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + L_\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} \right] \left[\overline{L_\lambda \begin{pmatrix} \psi_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}} + \overline{L_\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}} + \right. \\ &\quad \left. + \dots + \overline{L_\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}} \right] d\rho(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^n L_\lambda(\hat{\varphi}_k) \cdot \sum_{k=1}^n \overline{L_\lambda(\hat{\psi}_k)} d\rho(\lambda) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^n t_\lambda^{(k)}(\varphi_k) \cdot \sum_{k=1}^n t_\lambda(\psi_k) d\rho(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n t_\lambda^{(i)}(\varphi_i) \cdot \overline{t_\lambda^{(j)}(\psi_j)} d\rho(\lambda). \end{aligned} \quad (51)$$

Таким образом, мы установили справедливость следующей теоремы.

Теорема 3. Если выполняются условия 1—5, то существует инвариантное относительно полиномиального операторного пучка $L(\lambda)$ линейное топологическое пространство $\mathfrak{Q}_L$, состоящее из всюду плотного множества элементов из H , сходимости в котором влечет сходимость в H , такое, что у полиномиального пучка имеются системы собственных функционалов $\{t_\lambda^{(k)}\}$ ($k=1, \dots, n$) из сопряженного пространства и имеет место следующая формула разложения:

$$(\varphi_1, \psi_1) + \dots + (\varphi_n, \psi_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} t_\lambda^{(i)}(\varphi_i) \cdot \overline{t_\lambda^{(j)}(\psi_j)} d\rho(\lambda), \quad (52)$$

где φ_i и ψ_i ($i=1, \dots, n$) — произвольные элементы из линейного пространства $\mathfrak{Q}_L$.

Замечание. При выполнении условий 1—4 системой собственных функционалов для полиномиального операторного пучка является $t_k^{(1)} (k=1)$, и в этом случае формула разложения (52) принимает вид

$$(\varphi_1, \psi_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} t_k^{(1)}(\varphi_1) \cdot \overline{t_k^{(1)}(\psi_1)} d\rho(\lambda) \quad (53)$$

для произвольных элементов φ_1, ψ_1 из Ω_L .

§ 4. Построение собственных функционалов полиномиального операторного пучка

Как уже отмечалось в § 3 между спектральными свойствами полиномиального операторного пучка $L(\lambda)$ и матричного оператора N имеется тесная связь. Эту связь хорошо усмотреть из соотношения [6]

$$N - \lambda \tilde{I} = B(\lambda) \operatorname{diag} (L(\lambda), I, \dots, I) C(\lambda). \quad (54)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{I} &= [\delta_{jk}]_{j,k=1}^n, \quad B(\lambda) = [B_{jk}(\lambda)]_{j,k=1}^n, \quad C(\lambda) = [C_{jk}(\lambda)]_{j,k=1}^n, \\ B_{11}(\lambda) &= -I, \quad B_{1k}(\lambda) = -\sum_{j=k-1}^n \lambda^{j-k+1} A_j \quad (k \geq 1), \quad B_{jk}(\lambda) = I \quad (j+k=n+2), \end{aligned} \quad (55)$$

$$B_{jk}(\lambda) = 0 \quad (j \geq 1, j+k \neq n+2), \quad C_{jk} = I \quad (j+k=n+1),$$

$$C_{jk}(\lambda) = -\lambda I \quad (j+k=n+2), \quad C_{jk}(\lambda) = 0 \quad (j+k \neq n+1, n+2).$$

Матричные операторы $B(\lambda)$ и $C(\lambda)$ обратимы при всех комплексных λ . Поэтому вне спектра $\sigma(L)$, который совпадает со спектром $\sigma(N)$ из (54), для резольвенты оператора N имеем

$$R_\lambda(N) = (N - \lambda \tilde{I})^{-1} = C^{-1}(\lambda) \operatorname{diag} (L^{-1}(\lambda), I, \dots, I) B^{-1}(\lambda). \quad (56)$$

Оператор N подобен самосопряженному оператору

$$\tilde{N} = S \cdot N \cdot S^{-1}. \quad (57)$$

Между резольвентами этих операторов имеется связь

$$R_\lambda(\tilde{N}) = S R_\lambda(N) S^{-1}. \quad (58)$$

Полная система собственных функционалов оператора $\tilde{N}$ получается по формуле Р. А. Александрияна [5]

$$T_\lambda(\hat{\varphi}) = \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{((R_{\lambda+\tau}(\tilde{N}) - R_{\lambda-\tau}(\tilde{N})) \hat{g}, \hat{\varphi})}{((R_{\lambda+\tau}(\tilde{N}) - R_{\lambda-\tau}(\tilde{N})) \hat{g}, \hat{g})}, \quad \hat{\varphi} \in \dot{\Omega}_{\tilde{N}}. \quad (59)$$

Отсюда для полной системы собственных функционалов $\{l_\lambda\}$ матричного оператора N будем иметь

$$L_i(\hat{\psi}) = T_i(S^{-1}\hat{\psi}) = \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{((R_{\lambda+i\tau}(N) - R_{\lambda-i\tau}(N)) \hat{g}_0, \hat{\psi})}{((R_{\lambda+i\tau}(N) - R_{\lambda-i\tau}(N)) \hat{g}_0, \hat{g}_1)}, \quad \hat{\psi} \in \hat{\mathcal{Q}}_N, \quad (60)$$

где $\hat{g}_0 = S^{-1}\hat{g}$, $\hat{g}_1 = S^*\hat{g}$.

Из (44), (56) и (60) для построения семейства собственных функционалов полиномиального операторного пучка $L(i)$ окончательно получаем следующую формулу:

$$t^{(k)}_i(\varphi) = \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{([C^{-1}(\lambda+i\tau) \operatorname{diag}(L^{-1}(\lambda+i\tau), I, \dots, I) B^{-1}(\lambda+i\tau) - \\ - C^{-1}(\lambda-i\tau) \operatorname{diag}(L^{-1}(\lambda-i\tau), I, \dots, I) B^{-1}(\lambda-i\tau)] \hat{g}_0, \hat{\varphi}_k) - \\ - (C^{-1}(\lambda-i\tau) \operatorname{diag}(L^{-1}(\lambda-i\tau), I, \dots, I) B^{-1}(\lambda-i\tau)] \hat{g}_0, \hat{g}_1)}, \quad (61)$$

где φ — произвольный элемент из $\mathcal{Q}_L$, вектор $\hat{\varphi}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \varphi \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (φ стоит в k -ой

строке) из $\hat{\mathcal{Q}}_N$, $\hat{g}_0 = S^{-1}\hat{g}$, $\hat{g}_1 = S^*\hat{g}$.

Ереванский государственный
университет

Поступила 5.XII.1978

Գ. Վ. ՎԻՐԱԲՅԱՆ. Անընդհատ սպեկտրով ճշգրտորեն օպերատոր ֆունկցիայի սպեկտրալ վերլուծության մասին (ամփոփում)

Ներկա աշխատանքում ինքնահամալուծ հոլոմորֆ օպերատոր-ֆունկցիաների և բազմանդամային օպերատորային փնջերի որոշակի դասերի համար հետազոտվում են ըստ սեփական ֆունկցիոնալների սպեկտրալ վերլուծության հարցերը անընդհատ սպեկտրի մեկուսացված մասի համար:

Ստացված են նաև բանաձևեր համապատասխան օպերատորների ռեզոլվենտաների միջոցով սեփական ֆունկցիոնալների լրիվ համակարգը կառուցելու համար:

G. V. VIRABIAN. On spectral decomposition of a holomorphic operator-function with continuous spectrum (summary)

The paper studies some questions of spectral decomposition by eigenfunctionals of certain classes of operator functions and operator bundles. Formulae for construction of a complete system of eigenfunctionals in terms of resolvent kernels of the operators are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. В. Вирабян. О квадратичных операторных пучках с непрерывным спектром. Изв. АН Арм. ССР, «Математика», XII, № 6, 1977.
2. Г. В. Вирабян. О спектре одного класса самосопряженных квадратичных операторных пучков, ДАН Арм. ССР,

3. А. И. Вировуб, В. И. Мацаев. О спектральных свойствах одного класса самосопряженных оператор-функций, Функци. анализ и его прилож., 8, вып. 1, 1974.
4. Р. А. Александриян. Об одном способе построения полной системы собственных функционалов самосопряженных операторов с лебеговым спектром, ДАН Арм. ССР, X, № 5, 1965.
5. Р. А. Александриян. О спектральном разложении произвольных самосопряженных операторов по собственным функционалам, ДАН СССР, 162, № 1, 1965.
6. А. С. Маркус, И. В. Мереуца. О полном наборе корней операторного уравнения соответствующего полиномиальному операторному пучку, Изв. АН СССР, сер. матем., 37, 1973.