ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XV, № 3, 1980 Математика

М. Ю. ХОДЖАЯНЦ

О СТРУКТУРЕ e-СТЕПЕНЕЙ

В настоящей работе рассматриваются вопросы, связанные с разбиением произвольных e-степеней на степени неразрешимости. Поскольку e-сводимость является самой общей из сводимостей по перечислимости, а T-сводимость—самой общей из сводимостей по разрешимости, то вводится понятие eT-сводимости—конъюнкции этих сводимостей, которое будет самым общим для сводимостей, являющихся одновременно и сводимостями по перечислимости и сводимостями по разрешимости. Поэтому изучается структура произвольных e-степеней относительно eT-сводимости. Рассматриваются также вопросы разбиения e-степеней относительно более сильной сводимости по перечислимости—pc-сводимости. Все эти сводимости, за исключением eT-сводимости, изучаются в [1] и [2]. В дальнейшем мы будем пользоваться обозначениями, принятыми в [1].

Пусть φ и W—стандартные нумерации частичнорекурсивных функций и рекурсивно перечислимых множеств, φ^X—стандартная нумерация частичнорекурсивных функций с оракулом X, а D—каноническая нумерация конечных множеств [1].

Рассмотрим следующие отношения на множествах:

$A \leqslant_c B <-> \exists f$—общерекурсивная функция $\forall x\,(x \in A <-> D_{f(x)} \subseteq B)$,

$A \leqslant_T B <-> \exists z\ (c_A = \varphi_z^B)$, где c_A—характеристическая функция множества A.

$$A \leqslant_{pc} B <-> \exists z \forall x\,(x \in A <-> !\ \varphi_z(x) \& D_{\varphi_z(x)} \subseteq B),$$

$$A \leqslant_e B <-> \exists z \forall x\,(x \in A <-> \exists u\,(\langle x, u\rangle \in W_z \ \&\ D_u \subseteq B)),$$

$$A \leqslant_{eT} B <-> A \leqslant_e B \ \&\ A \leqslant_T B.$$

Все эти отношения мы будем называть сводимостями. Пусть a—некоторая сводимость. Тогда

$$A \equiv_a B <-> A \leqslant_a B \ \&\ B \leqslant_a A$$

и множество $d_a(A) = \{B | B \equiv_a A\}$ называется a-степенью множества A.

Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$—произвольные a-степени. Тогда

$$\mathbf{a} \leqslant_a \mathbf{b} <-> \exists A \exists B\,(A \in \mathbf{a} \ \&\ B \in \mathbf{b} \ \&\ A \leqslant_a B).$$

Через $\mathbf{O}$ мы будем обозначать e-степень множества $\varnothing$. Очевидно, что $\mathbf{O}$ совпадает с множеством всех рекурсивно перечислимых множеств. Заметим, что для произвольных множеств A и B

$$A \leqslant_e B \supset A \leqslant_{eT} B,$$

$$A \leqslant_e B \supset A \leqslant_{pc} \bar{B},$$

$$A \leqslant_{pc} B \supset A \leqslant_e B.$$

Определение 1. е-степень называется тотальной, если она содержит график некоторой всюду определенной функции.

Определение 2. e-степень $\mathbf{a}$ называется квазиминимальной, если $\mathbf{a} \neq \mathbf{O} \& \forall \mathbf{b}$ ($\mathbf{b}$ — тотальная e-степень $\& \mathbf{b} \leqslant_e \mathbf{a} \supset \mathbf{b} = \mathbf{O}$). Очевидно, что любая квазиминимальная e-степень не является тотальной.

Пусть $\Phi_z[B] = \{x | \exists u (\langle x, u \rangle \in W_z \& D_u \subseteq B)\}$ и

$$\Psi_z[B] = \{x | ! \varphi_z(x) \& D_{\varphi_z(x)} \subseteq B\}, \text{ т. е.}$$

$$A \leqslant_e B \Longleftrightarrow \exists z (A = \Phi_z[B]) \text{ и } A \leqslant_{pc} B \Longleftrightarrow \exists z (A = \Psi_z[B]).$$

Отметим, что произвольная e-степень $\mathbf{a}$ содержит наибольшую eT— и pc-степень. Таковыми являются eT— и pc-степени множества

$$\{\langle x, y \rangle | y \in \Phi_x[A]\}, \text{ где } A \in \mathbf{a}.$$

Предложение 1. а) $\mathbf{a}$— *тотальная е-степень* $\Longleftrightarrow \exists A (A \in \mathbf{a} \& \bar{A} \leqslant_e A)$.

в) *Пусть* $\mathbf{a}$—*тотальная е-степень,* $A \in \mathbf{a}$ *и* $\bar{A} \leqslant_e A$. *Тогда* $\forall B (B \in \mathbf{a} \Longleftrightarrow A \leqslant_e B \& B$ *рекурсивно перечислимо относительно* A).

Доказательство очевидно.

Предложение 2. *Любая тотальная е-степень содержит наименьшую* eT*-степень.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{a}$ — тотальная е-степень. Тогда существует множество $A \in \mathbf{a}$ такое, что $\bar{A} \leqslant_e A$. Нетрудно проверить, что $d_e(A)$ и будет искомой eT-степенью.

Предложение 3. *Любая тотальная е-степень содержит бесконечную антицепь* eT*-степеней**.

Доказательство проводится с помощью небольшого изменения в доказательстве теоремы Мучника—Фридберга (см., например, [1]) и предложения 1.

Предложение 4. *Множество всех* eT*-степеней, содержащихся в произвольной тотальной е-степени, является плотным.*

Это утверждение доказывается с помощью небольшого изменения в доказательстве теоремы Сакса о плотности множества рекурсивно перечислимых T-степеней (см., например, [3]) и предложения 1.

Теорема 1. *Существует квазиминимальная е-степень, содержащая наименьшую с-степень.*

Доказательство. Мы построим множество A, удовлетворяющее следующим условиям:

---

* Определение понятия „антицепь" имеется в [2] на стр. 6.

1. $d_e(A)$ — квазиминимальная e-степень,

2. $\forall B\,(B \equiv_e A \supset A \leqslant_c B)$.

Построение множества A будет производиться по шагам. Параллельно мы будем строить вспомогательное множество B такое, что $B \subseteq \overline{A}$. Для любого шага s множества A_s и B_s, полученные на этом шаге, должны быть рекурсивными и удовлетворять условиям

$$A_{s-1} \subseteq A_s \text{ и } B_{s-1} \subseteq B_s.$$

Шаг 0. $A_0 = B_0 = \varnothing$. Переходим к шагу 1.

Шаг $3n+1$. Пусть $n = \langle k, s \rangle$. Проверяем, выполняется ли условие:

$$\exists m \exists l\,(m \bar{\in} A_{3n}\ \&\ D_l \cap B_{3n} = \varnothing\ \&\ m \in \Phi_k \Phi_s [D_l]\ \&\ m \bar{\in} D_l). \tag{1}$$

Пусть m_0 и l_0 — наименьшие числа, удовлетворяющие этому условию. Тогда $A_{3n+1} = A_{3n} \cup D_{l_0}$, $B_{3n+1} = B_{3n} \cup \{m_0\}$ и переходим к следующему шагу.

Если таких чисел не существует, т. е.

$$\forall m \forall l\,(m \bar{\in} A_{3n}\ \&\ D_l \cap B_{3n} = \varnothing\ \&\ m \in \Phi_k \Phi_s [D_l] \supset m \in D_l), \tag{2}$$

то проверяем, выполняется ли условие:

$$\exists p\, \overset{\infty}{\forall} t\,(D_p \cap A_{3n} = \varnothing\ \&\ (t \bar{\in} A_{3n} \supset \forall u\,(t \in \Phi_k \Phi_s [D_u] \supset$$
$$\supset D_u \cap (D_p \cup B_{3n}) \neq \varnothing))). \tag{3}$$

Пусть p_0 — наименьшее число, удовлетворяющее этому условию. Тогда $A_{3n+1} = A_{3n}$, $B_{3n+1} = B_{3n} \cup D_{p_0}$ и переходим к следующему шагу.

Если такого числа не существует, т. е.

$$\forall p\, \overset{\infty}{\exists} t\,(D_p \cap A_{3n} = \varnothing \supset (t \bar{\in} A_{3n}\ \&\ \exists u\,(t \in \Phi_k \Phi_s [D_u]\ \&$$
$$\&\ D_u \cap (D_p \cup B_{3n}) = \varnothing))), \tag{4}$$

то выбираем рекурсивно перечислимую последовательность $\{\langle z_l, u_l \rangle\}$ со следующими свойствами:

1. $z_l \in \Phi_k \Phi_s [D_{u_l}]$,

2. $z_l \bar{\in} A_{3n}$,

3. $D_{u_l} \cap B_{3n} = \varnothing$,

4. $z_l \in D_{u_l}$,

5. $\max D_{u_l} < \min D_{u_{l+1}}$.

Существование такой последовательности следует из (2) и (4). В этом случае положим $A_{3n+1} = A_{3n} \cup (\bigcup_l D_{u_l} - \{z_0, z_1, \cdots\})$,

$$B_{3n+1} = N - A_{3n} \cup (\bigcup_l D_{u_l}).$$

Так как множества $\{z_0, z_1, \cdots\}$, $\bigcup_i D_{u_i}$, A_{3n} и B_{3n} рекурсивны, то и множества A_{3n+1} и B_{3n+1} будут рекурсивными. Переходим к шагу $3n+2$.

Шаг $3n+2$. Пусть m — наименьшее число, не принадлежащее $A_{3n+1} \cup B_{3n+1}$.

Если $m \bar{\in} W_n$, то $A_{3n+2} = A_{3n+1} \cup \{m\}$, $B_{3n+2} = B_{3n+1}$ и переходим к шагу $3n+3$.

Если $m \in W_n$, то $A_{3n+2} = A_{3n+1}$. $B_{3n+2} = B_{3n+1} \cup \{m\}$ и переходим к шагу $3n+3$.

Шаг $3n+3$. Проверяем, выполняется ли условие:

$$\exists l\,(D_l \cap B_{3n+2} = \varnothing \;\&\; \Phi_n[D_l] \text{—неоднозначно}). \tag{5}$$

Пусть l_0 — наименьшее число, удовлетворяющее этому условию.

Тогда $A_{3n+3} = A_{3n+2} \cup D_{l_0}$, $B_{3n+3} = B_{3n+2}$ и переходим к следующему шагу.

Если такого числа не существует, то $A_{3n+3} = A_{3n+2}$, $B_{3n+3} = B_{3n+2}$ и переходим к шагу $3n+4$.

Пусть $A = \bigcup_i A_i$. Покажем, что

а) A не рекурсивно перечислимо. Действительно, для каждого n на шаге $3n+2$ выполняется условие: $m \in W_n \iff m \bar{\in} A_{3n+2}$, где m — наименьшее число, не принадлежащее $A_{3n+1} \cup B_{3n+1}$.

в) $d_e(A)$ — квазиминимальная степень. Так как множество A не является рекурсивно перечислимым, то нам нужно только показать, что для любого n

$\Phi_n[A]$ — всюду определенное, однозначное $\supset \Phi_n[A]$—рекурсивно перечислимо. (6)

Рассмотрим шаг $3n+3$. Если выполняется условие (5), то множество $\Phi_n[A_{3n+3}]$, а, следовательно, и множество $\Phi_n[A]$ окажется неоднозначным. Таким образом, условие (6) выполняется.

Пусть на шаге $3n+3$ условие (5) не выполняется и существует всюду определенная функция f такая, что $\Phi_n[A] = \tau f$. Покажем, что в этом случае $\Phi_n[A]$—рекурсивно перечислимо. Заметим, что $\Phi_n[\overline{B}_{3n+2}]$—однозначное множество. В самом деле, допустим противное, т. е. для некоторых $x, y_1, y_2\,(y_1 \neq y_2)$ $\langle x, y_1\rangle \in \Phi_n[\overline{B}_{3n+2}]$ и $\langle x, y_2\rangle \in \Phi_n[\overline{B}_{3n+2}]$. Тогда в силу непрерывности Φ_n, существуют такие конечные множества $D_k \subseteq \overline{B}_{3n+2}$ и $D_m \subseteq \overline{B}_{3n+2}$, что $\langle x, y_1\rangle \in \Phi_n[D_k]$ и $\langle x, y_2\rangle \in \Phi_n[D_m]$. Но тогда, в силу монотонности Φ_n, $\Phi_n[D_k \cup D_m]$— неоднозначное множество, причем $(D_k \cup D_m) \cap B_{3n+2} = \varnothing$, что невозможно, так как условие (5) не выполняется. Итак, $\Phi_n[\overline{B}_{3n+2}]$—однозначное множество. Так как $B_{3n+2} \subseteq \overline{A}$, то $A \subseteq \overline{B}_{3n+2}$ и, следовательно, $\tau f = \Phi_n[A] \subseteq \Phi_n[\overline{B}_{3n+2}]$. Но, очевидно, график всюду определенной функции f не имеет однозначных надмножеств, отличных от τf, поэтому $\Phi_n[\overline{B}_{3n+2}] = \tau f = \Phi_n[A]$. Однако B_{3n+2}— рекурсивное множество, поэтому $\overline{B}_{3n+2}$ также рекурсивно и, следовательно, $\Phi_n[A]$ — рекурсивно перечислимо. Таким образом, и в этом случае условие (6) выполняется

c) $\forall C\,(C \equiv_e A \supset A \leqslant_c C)$. Пусть $C \equiv_e A$, т. е.

$$\exists s\, \exists k\, (C = \Phi_s[A]\ \&\ A = \Phi_k \Phi_s[A]).$$

В этом случае на шаге $3n+1$ ($n = \langle k, s\rangle$) выполняются условия (2) и (4).

Действительно, если выполняется условие (1), то $A \neq \Phi_k\Phi_s[A]$. Допустим выполняется условие (3). Тогда $\Phi_k\Phi_s[A] - A_{3n} =_* \varnothing$ ($A =_* B$ означает, что симметрическая разность множеств A и B конечна). Так как $\Phi_k\Phi_s[A] = A$ и $A_{3n} \subseteq A$, то $A = (A - A_{3n}) \cup A_{3n} =_* A_{3n}$. Множество A_{3n} — рекурсивно и, следовательно, A также будет рекурсивным, что противоречит a).

Пусть функция f определяется следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} \text{каноническому номеру } \varnothing, \text{ если } x \in A_{3n+1} \\ \text{каноническому номеру } \{a\}, \text{ если } x \in B_{3n+1} \\ \nu t\,(z_i \in \Phi_k[D_t]\ \&\ D_t \subseteq \Phi_s[D_{u_i}]), \text{ если } x = z_i \\ \text{для некоторого } i. \end{cases}$$

Здесь a — некоторое число, не принадлежащее $\Phi_s[A]$. Такое число существует, так как A не рекурсивно перечислимо и $A = \Phi_k\Phi_s[A]$.

Символ ν определяется в [4], § 65.

Очевидно, что функция f общерекурсивна. Покажем, что $A \leqslant_c \Phi_s[A]$ с помощью f. Если $x \in A_{3n+1} \cup B_{3n+1}$, то это очевидно. Пусть $x = z_i$ для некоторого i. Тогда

$$z_i \in A \supset (D_{u_i} \subseteq A) \supset (\Phi_s[D_{u_i}] \subseteq \Phi_s[A]) \supset (D_{f(z_i)} \subseteq \Phi_s[A])$$

и

$$(D_{f(z_i)} \subseteq \Phi_s[A]) \supset (\Phi_k[D_{f(z_i)}] \subseteq \Phi_k\Phi_s[A]) \supset (\Phi_k[D_{f(z_i)}] \subseteq A) \supset z_i \in A.$$

Следовательно, $d_c(A)$ и будет наименьшей c-степенью e-степени $d_e(A)$.

Следствие 1. Существует квазиминимальная e-степень, содержащая наименьшую eT-степень.

Следствие 2. Существует квазиминимальная e-степень, содержащая наименьшую pc-степень.

Теорема 2. *Существует квазиминимальная e-степень, не содержащая наименьшей eT-степени.*

Доказательство. Мы построим множества A и B, удовлетворяющие следующим условиям:

1. A и B не рекурсивно перечислимы,
2. $A \equiv_e B$,
3. $\forall C\,(C \leqslant_T A\ \&\ C \leqslant_T B \supset C$ рекурсивно).

Покажем, что $d_e(A)$ удовлетворяет условиям теоремы. Действительно, пусть c — тотальная e-степень и $\mathrm{c} \leqslant_e d_e(A)$. Следовательно, существует множество $C \in \mathrm{c}$ такое, что $\overline{C} \leqslant_e C$ и $C \leqslant_e A$. Тогда $C \leqslant_T A$ и

$C \leqslant_T B$. Из условия 3 вытекает, что C рекурсивно и, следовательно, $c = 0$. Таким образом, $d_e(A)$—квазиминимальная e-степень.

Допустим, что существует такое множество C, что $C \in d_e(A)$ и $d_{eT}(C)$ — eT-степень, наименьшая в $d_e(A)$. Тогда $C \leqslant_T A$ и $C \leqslant_T B$ и, следовательно, C рекурсивно, что противоречит условиям 1 и 2.

Прежде, чем перейти к построению множеств A и B, определим некоторые вспомогательные множества и функции. Пусть φ, ψ, α и β—некоторые функции. Определим функцию $h_{\varphi\psi}(x, y)$ следующим образом:

$$h_{\varphi\psi}(x, 0) = x,$$

$$h_{\varphi\psi}(x, 1) = \langle x, \mu t(\psi(\langle x, t\rangle) \neq 0)\rangle,$$

$$h_{\varphi\psi}(x, 2n+1) = \langle h_{\varphi\psi}(x, 2n), \mu t(\varphi(\langle h_{\varphi\psi}(x, 2n), t\rangle) \neq 0)\rangle,$$

$$h_{\varphi\psi}(x, 2n+2) = \langle h_{\varphi\psi}(x, 2n+1), \mu t(\varphi(\langle h_{\varphi\psi}(x, 2n+1), t\rangle) \neq 0)\rangle.$$

Обозначим через $\{G(x, y)\}$ последовательность следующих множеств:

$$G(x, 0) = \{x\},$$

$$G(x, n+1) = \{\langle y, z\rangle \mid y \in G(x, n) \,\&\, z \in N\}.$$

Тогда

$$F(\varphi, \psi, \alpha, \beta) = \{\langle h_{\varphi'\psi'}(x, 2n), 1\rangle \mid \alpha(x) = 1 \,\&\, n \in N\} \cup$$
$$\cup \{\langle h_{\psi'\varphi'}(x, 2n+1), 1\rangle \mid \beta(x) = 1 \,\&\, n \in N\} \cup \Big(\bigcup_{\substack{\alpha(x)=0\\ n\in N}} G(x, 2n) \times \{0\}\Big) \cup$$
$$\cup \Big(\bigcup_{\substack{\beta(x)=0\\ n\in N}} G(x, 2n+1) \times \{0\}\Big) \cup \bigcup_{n\in N} \{\langle \pi_1^{2n+1}(x), 1\rangle \mid \alpha(x) = 1\} \cup$$
$$\cup \bigcup_{n\in N} \{\langle \pi_1^{2n}(x), 1\rangle \mid \beta(x) = 1\},$$

где $\pi_1^n(\langle x_1, \cdots, x_n\rangle) = x_1$, $\varphi' = \varphi \cup \alpha$ и $\psi' = \psi \cup \beta$.

Заметим, что если графики φ, ψ, α и β рекурсивны, то множество $F(\varphi, \psi, \alpha, \beta)$ также рекурсивно.

Пару функций α и β назовем *совместной*, если она удовлетворяет следующим условиям:

1. $\forall x\, (\alpha(x) = 0 \supset \bigcup_{n\in N} G(x, 2n) \cap \{y \mid \alpha(y) = 1\} = \varnothing \,\&$
   $\& \bigcup_{n\in N} G(x, 2n+1) \cap \{y \mid \beta(y) = 1\} = \varnothing)$,
2. $\forall x\, (\beta(x) = 0 \supset \bigcup_{n\in N} G(x, 2n) \cap \{y \mid \beta(y) = 1\} = \varnothing \,\&$
   $\& \bigcup_{n\in N} G(x, 2n+1) \cap \{y \mid \alpha(y) = 1\} = \varnothing)$.

Пара конечных функций α и β, принимающих значения 0 и 1, называется *конечным приращением* пары функций φ и ψ, если $\tau\varphi \cup \tau\alpha$ и $\tau\psi \cup \tau\beta$—однозначные множества. Заметим, что если и $\tau\varphi$ и $\tau\psi$ рекурсивны, то и множество пар канонических номеров всех совместных конечных приращений φ и ψ рекурсивно.

Вместо множеств A и B мы построим всюду определенные функции f и g такие, что $A = \{x \mid f(x) = 1\}$ и $B = \{x \mid g(x) = 1\}$.

Построение будет производиться по шагам. Для каждого s необходимо, чтобы построенные на шаге s функции f_s и g_s имели рекурсивный график, были совместными и удовлетворяли условиям: $\tau f_{s-1} \subseteq \tau f_s$ и $\tau g_{s-1} \subseteq \tau g_s$.

Шаг 0. $f_0 = g_0 = \varnothing$. Переходим к шагу 1.

Шаг $2s+1$. Пусть $s = \langle x, y \rangle$. Проверяем, существует ли совместное конечное приращение α, β функций f_{2s} и g_{2s} такое, что для некоторого z $\varphi_x^{[f_{2s} \cup \alpha]}(z)$ и $\varphi_y^{[g_{2s} \cup \beta]}(z)$ были бы определены и не совпадали. Если такие продолжения существуют, то пусть α_0 и β_0 — одно из них. Тогда берем

$$f_{2s+1} = f_{2s} \cup F(f_{2s}, g_{2s}, \alpha_0, \beta_0) \quad g_{2s+1} = g_{2s} \cup F(g_{2s}, f_{2s}, \beta_0, \alpha_0)$$

и переходим к шагу $2s+2$.

Если таких α и β не существует, то $f_{2s+1} = f_{2s}$, $g_{2s+1} = g_{2s}$ и переходим к шагу $2s+2$.

Шаг $2s+2$. Пусть u — наименьшее число такое, что $f_{2s+1}(u)$ не определена. Рассмотрим два случая:

1. $u \in W_s$. Тогда $\tilde{f}_{2s+2} = f_{2s+1} \cup F(f_{2s+1}, g_{2s+1}, \{\langle u, 0 \rangle\}, \varnothing)$ и $\tilde{g}_{2s+2} = g_{2s+1} \cup F(g_{2s+1}, f_{2s+1}, \varnothing, \{\langle u, 0 \rangle\})$. Обозначим через β функцию с графиком $\{\langle x, 1 \rangle | x \leqslant s \;\&\; \tilde{g}_{2s+2}(x) \neq 0\}$. Тогда

$$f_{2s+2} = \tilde{f}_{2s+2} \cup F(\tilde{f}_{2s+2}, \tilde{f}_{2s+2}, \varnothing, \beta) \text{ и } g_{2s+2} = \tilde{g}_{2s+2} \cup F(\tilde{g}_{2s+2}, \tilde{f}_{2s+2}, \beta, \varnothing).$$

Переходим к следующему шагу.

2. $u \notin W_s$. Тогда $\tau\beta = \{\langle x, 1 \rangle | x \leqslant s \;\&\; g_{2s+1}(x) \neq 0\}$,

$$f_{2s+2} = f_{2s+1} \cup F[f_{2s+1}, g_{2s+1}, \{\langle u, 1 \rangle\}, \beta) \text{ и } g_{2s+2} = g_{2s+1} \cup$$
$$\cup F(g_{2s+1}, f_{2s+1}, \beta, \{\langle u, 1 \rangle\}).$$

Переходим к следующему шагу.

Нетрудно убедиться, что A не рекурсивно перечислимо, $A \leqslant_e B$ и $B \leqslant_e A$ с помощью множества $\{\langle x, d(x, y) \rangle | x, y \in N\}$, где $d(x, y)$ — канонический номер множества $\{\langle x, y \rangle\}$.

Покажем, что $\forall C (C \leqslant_T A \;\&\; C \leqslant_T B \supset C$ рекурсивно).

Пусть c — характеристическая функция некоторого множества C, $C \leqslant_T A$ и $C \leqslant_T B$. Тогда существуют такие числа x и y, что $c = \varphi_x^f$ и $c = \varphi_y^g$. Пусть $s = \langle x, y \rangle$. Тогда на шаге $2s+1$ выполняется условие:

$\forall\alpha \forall\beta \forall z$ (α и β — совместное конечное приращение для

$$f_{2s} \text{ и } g_{2s} \;\&!\; \varphi_x^{[f_{2s} \cup \alpha]}(z) \;\&!\; \varphi_y^{[g_{2s} \cup \beta]}(z) \supset \varphi_x^{[f_{2s} \cup \alpha]}(z) = \varphi_y^{[g_{2s} \cup \beta]}(z)).$$

Пользуясь этим условием и рекурсивностью графиков f_{2s} и g_{2s}, мы можем рекурсивно перечислить τc. Следовательно, C — рекурсивно. Теперь перейдем к рассмотрению структур произвольных e-степеней относительно pe-сводимости. Мы уже показали (следствие 2), что существует квазиминимальная e-степень, содержащая наименьшую pe-степень. Теперь мы докажем теорему, аналогичную теореме 2.

Теорема 3. *Существует квазиминимальная е-степень, не содержащая наименьшей рс-степени.*

Доказательство. Так же, как и в теореме 2, мы построим два множества A и B такие, что

1. A и B не рекурсивно перечислимы,
2. $A \equiv_e B$,
3. $d_e(A)$— квазиминимальная е-степень,
4. $\forall C\, (C \leqslant_{pc} A \;\&\; C \leqslant_{pc} B \supset C$ рекурсивно перечислимо).

Вместо множеств A и B мы построим их характеристические функции f и g, пользуясь при этом функциями и множествами, введенными в теореме 2.

Шаг 0. $f_0 = g_0 = \varnothing$. Переходим к шагу 1.

Шаг $3s+1$. Пусть $s = \langle i, j \rangle$. Проверяем, выполняется ли условие:

$$\exists k \exists n\, (D_n \cap \{x \mid f_{3s}(x) = 0\} = \varnothing \;\&\; k \in \Psi_i[\{x \mid f_{3s}(x) = 1\} \cup D_n] \;\&$$
$$\&\; k \overline{\in} \Psi_j[\{x \mid g_{3s}(x) = 1\}] \;\&\; \forall m\, (k \overline{\in} \Psi_j[D_m])).$$

Допустим, что оно выполняется и k_0 и n_0 — наименьшие числа, удовлетворяющие этому условию. Тогда $\tau\alpha = \{\langle x, 1 \rangle \mid x \in D_{n_0}\}$ и $\tau\beta = \varnothing$. Допустим, что это условие не выполняется. Тогда проверяем условие:

$$\exists k \exists n \exists m \exists t\, (D_n \cap \{x \mid f_{3s}(x) = 0\} = \varnothing \;\&\; k \in \Psi_i[\{x \mid f_{3s}(x) = 1\} \cup D_n] \;\&$$
$$\&\; k \overline{\in} \Psi_j[\{x \mid g_{3s}(x) = 1\}] \;\&\; k \in \Psi_j[D_m] \;\&\; t \in D_m \;\&\; g_{3s}(t) \neq 1 \;\&\; \{\langle t, 0 \rangle\}$$
$$\text{и } \{\langle x, 1 \rangle \mid x \in D_n\} \text{ совместны}).$$

Допустим, что оно выполняется и k_0, n_0, m_0, и t_0 — наименьшие числа, удовлетворяющие этому условию. В этом случае $\tau\alpha = \{\langle x, 1 \rangle \mid x \in D_{n_0}\}$, $\tau\beta = \{\langle t_0, 0 \rangle\}$. Если и это условие не выполняется, то $\tau\alpha = \tau\beta = \varnothing$. Берем $f_{3s+1} = f_{3s} \cup F(f_{3s}, g_{3s}, \alpha, \beta)$, $g_{3s+1} = g_{s3} \cup F(g_{3s}, f_{3s}, \beta, \alpha)$ и переходим к шагу $3s+2$:

Шаг $3s+2$. Проверяем, выполняется ли условие:

$$\exists n\, (D_n \cap \{x \mid f_{3s+1}(x) = 0\} = \varnothing \;\&\; \Phi_s[D_n] \text{—неоднозначно}).$$

Пусть n_0 — наименьшее число, удовлетворяющее этому условию. Тогда

$$\tau\alpha = \{\langle x, 1 \rangle \mid x \in D_{n_0}\},\; f_{3s+2} = f_{3s+1} \cup F(f_{3s+1}, g_{3s+1}, \alpha, \varnothing),$$
$$g_{3s+2} = g_{3s+1} \cup F(g_{3s+1}, f_{3s+1}, \varnothing, \alpha).$$

Переходим к шагу $3s+3$. Если такого числа не существует, то берем $f_{3s+2} = f_{3s+1}$, $g_{3s+2} = g_{3s+1}$ и переходим к шагу $3s+3$.

Шаг $3s+3$. Пусть u—наименьшее число такое, что $f_{3s+2}(u)$ не определена. Рассмотрим два случая:

1. $u \in W_s$. Тогда $\tilde{f}_{3s+3} = f_{3s+2} \cup F(f_{3s+2}, g_{3s+2}, \{<u, 0>\}, \varnothing)$ и $\bar{g}_{3s+3} = g_{3s+2} \cup F(g_{3s+2}, f_{3s+2}, \varnothing, \{<u, 0>\})$.

Обозначим через β функцию с графиком $\{<x, 1> \mid x \leqslant s \& \tilde{g}_{3s+3}(x) \neq 0\}$. Тогда

$$f_{3s+3} = \bar{f}_{3s+3} \cup F(\bar{f}_{3s+3}, g_{3s+3}, \varnothing, \beta) \text{ и } g_{3s+3} = \bar{g}_{3s+3} \cup$$
$$\cup F(\bar{g}_{3s+3}, \tilde{f}_{3s+3}, \beta, \varnothing).$$

Переходим к шагу $3s+4$.

2. $u \notin W_s$. Тогда $\beta = \{<x, 1> \mid x \leqslant s \& g_{3s+2}(x) \neq 0\}$,

$$f_{3s+3} = f_{3s+2} \cup F(f_{3s+2}, g_{3s+2}, \{<u, 1>\}, \beta) \text{ и } g_{3s+3} = g_{3s+2} \cup$$
$$\cup F(g_{3s+2}, f_{3s+2}, \beta, \{<u, 1>\}).$$

Переходим к шагу $3s+4$.

Пусть $f = \bigcup_s f_s$, $g = \bigcup_s g_s$, $A = \{x \mid f(x) = 1\}$ и $B = \{x \mid g(x) = 1\}$. Нетрудно убедиться, что A не рекурсивно перечислимо и $A \equiv_e B$. Доказательство квазиминимальности $d_e(A)$ проводится также, как и в теореме 1.

Покажем, что $\forall C (C \leqslant_{pc} A \& C \leqslant_{pc} B \supset C$ рекурсивно перечислимо). Допустим $C = \Psi_i[A] = \Psi_j[B]$ и $s = <i, j>$. Тогда на шаге $3s+1$ условие (1) не выполняется, иначе не было бы $\Psi_i[A] = \Psi_j[B]$. При этом $\forall k (k \in \Psi_i[A] \supset \exists n (k \in \Psi_i[\{x \mid f_{3s}(x) = 1\} \cup D_n] \& D_n \cap \{x \mid f_{3s}(x) = 0\} = \varnothing))$, а отсюда следует, что $\forall k (k \in \Psi_i[A] \supset k \in \Psi_j[\{x \mid g_{3s+1}(x) = 1\}]$, т. е. $\Psi_i[A] \subseteq \Psi_j[\{x \mid g_{3s+1}(x) = 1\}]$. С другой стороны, $\Psi_j[\{x \mid g_{3s+1}(x) = 1\}] \subseteq \Psi_j[B] = \Psi_i[A]$.

Таким образом, $\Psi_i[A] = \Psi_j[\{x \mid g_{3s+1}(x) = 1\}]$ и, так как $\{x \mid g_{3s+1}(x) = 1\}$ рекурсивно, то $\Psi_i[A] = C$ рекурсивно перечислимо. Учитывая, что A и B не являются рекурсивно перечислимыми, заключаем, что $d_e(A)$ не может содержать наименьшей pc-степени.

Пусть **a** — некоторая e-степень. Введем следующее обозначение $B \leqslant_T \mathbf{a} \Longleftrightarrow \forall A (A \in \mathbf{a} \supset B \leqslant_T \mathbf{a})$.

Тогда из предложения 2 следует, что если **a**—тотальная e-степень и множество $A \in \mathbf{a}$ таково, что $\overline{A} \leqslant_e A$, то

$$\forall B (B \leqslant_T \mathbf{a} \Longleftrightarrow B \leqslant_T A).$$

Теорема 4. *Для произвольного множества C существуют множества A и B, удовлетворяющие следующим условиям:*

1. $C \nleqslant_e A$ *и* $C \nleqslant_e B$,
2. $\forall R (R \leqslant_{pc} A \& R \leqslant_{pc} B \supset R$ *рекурсивно перечислимо*),
3. $\varnothing'' \leqslant_T C \supset A$ *и* B *рекурсивно перечислимы относительно* C.

Доказательство.

Шаг 0. $f_0 = g_0 = \{<<x, y>, 0> \mid x \notin C \& y \in N\}$. Переходим к шагу 1.

Шаг $2s+1$. Пусть $s=\langle i, j\rangle$. Проверям, выполняется ли условие:

$$\exists k\, \exists n\, (D_n \cap \{x \mid f_{2s}(x)=0\} = \varnothing \,\&\, k \in \Psi_i\,[\{x \mid f_{2s}(x)=1\} \cup D_n]] \,\&$$
$$\& \, k \notin \Psi_j[\{x \mid g_{2s}(x)=1\}]). \qquad (1)$$

Пусть k_0 и n_0 — наименьшие числа, удовлетворяющие этому условию, а m такое число, что $k_0 \in \Psi_j\,[D_m]$. Тогда берем

$$f_{2s+1} = f_{2s} \cup \{\langle x, 1\rangle \mid x \in D_{n_0}\},\ g_{2s+1} = g_{2s} \cup \{\langle \mu t\,(t \in D_m \,\&\, g_{2s}(t) \neq 1), 0\rangle\}$$

и переходим к шагу $2s+2$.

Если такого m не существует, то берем $f_{2s+1} = f_{2s} \cup \{\langle x, 1\rangle \mid x \in D_{n_0}\}$, $g_{2s+1} = g_{2s}$ и переходим к шагу $2s+2$.

Если условие (1) не выполняется, то берем $f_{2s+1} = f_{2s}$, $g_{2s+1} = g_{2s}$ и переходим к шагу $2s+2$.

Шаг $2s+2$. Рассмотрим два случая:

1. $s \in C$. Пусть x и y — наименьшие числа такие, что $f_{2s+1}(\langle s, x\rangle) \neq 0$ и $g_{2s+1}(\langle s, y\rangle) \neq 0$. Тогда берем

$$f_{2s+2} = f_{2s+1} \cup \{\langle\langle s, x\rangle, 1\rangle\} \cup \{\langle\langle s, z\rangle, 0\rangle \mid z \neq x \,\&\, f_{2s+1}(\langle t, z\rangle) \neq$$
$$\neq 1\},\ g_{2s+2} = g_{2s+1} \cup \{\langle\langle s, y\rangle, 1\rangle\} \cup \{\langle\langle s, z\rangle, 0\rangle \mid z \neq y \,\&$$
$$\& \, g_{2s+1}(\langle s, z\rangle) \neq 1\}$$

и переходим к шагу $2s+3$.

2. $s \notin C$. Тогда $f_{2s+2} = f_{2s+1}$ и $g_{2s+2} = g_{2s+1}$. Переходим к шагу $2s+3$.

Пусть $f = \bigcup\limits_s f_s$, $g = \bigcup\limits_s g_s$, $A = \{x \mid f(x) = 1$ и $B = \{x \mid g(x) = 1\}$

Нетрудно убедиться, что все условия теоремы выполняются.

Следствие 3. Если $\mathbf{a}$ — тотальная e-степень такая, что $\varnothing'' \leqslant_T \mathbf{a}$, то $\mathbf{a}$ не содержит наименьшей pc-степени.

Доказательство. Так как $\mathbf{a}$ — тотальная e-степень, то существует такое множество $C \in \mathbf{a}$, что $\bar{C} \leqslant_e C$ и, следовательно, $\varnothing'' \leqslant_T C$. Применив теорему 4, мы получим множества A и B, рекурсивно перечислимые относительно C и удовлетворяющие условиям 1 и 2. Отсюда следует, что A и B принадлежат $\mathbf{a}$, и $\mathbf{a}$ не содержит наименьшей pc-степени.

Теорема 5. *Пусть множество A таково, что $\bar{A} \leqslant_e A$ и $\varnothing' \leqslant_T A$. Тогда существует множество B, обладающее следующими свойствами:*

1. $A <_{pc} B$,
2. $B \not\leqslant_{pc} A$,
3. $B \leqslant_T A$.

Доказательство. Пусть $B = \{2i \mid 2i \notin \Psi_i[A]\} \cup \{2i+1 \mid i \in A\}$. Нетрудно убедиться, что все условия теоремы удовлетворяются.

Следствие 4. Если a—тотальная *e*-степень такая, что $\varnothing' \leqslant_T A$, то a содержит бесконечную цепь *pc*-степеней, упорядоченную по типу натуральных чисел.

Доказательство следует из теоремы 5 и предложения 1.

Теорема 6. *Если* a — *тотальная e-степень такая, что* $\varnothing' \leqslant_T$ a, *то* a *содержит бесконечную антицепь pc-степеней.*

Доказательство. Легко убедиться, что если множество B таково, что $\varnothing' \leqslant_T B$, то $\forall A\ (A \leqslant_{pc} B \supset A \leqslant_{eT} B)$. Пользуясь этим условием из предложения 3 получаем требуемый результат.

Вычислительный центр АН Армянской ССР
и Ереванского государственного университета

Поступила 25.XI.1978

Մ. Յու. ԽՈՋԱՅԱՆՑ. e-աստիճանների կառուցվածքի մասին (*ամփոփում*)

Հոդվածում հետազոտվում է e-աստիճանների կառուցվածքը տարբեր տիպերի հանգեցումների նկատմամբ:

M. J. KHODJAIANTS. *On structure of e-degrees* (summary)

In the article the structure of *e*-degrees with respect to some types of reducibility is considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Х. Роджерс.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, М., «Мир», 1972.
2. *Е. А. Поляков, М. Г. Розинас.* Теория алгоритмов, Иваново, 1976.
3. *R. I. Soare.* The infinite injury priority method, J. Symb. Log., 41, 2, 1976, 513—529.
4. *С. К. Клини.* Введение в метаматематику, М., ИИЛ, 1957.
5. *Ю. Т. Медведев.* Степени трудности массовых проблем, ДАН СССР, 104, 1955, 501—504.
6. *Д. Г. Скордев.* О частичной конъюнктивной сводимости, II Всесоюзная конференция по мат. логике, Тезисы, М., 1972, 43—44.
7. *L. P. Sasso.* A survey of partial degrees, J. Symb. Log., 40, 2, 1975, 130—140.
8. *J. Case.* Enumeration reducibility and partial degrees, Ann. Math. Log., 2, 4, 1971, 419—439.
9. *S. C. Kleene, E. L. Post.* The upper semi-lattice of degrees of recursive unsolvability, Ann. Math., ser. 2, 59, 1954, 379—407.