ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XV, № 1, 1980 Математика

Н. А. ШИРОКОВ

ОЦЕНКИ В $L^p(C)$ НЕКОТОРЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В последние годы развитие теории функций побудило ввести и изучить важные сингулярные интегральные операторы несверточного типа. Первый пример подобных операторов рассмотрел Кальдерон [2]. Именно, пусть функции $v \in \mathrm{Lip}_R\, 1$, $\|\nabla v\|_\infty \overset{\mathrm{def}}{=} \operatorname*{esssup}_{x\in R} |v'(x)|$, $f \in L^p(R)$, $1 < p < \infty$. Положим

$$MTf(x) = MT_1 f(x) \overset{\mathrm{def}}{=} \sup_{\varepsilon>0} \left| \int\limits_{|y-x|>\varepsilon} \frac{v(x)-v(y)}{x-y} \frac{f(y)}{x-y}\, dy \right|.$$

Кальдерон доказал (см. также Бенедек и Панзоне [3]), что оператор MT действует из пространства $L^p(R)$ в пространство $L^p(R)$. Затем Койфман и Мейер [1] обобщили определение оператора Кальдерона следующим образом:

$$MT_n f(x) \overset{\mathrm{def}}{=} \sup_{\varepsilon>0} \left| \int\limits_{|y-x|>\varepsilon} \left(\frac{v(x)-v(y)}{x-y}\right)^n \frac{f(y)}{x-y}\, dy \right|,$$

$n = 1, 2, \cdots$. Они установили, что все операторы MT_n непрерывны в $L^p(R)$ и при фиксированном p, $1 < p < \infty$ и растущем n их нормы оцениваются так:

$$\|MT_n\|_{L^p(R)} \leqslant C_p \exp(cn^2) \|\nabla v\|_\infty^n$$

при некотором $c > 0$. Впоследствии Кальдероном было показано, что оценка Койфмана и Мейера завышена и справедливо неравенство

$$\|MT_n\|_{L^p(R)} \leqslant C_p \exp(cn) \|\nabla v\|_\infty^n, \quad c > 0.$$

Оказывается, что аналог операторов, рассмотренных в пространствах $L^p(R)$ Кальдероном, Койфманом и Мейером, можно изучать и в пространствах $L^p(C)$, и оценка нормы соответствующего n-ного оператора в $L^p(C)$ лучше, чем в $L^p(R)$.

Определение. Пусть функция $v \in \mathrm{Lip}_C\, 1$,

$$\|\nabla v\|_\infty \overset{\mathrm{def}}{=} \operatorname*{esssup}_{z\in C} \sqrt{\left|\frac{\partial v(z)}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial v(z)}{\partial y}\right|^2}.$$

Для натурального n и $f \in L^p(C)$, $1 < p < \infty$ положим

$$T_n f(z) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|\zeta - z| > \varepsilon} \left(\frac{v(z) - v(\zeta)}{z-\zeta}\right)^n \frac{f(\zeta)}{(z-\zeta)^2}\, d\sigma_\zeta,$$

$$MT_n f(z) = \sup_{\varepsilon > 0} \left| \int\limits_{|\zeta - z| > \varepsilon} \left(\frac{v(z) - v(\zeta)}{z-\zeta}\right)^n \frac{f(\zeta)}{(z-\zeta)^2}\, d\sigma_\zeta \right|,$$

где $d\sigma_\zeta$ —плоская мера Лебега. Первый оператор рассматривается в тех точках z, для которых предел справа существует.

Теорема 1. *Пусть функция v такая, как в определении, $f \in L^p(\mathbf{C})$, $1 < p < \infty$. Тогда функции $T_n f$ и $MT_n f$ определены при п. в. $z \in \mathbf{C}$ и для их норм в $L^p(\mathbf{C})$ имеют место оценки:*

$$\|T_n f\|_p \leqslant C_p \|\nabla v\|_\infty^n \|f\|_p, \tag{1}$$

$$\|MT_n f\|_p \leqslant C_p\, n^2 \|\nabla v\|_\infty^n \|f\|_p. \tag{2}$$

Доказательство. Как следует из стандартных аргументов [4], стр. 50, достаточно установить оценку (2) для финитных бесконечно гладких функций f, затем для таких же функций установить существование п.в. функций $T_n f$, и затем доказать оценку (1). Итак, установим оценку (2), полагая до конца доказательства функцию f финитной и гладкой. Введем некоторые вспомогательные операторы:

$$MT_{n,\delta} f(z) = \sup_{\varepsilon > \delta > 0} \left| \int\limits_{|\zeta - z| > \varepsilon} \left(\frac{v(z) - v(\zeta)}{z-\zeta}\right)^n \frac{f(\zeta)}{(z-\zeta)^2}\, d\sigma_\zeta \right|,$$

$$T_{n,\varepsilon(\cdot),\delta} f(z) = \int\limits_{|\zeta - z| > \varepsilon(z)} \left(\frac{v(z) - v(\zeta)}{z-\zeta}\right)^n \frac{f(\zeta)}{(z-\zeta)^2}\, d\sigma_\zeta,$$

где $\varepsilon(z)$ — произвольная измеримая на $\mathbf{C}$ функция, удовлетворяющая условию $\varepsilon(z) > \delta$, $\delta > 0$,

$$L_{\lambda,\varepsilon(\cdot)\delta} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\lambda^n T_{n,\varepsilon(\cdot),\delta} f(z),$$

где $|\lambda| < 1 | \|\nabla v\|_\infty$ — любое комплексное число. Функции $L_{\lambda,\varepsilon(\cdot),\delta} f(z)$ определены для любого $z \in \mathbf{C}$, поскольку

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)|\lambda|^n |T_{n,\varepsilon(\cdot),\delta} f(z)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)|\lambda|^n \times$$

$$\times \int\limits_{|\zeta - z| > \delta} \left|\frac{v(z) - v(\zeta)}{z-\zeta}\right|^n \frac{|f(\zeta)|}{|z-\zeta|^2}\, d\sigma_\zeta \leqslant \frac{1}{\delta^2} \|f\|_\infty \operatorname{mes}\,[\operatorname{supp} f] \,/\, (1 - |\lambda| \|\nabla v\|_\infty)^2.$$

Заметим также, что $MT_{n,\delta} f(z) \nearrow MT_n f(z)$ при $\delta \to 0$.

Далее имеем

$$L_{\lambda,\varepsilon(\cdot),\delta} f(z) = \int\limits_{|\zeta - z| > \varepsilon(z)} \frac{1}{\left(1 - \lambda\, \dfrac{v(z) - v(\zeta)}{z-\zeta}\right)^2} \frac{f(\zeta)}{(z-\zeta)^2}\, d\sigma_\zeta =$$

$$= \int\limits_{|\zeta - z| > \varepsilon(z)} \frac{f(\zeta)}{(z - \zeta - \lambda(v(z) - v(\zeta)))^2} d\sigma_\zeta. \quad (3)$$

Положим $A_\lambda(z) = z - \lambda v(z)$. Имеем

$$|A_\lambda(z) - A_\lambda(\zeta)| \leqslant |z - \zeta| + |\lambda| |v(z) - v(\zeta)| \leqslant 2|z - \zeta|, \quad (4)$$

$$|A_\lambda(z) - A_\lambda(\zeta)| \geqslant |z - \zeta| + |\lambda| |v(z) - v(\zeta)| \geqslant (1 - |\lambda| \|\nabla v\|_\infty) |z - \zeta|. \quad (5)$$

Для краткости положим далее $\|\nabla v\|_\infty = w$.

Из соотношений (4) и (5) следует, что при $|\lambda| < 1/w$ функция $A_\lambda(z)$ есть липшицевский гомеоморфизм $\mathbf{C}$ на $\mathbf{C}$. Сделаем в интеграле (3) замену переменной $A_\lambda(\zeta) = t$; $\zeta = \alpha_\lambda(t)$—обратное к A_λ отображение. В таком случае

$$L_{\lambda, \varepsilon(\cdot), \delta} f(z) = \int\limits_{\{t \in \mathbf{C}: |\alpha_\lambda(t) - z| > \varepsilon(z)\}} \frac{f(\alpha_\lambda(t)) \mu_\lambda(t)}{(A_\lambda(z) - t)^2} d\sigma_t, \quad (6)$$

где μ_λ — якобиан замены координат. Положим $A_\lambda(z) = \tau$. Соотношения (4) и (5) дадут следующие включения:

$$\{t \in \mathbf{C}: |t - \tau| \geqslant 2\varepsilon\} \subset \{t \in \mathbf{C}: |\alpha_\lambda(t) - \alpha_\lambda(\tau)| > \varepsilon\} \subset$$
$$\subset \{t \in \mathbf{C}: |t - \tau| > (1 - |\lambda| w) \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0$$

поэтому

$$(6) = \int\limits_{\{t \in \mathbf{C}: |t - \tau| > (1 - |\lambda| w) \varepsilon(z)\}} \frac{f(\alpha_\lambda(t)) \mu_\lambda(t)}{(\tau - t)^2} d\sigma_t -$$

$$- \int\limits_{\substack{\{t \in \mathbf{C}: |t - \tau| > (1 - |\lambda| w) \varepsilon(z)\} / \\ \{t \in \mathbf{C}: |\alpha_\lambda(t) - \alpha_\lambda(\tau)| > \varepsilon(z)\} \cap \\ \cap \{|t - \tau| < 2\varepsilon(z)\}}} \frac{f(\alpha_\lambda(t)) \mu_\lambda(t)}{(\tau - t)^2} d\sigma_t. \quad (7)$$

Определим далее классические операторы S и M, ограниченные в $L^p(\mathbf{C})$:

$$(S\varphi)(\tau) = \sup_{\varepsilon > 0} \left| \int\limits_{|t - \tau| > \varepsilon} \frac{\varphi(t)}{(\tau - t)^2} d\sigma_t \right|,$$

$$(M\varphi)(\tau) = \sup_{\varepsilon > 0} \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \int\limits_{|t - \tau| < \varepsilon} |\varphi(t)| d\sigma_t.$$

Тогда (7) влечет

$$|L_{\lambda, \varepsilon(\cdot), \delta} f(z)| \leqslant S(f(\alpha_\lambda) \mu_\lambda)(\tau) +$$

$$+ \int\limits_{(1 - |\lambda| w) \varepsilon(z) < |t - \tau| < 2\varepsilon(z)} \frac{|f(\alpha_\lambda(t))| \mu_\lambda(t)}{|\tau - t|^2} d\sigma_t \leqslant S(f(\alpha_\lambda) \mu_\lambda)(\tau) +$$

$$+ \frac{1}{(1 - |\lambda|(w))^2 \varepsilon^2(z)} \int\limits_{|t - \tau| < 2\varepsilon(z)} |f(\alpha_\lambda(t))| \mu_\lambda(t) d\sigma_t \leqslant S(f(\alpha_\lambda) \mu_\lambda)(\tau) +$$

$$+\frac{c}{(1-|\lambda|\,w)^2}\,M(f(\alpha_\lambda)\,\mu_\lambda)(\tau).$$

Поэтому

$$\int_C |L_{\lambda,\varepsilon(\cdot),\delta} f(z)|^p\, d\sigma_z \leqslant c_p \int_C (S(f(\alpha_\lambda))\,\mu_\lambda)^p(\tau)\, d\sigma_z +$$

$$+\frac{c_p}{(1-|\lambda|\,w)^{2p}} \int_C M^p(f(\alpha_\lambda)\,\mu_\lambda)(\tau)\, d\sigma_z, \qquad (8)$$

где $1 < p < \infty$, $\tau = A_\lambda(z)$. В правой части (8) опять сделаем замену $A_\lambda(z) = \tau$, тогда $d\sigma_z = \mu_\lambda(\tau)\, d\sigma_\tau$ и, пользуясь ограниченностью операторов S и M в $L^p(\mathrm{C})$, $1 < p < \infty$, получим

$$\ldots (8) \leqslant c_p \|\mu_\lambda\|_\infty \int_C S(f(\alpha_\lambda))\,\mu_\lambda)^p(\tau)\, d\sigma_\tau + c_p \|\mu_\lambda\|_\infty \frac{1}{(1-|\lambda| w)^{2p}} \times$$

$$\times \int_C M(f(\alpha_\lambda)\,\mu_\lambda)^p(\tau)\, d\sigma_\tau \leqslant \frac{c_p \|\mu_\lambda\|_\infty}{(1-|\lambda|\,w)^{2p}} \int_C |f(\alpha_\lambda(\tau))|^p\, \mu_\lambda^p(\tau)\, d\sigma_\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_p \|\mu_\lambda\|_\infty^p}{(1-|\lambda|\,w)^{2p}} \int_C |f(\alpha_\lambda(\tau))|^p\, \mu_\lambda(\tau)\, d\sigma_\tau = \frac{c_p \|\mu_\lambda\|_\infty^p}{(1-|\lambda|\,w)^{2p}} \|f\|_p^p. \qquad (9)$$

В выкладке (9) и далее c_p означают, вообще говоря, различные постоянные, зависящие лишь от p. В итоге

$$\|L_{\lambda,\varepsilon(\cdot),\delta} f\|_p \leqslant \frac{c_p \|\mu_\lambda\|_\infty}{(1-|\lambda|\,w)^2} \|f\|_p. \qquad (10)$$

Проинтегрируем равенство (3) по λ по окружности $|\lambda| = \rho$, $\rho < \frac{1}{w}$, получим

$$T_{n,\varepsilon(\cdot),\delta} f(z) = \frac{1}{2\pi i\,(n+1)} \int_{|\lambda|=\rho} L_{\lambda,\varepsilon(\cdot),\delta} f(z) \frac{d\lambda}{\lambda^{n+1}}, \qquad (3')$$

тогда

$$T_{n,\varepsilon(\cdot),\delta} f(z) < \frac{1}{2\pi\,(n+1)\,\rho^{n+1}} \int_{|\lambda|=\rho} |L_{\lambda,\varepsilon(\cdot)\delta} f(z)|\, d\lambda$$

откуда и в силу неравенства Минковского и (10)

$$\|T_{n,\varepsilon(\cdot),\delta} f\|_p \leqslant \frac{1}{2\pi\,(n+1)\,\rho^{n+1}} \int_{|\lambda|=\rho} \|L_{\lambda,\varepsilon(\cdot),\delta} f\|_p\, |d\lambda| <$$

$$\leqslant c_p\,(1-\rho w)^{-2}\, \rho^{-n}\,(n+1)^{-1} \sup_{|\lambda|=\rho} \|\mu_\lambda\|_\infty \|f\|_p. \qquad (11)$$

Оценим теперь $\|\mu_\lambda\|_\infty$. Пусть $\nu_\lambda(z)$ — якобиан перехода от координат z к координатам τ, тогда

$$\mu_\lambda(\tau) = \frac{1}{\nu_\lambda(z)}, \quad z = \alpha_\lambda(\tau) \text{ и } \|\mu_\lambda\|_\infty = (\operatorname*{ess\,inf}_{C} \nu_\lambda(z))^{-1}.$$

Затем, если ввести операторы

$$\partial = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \bar{\partial} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \text{ то}$$

$$\nu_\lambda(z) = \left| |\partial A_\lambda(z)|^2 - |\bar{\partial} A_\lambda(z)|^2 \right| = \left| |1 - \lambda\partial v(z)|^2 - |\lambda\bar{\partial} v(z)|^2 \right| \geqslant$$

$$\geqslant |1 - \lambda\partial v(z)|^2 - \rho^2 |\bar{\partial} v(z)|^2 = 1 - 2\operatorname{Re}(\lambda\partial v(z)) + \rho^2(|\partial v(z)|^2 - |\bar{\partial} v(z)|^2) \geqslant$$

$$\geqslant 1 - 2\rho|\partial v| + 2\rho^2|\partial v|^2 - \rho^2(|\partial v|^2 + |\bar{\partial} v|^2) \geqslant$$

$$\geqslant 1 - 2\rho|\partial v| + 2\rho^2|\partial v|^2 - \frac{1}{2}\rho^2 w^2,$$

поскольку $|\partial v|^2 + |\bar{\partial} v|^2 = \frac{1}{2}|\nabla v|^2 \leqslant \frac{1}{2} w^2$.

Далее, $1 - 2\rho x + 2\rho^2 x^2 \geqslant \frac{1}{2}$, поэтому $\nu_\lambda(z) \geqslant \frac{1}{2}(1 - \rho^2 w^2)$, а тогда при $|\lambda| = \rho < \frac{1}{w}$, $\|\mu_\lambda\|_\infty < \frac{2}{1 - \rho^2 w^2}$, а из (11) имеем

$$\|T_{n,\varepsilon(\cdot),\delta}\|_p \leqslant \frac{c_p}{(1 - \rho w)^3 (n+1)\rho^n}.$$

Полагая $\rho = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{w}$, получим

$$\|T_{n;\varepsilon(\cdot),\delta}\|_p \leqslant c_p n^3 w^n. \tag{12}$$

Ясно, что для фиксированного n найдется такая измеримая функция $\varepsilon(z) = \varepsilon(z; n, \delta, f)$, что

$$|T_{n,\varepsilon(z),\delta} f(z)| > \frac{1}{2} MT_{n,\delta} f(z),$$

а тогда соотношение (12) даст $\|MT_{n,\delta}\|_p \leqslant c_p n^3 w^n$, т. е. $\|MT_n\|_p \leqslant c_p n^3 w^n$. Тем самым соотношение (2) установлено.

Перейдем теперь к доказательству существования п.в. значений у $T_n f$, $f \in L^p(C) \cap D_0(C)$. Для этого сначала установим еще одну максимальную теорему о сингулярных интегралах в $L^p(C)$.

Теорема 2. *Пусть функции $v_1, \cdots, v_n$ — липшицевы на C. Определим оператор $MT_{v_1,\dots,v_n} f$ формулой*

$$MT_{v_1,\dots,v_n} f(z) = \sup_{\varepsilon > 0} \left| \int\limits_{|\zeta - z| > \varepsilon} \frac{(v_1(z) - v_1(\zeta)) \cdots (v_n(z) - v_n(\zeta))}{(z-\zeta)^n} \frac{f(\zeta)}{(z-\zeta)^2} d\sigma_\zeta \right|.$$

Тогда оператор $MT_{v_1,\dots,v_n}$ действует из $L^p(C)$ в $L^p(C)$.

Доказательство. Опять рассмотрим произвольную функцию $\varepsilon(z) > \delta > 0$ и операторы

$$T_{v_1,\ldots,v_n,\varepsilon(\cdot)} f(z) = \int\limits_{|\zeta-z|>\varepsilon(z)} \frac{(v_1(z)-v_1(\zeta))\cdots(v_n(z)-v_n(\zeta))}{(z-\zeta)^n} \frac{f(\zeta)}{(z-\zeta)^2}\, d\sigma_\zeta,$$

$$T_{v_1,\ldots,v_n,\theta_1,\ldots,\theta_n,\varepsilon(\cdot)} f(z) =$$

$$= \int\limits_{|\zeta-z|>\varepsilon(z)} \frac{[(e^{i\theta_1}v_1(z)+e^{i\theta_2}v_2(z)+\cdots+e^{i\theta_n}v_n(z))-(e^{i\theta_1}v_1(\zeta)+\cdots+e^{i\theta_n}v_n(\zeta))]^n}{(z-\zeta)^{n+2}} f(\zeta)\, d\sigma_\zeta.$$

Имеем

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_0^{2\pi}\cdots\int\limits_0^{2\pi} e^{-i(\theta_1+\cdots+\theta_n)}\, T_{v_1,\ldots,v_n,\theta_1,\ldots,\theta_n,\varepsilon(\cdot)} f(z)\, d\theta_1\cdots d\theta_n =$$

$$= \int\limits_{|\zeta-z|>\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta)}{(z-\zeta)^{n+2}}\, d\sigma_\zeta\, \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_0^{2\pi}\cdots\int\limits_0^{2\pi} e^{-i(\theta_1+\cdots+\theta_n)}\times$$

$$\times[e^{i\theta_1}(v_1(z)-v_1(\zeta))+\cdots+e^{i\theta_n}(v_n(z)-v_n(\zeta))]^n\, d\theta_1\cdots d\theta_n =$$

$$= n!\int\limits_{|\zeta-z|>\varepsilon(z)} \frac{(v_1(z)-v_1(\zeta))\cdots(v_n(z)-v_n(\zeta))}{(z-\zeta)^n}\frac{f(\zeta)}{(z-\zeta)^2}\, d\sigma_\zeta = n!\, T_{v_1,\ldots,v_n,\varepsilon(\cdot)} f(z). \tag{13}$$

Заметим, что

$$|T_{v_1,\ldots,v_n,\theta_1,\ldots,\theta_n,\varepsilon(\cdot)} f(z)| \leqslant M T_{e^{i\theta_1}v_1+\cdots+e^{i\theta_n}v_n,\,n} f(z),$$

поэтому из (13)

$$|T_{v_1,\ldots,v_n,\varepsilon(\cdot)} f(z)| \leqslant \frac{1}{n!}\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_0^{2\pi}\cdots\int\limits_0^{2\pi} M T_{e^{i\theta_1}+\cdots+e^{i\theta_n}v_n} f(z)\, d\theta_1\cdots d\theta_n. \tag{14}$$

А тогда, используя неравенство Минковского, доказанную оценку (2) и то, что

$$\|\nabla(e^{i\theta_1}v_1+\cdots+e^{i\theta_n}v_n)\|_\infty \leqslant \|\nabla v_1\|_\infty + \|\nabla v_2\|_\infty + \cdots + \|\nabla v_n\|_\infty$$

при всех $\theta_1,\cdots,\theta_n \in [0, 2\pi)$, получим из (14):

$$\|T_{v_1,\ldots,v_n,\varepsilon(\cdot)} f\|_p \leqslant \frac{1}{n!}\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_0^{2\pi}\cdots\int\limits_0^{2\pi}\|M T_{e^{i\theta_1}v_1+\cdots+e^{i\theta_n}v_n,\,n} f\|_p\, d\theta_1\cdots d\theta_n \leqslant$$

$$\leqslant c_p \frac{1}{(n-1)!}(\|\nabla v_1\|_\infty+\cdots+\|\nabla v_n\|_\infty)^n \|f\|_p$$

и далее доказательство завершается, как в теореме 1.

Отметим важное для дальнейшего следствие из теоремы 2. Положим $v_{n+1}(z)=\cdots=v_{n+r}(z)=\bar z$, тогда

$$\|MT_{v_1,\ldots,v_n\,(r)}f\|_p \overset{\mathrm{def}}{=} \|MT_{v_1,\ldots,v_n,\underbrace{\bar z,\ldots,\bar z}_{r}} f(z)\| =$$

$$= \sup_{\varepsilon>0}\left|\int\limits_{|\zeta-z|>\varepsilon} \frac{(v_1(z)-v_1(\zeta))\cdots(v_n(z)-v_n(\zeta))}{(z-\zeta)^n}\,\frac{(\bar z-\bar\zeta)^r f(\zeta)}{(z-\zeta)^{r+2}}\,d\sigma_\zeta\right|$$

и

$$\|MT_{v_1,\ldots,v_n(r)}f\|_p \leqslant c_p\,\frac{n+r}{(n+r-1)!}\,(\|\nabla v_1\|_\infty+\cdots+\|\nabla v_n\|_\infty+r\sqrt{2})^{n+r}\,\|f\|_p.$$

Перейдем теперь к доказательству существования предела в операторах $T_n f$. Положим вначале

$$L^{(1)}_{n,r,K}(z)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\{\zeta:\,|\zeta-z|>\varepsilon,\ |\zeta|<K\}}\left(\frac{v(z)-v(\zeta)}{z-\zeta}\right)^n\left(\frac{\bar z-\bar\zeta}{z-\zeta}\right)^r\frac{v_x(\zeta)}{(v-\zeta)^2}\,d\sigma_\zeta,$$

$$L^{(2)}_{n,r,K}(z)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\{\zeta:\,|\zeta-z|>\varepsilon,\ |\zeta|<K\}}\left(\frac{v(z)-v(\zeta)}{z-\zeta}\right)^n\left(\frac{\bar z-\bar\zeta}{z-\zeta}\right)^r\frac{v_y(\zeta)}{(z-\zeta)^2}\,d\sigma_\zeta,$$

где $n, r=0, 1,\cdots$ и $F_{n,r}$ — множество, на котором существуют и $L^{(1)}_{n,r,K}$ и $L^{(2)}_{n,r,K}$, $E_{n,r}$ — дополнительное к $F_{n,r}$ множество, $E=\bigcup\limits_{n,r>0}E_{n,r}$, $F=\mathbf{C}\setminus E$. Установим, что $\operatorname{mes} E=0$. Для этого найдем, что $\operatorname{mes} E_{n,r}=0$ при всех $n, r>0$. Проведем доказательство индукцией по n. Если $n=0$, то

$$L^{(1)}_{0,r,K}(z)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\{\zeta:\,|\zeta-z|>\varepsilon,\ |\zeta|<K\}}\frac{(\bar z-\bar\zeta)^r}{(z-\zeta)^{r+2}}\,v_x(\zeta)\,d\sigma_\zeta,$$

а также $L^{(2)}_{0,r,K}(z)$, существуют при п.в. z, поскольку $\dfrac{(\bar z-\bar\zeta)^r}{(z-\zeta)^{r+2}}$ при всех $r=0, 1,\cdots$, суть ядра Кальдерона-Зигмунда [4], стр. 52, а функции v_x и v_y содержатся в $L^\infty(\mathbf{C})$. Произведем индуктивный переход. Рассмотрим, например, $L^{(1)}_{n,r,K}(z)$, $n\geqslant 1$. Операторы $MT_{\underbrace{v,\ldots,v}_{n},\underbrace{\bar z,\ldots,\bar z}_{r}}$ непрерывны в L^p, поэтому чтобы установить существование $L^{(1)}_{n,r,K}(z)$ т. е. результат применения соответствующего оператора к конкретной функции $v_x\cdot\chi(\{z\in\mathbf{C}:\,|z|<K\})$, согласно стандартному пути [4], стр. 58 достаточно теперь установить существование п.в. пределов в операторах

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\{\zeta:\,|\zeta-z|>\varepsilon,\ |\zeta|<K\}}\left(\frac{v(z)-v(\zeta)}{z-\zeta}\right)^n\left(\frac{\bar z-\bar\zeta}{z-\zeta}\right)^r\frac{f(\zeta)}{(z-\zeta)^2}\,d\sigma_\zeta$$

для гладких и финитных f; поскольку для таких f $|f(z)-f(\zeta)|\leqslant c_f|z-\zeta|$, то вопрос сводится к существованию п.в. предела

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\{\zeta:\,|\zeta-z|>\varepsilon,\ |\zeta|<K\}}\left(\frac{v(z)-v(\zeta)}{z-\zeta}\right)^n\left(\frac{\bar z-\bar\zeta}{z-\zeta}\right)^r\frac{d\sigma_\zeta}{(z-\zeta)^2}. \tag{15}$$

Возьмем точку $z_0 \overline{\in} \bigcup_{p=0}^{n-1} \bigcup_{r=0}^{\infty} E_{p,r} \cup \mathrm{E}$, где E — множество, в котором функция v не дифференцируема. По теореме В. В. Степанова [5] $\mathrm{mes}\,\mathrm{E} = 0$. Не умаляя общности, считаем $v(z_0) = 0$, $z_0 = 0$, ибо иначе рассмотрели бы $u(z) = v(z) - v(z_0)$, $\zeta = z - z_0$. Ясно, что достаточно установить существование предела

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\varepsilon<|\zeta|>1} \left(\frac{v(\zeta)}{\zeta}\right)^n \left(\frac{\bar\zeta}{\zeta}\right)^r \frac{d\sigma_\zeta}{\zeta^2}. \tag{15'}$$

Имеем

$$\int\limits_{\varepsilon<|\zeta|<1} \left(\frac{v(\zeta)}{\zeta}\right)^n \left(\frac{\bar\zeta}{\zeta}\right)^r \frac{d\sigma_\zeta}{\zeta^2} = \int\limits_{\varepsilon}^{1}\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{v^n(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)}{\rho^{n+1} e^{i(n+2r+2)\theta}}\, d\rho\, d\theta =$$

$$= -\frac{1}{n}\int\limits_0^{2\pi} e^{-i(n+2r+2)\theta}\, d\theta \int\limits_{\varepsilon}^{1} v^n(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\, d(\rho^{-n}) =$$

$$= \frac{1}{n}\int\limits_0^{2\pi} e^{-i(n+2r+2)\theta}\, \frac{v^n(\varepsilon\cos\theta, \varepsilon\sin\theta)}{\varepsilon^n}\, d\theta -$$

$$- \frac{1}{n}\int\limits_2^{2\pi} e^{-i(n+2r+2)\theta} v^n(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta +$$

$$+ \int\limits_0^{2\pi} e^{-i(n+2r+2)\theta}\, d\theta \int\limits_{\varepsilon}^{1} v^{n-1}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)(v_x\cdot\cos\theta + v_y\sin\theta)\,\rho^{-n}\, d\rho =$$

$$= I_1(\varepsilon) - I + I_2(\varepsilon).$$

В силу дифференцируемости функции v в нуле $v(\varepsilon\cos\theta, \varepsilon\sin\theta) = (v_x(0,0)\cos\theta + v_y(0,0)\sin\theta)\,\varepsilon + o(\varepsilon)$, $\varepsilon\to 0$, поэтому

$$I_1(\varepsilon) = \frac{1}{n}\int\limits_0^{2\pi} e^{-i(n+2r+2)\theta}(v_x(0,0)\cos\theta + v_y(0,o)\sin\theta)^n\, d\theta + o(1),\ \varepsilon\to 0,$$

$$I_2(\varepsilon) = \int\limits_{\varepsilon<|\zeta|<1} \frac{v^{n-1}(\zeta)}{\zeta^{n-1}}\; e^{-i(2r+1)\theta}(v_x(\zeta)\cos\theta + v_y(\zeta)\sin\theta)\,\frac{d\sigma_\zeta}{\zeta^2} =$$

$$= \int\limits_{\varepsilon<|\zeta|<1} \left(\frac{v(\zeta)}{\zeta}\right)^{n-1} \left(\frac{\bar\zeta}{\zeta}\right)^r \left(\frac{v_x(\zeta)}{2} + \frac{1}{2i} v_y(\zeta)\right)\frac{d\sigma_\zeta}{\zeta^2} + \tag{16}$$

$$+ \int\limits_{\varepsilon<|\zeta|<1} \left(\frac{v(\zeta)}{\zeta}\right)^{n-1} \left(\frac{\bar\zeta}{\zeta}\right)^{r+1} \left(\frac{v_x(\zeta)}{2} - \frac{1}{2i} v_y(\zeta)\right)\frac{d\sigma_\zeta}{\zeta^2}.$$

По предположению, существуют пределы каждого из двух слагаемых в (16), т. е. при $z \overline{\in} \bigcup_{p=0}^{n-1} \bigcup_{r=0}^{\infty} E_{p,r} \cup \varepsilon$ существует предел в (15). Поэтому, согласно общей методике [4], стр. 58, функции $L^{(1)}_{n,r,K}(z)$ и $L^{(2)}_{n,r,K}(z)$ существуют вне некоторого множества $E_{n,r}$ из $\operatorname{mes} E_{n,r} = 0$. Индуктивный переход от $n-1$ к n в вопросе существования $L^{(j)}_{n,r,K}$, $j=1, 2$ осуществлен.

Тем самым установлено и существование предела в определении оператора $T_n f(z)$ при п.в. $z \in \mathbf{C}$ при $\varepsilon \to 0$.

Установим теперь оценку (1). Положим для этого в соотношении (3) $\varepsilon(z) \equiv \varepsilon$, обозначим $L_{\lambda,\varepsilon(\cdot),\varepsilon} f(z)$ через $L_{\lambda,\varepsilon} f(z)$, тогда вновь выпишем соотношение (6):

$$L_{\lambda,\varepsilon} f(z) = \int\limits_{\{t:\, |\alpha_\lambda(t)-z|>\varepsilon\}} \frac{f(\alpha_\lambda(t))\,\mu_\lambda(t)}{(A_\lambda(z)-t)^2}\, d\sigma_t, \tag{6'}$$

$$ML_\lambda f(z) \overset{\text{def}}{=} \sup_{\varepsilon>0} |L_{\lambda,\varepsilon} f(z)|.$$

Из оценок (10) и $\|\mu_\lambda\|_\infty$ получаем

$$\|ML_\lambda f\|_p \leqslant c_p (1-|\lambda|\, w)^{-3} \|f\|_p,\ 1<p<\infty,\ w = \|\nabla v\|_\infty,\ |\lambda| < \frac{1}{w}.$$

Установим, что существует множество $\mathbf{E}$, $\operatorname{mes} \mathbf{E} = 0$, вне которого для данной финитной гладкой функции f существует $\lim\limits_{\varepsilon\to0} L_{\lambda,\varepsilon} f(z)$ для всех λ. Для этого, как видно из (6′), достаточно установить при всех λ, $|\lambda| < \frac{1}{w}$ существование

$$\lim_{\varepsilon\to0} \int\limits_{\{t:\, \varepsilon<|\alpha_\lambda(t)-z|<1\}} \frac{\mu_\lambda(t)}{(A_\lambda(z)-t)^2}\, d\sigma_t. \tag{17}$$

Делая обратную замену $t = A_\lambda(\zeta)$, получим, что существование предела в (17) эквивалентно существованию предела

$$\lim_{\varepsilon\to0} \int\limits_{\{\zeta:\, |\zeta-z|>\varepsilon,\, |\zeta|<K\}} \frac{d\sigma_\zeta}{(z-\zeta-\lambda\,(v(z)-v(\zeta)))^2} \tag{18}$$

при всех λ, $|\lambda| < \frac{1}{w}$. Фиксируем λ. Пишем вновь, раскладывая по степеням λ:

$$\int\limits_{\{\zeta:\, |\zeta-z|>\varepsilon,\, |\zeta|<K\}} \frac{d\sigma_\zeta}{[z-\zeta-\lambda(v(z)-v(\zeta))]^2} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \lambda^n \int\limits_{\{\zeta:\, |\zeta - z| > \varepsilon,\, |\zeta| < K\}} \left(\frac{v(z) - v(\zeta)}{z - \zeta} \right)^n \frac{d\sigma_\zeta}{(z-\zeta)^2}. \tag{19}$$

Пусть $\chi = \chi(\{|\zeta| < K\})$. Тогда правая часть I в (19)

$$I \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) |\lambda^n| MT_n \chi(z). \tag{20}$$

Поскольку по (2) $\|MT_n \chi\|_2 \leqslant c_2 (n+1)^2 w^n K$, то

$$\operatorname{mes} G_{n,A} \overset{\text{def}}{=} \operatorname{mes} \{z \in \mathbf{C}:\ MT_n \chi(z) \geqslant A (n+1)^2 w^n R^n\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_2^2 (n+1)^4 w^{2n} K^2}{A^2 (n+1)^4 w^{2n} R^{2n}} = \frac{c_2^2 K^2}{A^2 R^{2n}},$$

где $R > 1$ фиксированное, но такое, что $|\lambda| wR < 1$. Поэтому

$$\operatorname{mes} \bigcup_{n=0}^{\infty} G_{n,A} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{mes} G_{n,A} \leqslant \frac{c_2^2 K^2}{A^2} \frac{R^2}{R^2 - 1}. \tag{21}$$

Пусть $\mathrm{H}_A = \bigcup_{n=0}^{\infty} G_{n,A}$. Если $z \overline{\in} \mathrm{H}_A$, то при всех $n = 0, 1, \cdots$ $MT_n \chi(z) \leqslant \leqslant A (n+1)^2 w^n R^n$ и поэтому при таких z ряд (20) сходится. Если $z \overline{\in} \mathrm{H}_A \cup \bigcup_{p=0}^{\infty} \bigcup_{r=0}^{\infty} E_{p,r} \cup \mathrm{E}$, то при $\varepsilon \to 0$ члены ряда (19) имеют предел и ограничены сходящимся рядом (20), поэтому при таких z и их сумма имеет предел, т. е. существование предела в (18) установлено при $z \overline{\in} \mathrm{H}_A \cup \bigcup_{p,r>0} E_{p,r} \cup \mathrm{E}$. Возьмем $A = 1, 2, \cdots$ и положим $\mathrm{H} = \bigcap_{A=1}^{\infty} \mathrm{H}_A$.

Из (21) следует, что $\operatorname{mes} \mathrm{H} = 0$. Если $z \overline{\in} \mathrm{H}$, то $z \overline{\in} \mathrm{H}_A$ при некотором A и значит, если ещё $z \overline{\in} \bigcup_{p,r>0} E_{p,r} \cup \mathrm{E}$, то предел в (18) существует. Итак можно положить $\mathbf{E} = \mathrm{H} \cup \bigcup_{p,r>0} E_{p,r} \cup \mathrm{E}$.

Приступим теперь к доказательству оценки (1). Видоизменим соотношение (7) следующим образом:

$$L_{\lambda,\varepsilon} f(z) = \int\limits_{|t-\tau| > \sigma(\varepsilon)} \frac{f(\alpha_\lambda(t))\, \mu_\lambda(t)}{(\tau - t)^2} d\sigma_t -$$

$$- \int\limits_{\substack{\{|t-\tau| > \sigma(\varepsilon)\} \setminus \\ \{t:\, |\alpha_\lambda(t) - \alpha_\lambda(\tau)| > \varepsilon\} \cap \\ \cap \{|t-\tau| < 2\varepsilon\}}} \frac{f(\alpha_\lambda(t))\, \mu_\lambda(t)}{(\tau - t)^2} d\sigma_t, \tag{22}$$

где $\quad \sigma(\varepsilon) = \sigma(\varepsilon, \lambda, \tau) = \min\limits_{\{t:\, |\alpha_\lambda(t) - \alpha_\lambda(\tau)| = \varepsilon\}} |t - \tau|, \quad \tau = A_\lambda(z).$

Для краткости положим $U(\varepsilon) = (\{|t - \tau| > \sigma(\varepsilon)\} \setminus \{t:\ |\alpha_\lambda(t) - \alpha_\lambda(\tau)| > \varepsilon\}) \cap \cap \{|t - \tau| < 2\varepsilon\}$ (22) влечет с учетом (5):

$$|L_{\lambda,\varepsilon} f(z)| \leqslant S(f(\alpha_\lambda)\mu_\lambda)(\tau) + |f(z)|\,\|\mu_\lambda\|_\infty \times$$
$$\times \int\limits_{U(\varepsilon)} \frac{d\sigma_t}{|\tau - t|^2} + \|\mu_\lambda\|_\infty \int\limits_{|t-\tau|<2\varepsilon} \frac{f(\alpha_\lambda(t)) - f(\alpha_\lambda(\tau))}{|\tau - t|^2} d\sigma_t \leqslant$$
$$\leqslant S(f(\alpha_\lambda))\mu_\lambda(\tau) + |f(z)|\,\|\mu_\lambda\|_\infty \times$$
$$\times \int\limits_{U(\varepsilon)} \frac{d\sigma_t}{|\tau - t|^2} + c_f \|\mu_\lambda\|_\infty \frac{1}{1-|\lambda| w} \int\limits_{|t-\tau|<2\varepsilon} \frac{d\sigma_t}{|\tau - t|} \leqslant \tag{23}$$
$$\leqslant S(f(\alpha_\lambda)\mu_\lambda)(\tau) + |f(z)|\,\|\mu_\lambda\|_\infty \int\limits_{U(\varepsilon)} \frac{d\sigma_t}{|\tau - t|^2} + \frac{c_f\, \varepsilon}{(1-|\lambda|\, w)^2}.$$

Возьмем точку $z \overline{\in} \mathbf{E}$, тогда можно перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$ в (23), что дает

$$|L_\lambda f(z)| \leqslant S(f(\alpha_\lambda)\mu_\lambda)(\tau) + \frac{c\,|f(z)|}{1-|\lambda|\, w} \varlimsup_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{U(\varepsilon)} \frac{d\sigma_t}{|\tau - t|^2}. \tag{24}$$

Установим следующий вспомогательный результат.

Лемма. *Пусть* $z \overline{\in} \mathbf{E}$, *тогда при* $\tau = A_\lambda(z)$

$$\varlimsup_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{U(\varepsilon)} \frac{d\sigma_t}{|\tau - t|^2} \leqslant c, \tag{25}$$

где постоянная c *не зависит от* λ *и* τ.

Доказательство. Пусть $\tau = z = 0 \overline{\in} E$, т. е. функция A_λ дифференцируема в 0, а тогда и α_λ дифференцируема в точке $\tau = 0$. Поэтому $\alpha_\lambda(t) = P_\lambda t + Q_\lambda \bar{t} + o(|t|)$, причем поскольку

$$|P_\lambda|^2 - |Q_\lambda|^2 = \mu_\lambda(t) = \frac{1}{\nu_\lambda(z)} \geqslant (1+|\lambda|^2 w^2)^{-1},$$

то при t, описывающем окружность $\{|t| = \varepsilon\}$, точка $P_\lambda t + Q_\lambda \bar{t}$ описывает эллипс $e_\lambda(\varepsilon)$. Положим $o(t) = |t|\,\delta(t)$. Тогда при φ, пробегающем $[0, 2\pi)$, точка $\alpha_\lambda(\varepsilon e^{i\varphi})$ пробегает некоторую кривую $\gamma_\lambda(\varepsilon)$, минимальное расстояние которой до 0 есть $\sigma(\varepsilon)$ и $U(\varepsilon)$ есть область, ограниченная кривой $\gamma_\lambda(\varepsilon)$, пересеченная с кольцом $\{\sigma(\varepsilon) < |t| < 2\varepsilon\}$.

Отметим, что кривая γ_λ содержится в круге $\{|t| < 2\varepsilon\}$ в силу (4). Кроме того, $|\alpha_\lambda(t) - P_\lambda t - Q_\lambda \bar{t}| = |t|\,|\delta(t)|$, поэтому $\gamma_\lambda(\varepsilon)$ находится в $\varepsilon h(\varepsilon)$ окрестности эллипса $e_\lambda(\varepsilon)$, $h(\varepsilon) = \max\limits_{|t|=\varepsilon} |\delta(t)|$, т. е.

$$(|P_\lambda| - |Q_\lambda|)\,\varepsilon - \varepsilon h(\varepsilon) \leqslant \delta(\varepsilon) \leqslant (|P_\lambda| - |Q_\lambda|)\,\varepsilon + \varepsilon h(\varepsilon).$$

В интеграле (25) сделаем замену $t = \varepsilon T$, тогда область $U(\varepsilon)$ перейдет в область $U^*(\varepsilon)$, причем $d\sigma_t = \varepsilon^2 d\sigma_T$ и

$$\int\limits_{U(\varepsilon)} \frac{d\sigma_t}{|t|^2} = \int\limits_{U^*(\varepsilon)} \frac{d\sigma_T}{|T|^2}.$$

При достаточно малых ε $h(\varepsilon) < \frac{1}{2}(|P_\lambda| = |Q_\lambda|)$, поэтому область $U^*(\varepsilon)$ лежит в кольце $\frac{1}{2}(|P_\lambda| - |Q_\lambda|) < |T| < 2$. Пусть χ_ε — характеристическая функция $U^*(\varepsilon)$, тогда

$$\int\limits_{U^*(\varepsilon)} \frac{d\sigma_T}{|T|^2} = \int\limits_{|T|<2} \chi_\varepsilon(T)\,\frac{d\sigma_T}{|T|^2}. \tag{26}$$

Теперь в (26) можно перейти к пределу под знаком интеграла, так как

$$\frac{\chi_\varepsilon(T)}{|T|^2} \leqslant \frac{4}{(|P_\lambda| - |Q_\lambda|)^2}.$$

Функция $\chi_\varepsilon(T)$ при $\varepsilon \to 0$ поточечно сходится к характеристической функции эллипса $\{T\colon T = P_\lambda y + Q_\lambda \bar{y},\ |y| \leqslant 1\} \overset{\text{def}}{=} D_\lambda$, из которого выброшен круг $K_\lambda = |T| \leqslant \min\limits_{S \in \partial D_\lambda} |S|$.

Поэтому

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{U(\varepsilon)} \frac{d\sigma}{|t|^2} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{U^*(\varepsilon)} \frac{d\sigma_T}{|T|^2} = \int\limits_{D_\lambda \setminus K_\lambda} \frac{d\sigma_T}{|T|^2}.$$

Но пусть $\sigma = |P_\lambda| - |Q_\lambda|$ и меньшая ось D_λ лежит на вещественной оси. Тогда эллипс D_λ лежит в полосе $\Pi = \{|\mathrm{Re}\,\zeta| < \sigma\}$, поэтому

$$\int\limits_{D_\lambda \setminus K_\lambda} \frac{d\sigma_T}{|T|^2} = \int\limits_{\Pi \setminus K_\lambda} \frac{d\sigma_T}{|T|^2} \leqslant \int\limits_{\{|T|<4\sigma\} \setminus K_\lambda} \frac{d\sigma}{|T|^2} + \int\limits_{\Pi \setminus \{|T|<4\sigma\}} \frac{d\sigma}{|T|^2} \leqslant$$

$$\leqslant c + c\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} dx \int\limits_{\sigma}^{\infty} \frac{dy}{y^2} \leqslant c,$$

поскольку $K_\lambda = \{|T| < \sigma\}$, c — абсолютная постоянная. Лемма доказана.

Из леммы получим

$$|L_\lambda f(z)| \leqslant S(f(\alpha_\lambda)\,\mu_\lambda)(\tau) + c(1 - |\lambda|\,w)^{-1}|f(z)|, \tag{27}$$

поэтому, применяя к новой оценке (27) выкладки (8)—(10), получим

$$\|L_\lambda f\|_p \leqslant \frac{c_p}{1 - |\lambda|\,w}\|f\|_p. \tag{27'}$$

Теперь

$$T_{n,\varepsilon} f(z) = \frac{1}{2\pi i(n+1)} \int\limits_{|\lambda| = \rho} L_{\lambda,\varepsilon} f(z)\,\frac{d\lambda}{\lambda^{n+1}}, \tag{28}$$

где $\rho = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{w}$, поэтому

$$|T_{n,\varepsilon}f(z)| < \frac{1}{2\pi(n+1)\rho^{n+1}} \int\limits_{|\lambda|=\rho} |L_{\lambda,\varepsilon}f(z)|\,|d\lambda|. \tag{29}$$

Из (16) следует, что

$$\left(\int\limits_{C} d\sigma_z\left(\int\limits_{|\lambda|=\rho} ML_\lambda f(z)|\,d\lambda|\right)^p\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{|\lambda|=\rho} |d\lambda|\left(\int\limits_{C}(ML_\lambda f(z))^p\,d\sigma_z\right)^{1/p} \leqslant \frac{c_p\,\rho}{(1-\rho w)^3}\,\|f\|_p$$

и поэтому при

$$z \overline{\in} V,\ \operatorname{mes} V = 0,\ \int\limits_{|\lambda|=\rho} ML_\lambda f(z)\,|d\lambda| < \infty.$$

Поскольку $|L_{\lambda,\varepsilon}f(z)| \leqslant ML_\lambda f(z)$, то при $z \overline{\in} V \cup E$ можно перейти в неравенстве (29) к пределу при $\varepsilon \to 0$, причем справа под интегралом. В результате

$$|T_n f(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi(n+1)\rho^{n+1}} \int\limits_{|\lambda|=\rho} |L_\lambda f(z)|\,|d\lambda|.$$

Затем следует выкладка (11) с новой оценкой (27), и соотношение (1) установлено.

Ленинградское отделение Математического
института им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступила 20.XI.1977

Ն. Ա. ՇԻՐՈԿՈՎ. Որոշ սինգուլյար ինտեգրալ օպերատորների գնահատականները $L_p(C)$-ում (ամփոփում)

Դիցուք $v \in Lip_C 1$: Դիտարկվում են հետևյալ օպերատորները.

$$MT_n f(z) = \sup_{\varepsilon>0}\left|\int\limits_{|\zeta-z|>\varepsilon}\left(\frac{v(z)-v(\zeta)}{z-\zeta}\right)^n \frac{f(\zeta)}{(z-\zeta)^2}\,d\sigma_\zeta\right|,\quad n=0,1,2,\cdots.$$

Ապացուցվում է, որ MT_n օպերատորները սահմանափակ են $L^p(C)$, $1<p<\infty$ տարածությունում:

N. A. SHIROKOV. *Estimates in $L^p(C)$ of some singular integral operators* (summary)

Let $v \in Lip_C 1$. The following operators are considered:

$$MT_n f(z) = \sup_{\varepsilon>0}\left|\int\limits_{|\zeta-z|>\varepsilon}\left(\frac{v(z)-v(\zeta)}{z-\zeta}\right)^n \frac{f(\zeta)}{(z-\zeta)^2}\,d\sigma_\zeta\right|,\quad n=0,1,2,\cdots.$$

It is proved that operators MT_n are bounded on the space $L^p(C)$, $1<p<\infty$

ЛИТЕРАТУРА

1. *R. R. Gotfman, Y. Meyer.* Le double commutateur, Anal. Harm. d'Orsay, n° 180. 1976.
2. *A. P. Calderon.* Commutators of singular integral operators, Proc. Mat. Acad. Sci., USA. 53, 1965. 1092—1099.
3. *A. Benedek, R. Panzone.* Continuity properties of the Hilbert transform. J. Func. Anal., 7, № 2, 1971, 217—234.
4. *И. Стейн.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, Изд. „Мир", М., 1973.
5. *W. Stepanoff.* Sur les conditions de l'existence de la differentielle totale, Мат. сб., 32, 1925, 511—526.