ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XV, № 1, 1980 Математика

А. С. МАЕРГОЙЗ

ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ ТЕОРЕМЫ ПОЛИА И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯХ

Введение

Хорошо известна теорема Полиа о связи между индикаторной и сопряженной диаграммами целой функции экспоненциального типа ([1], стр. 114), давшая толчок многочисленным исследованиям, посвященным обобщениям этой теоремы на различные классы целых функций, ее приложениям в некоторых пограничных вопросах теории функций и функционального анализа (см., например, обзор в [2], стр. 17; [3], стр. 137; [4]). Что касается класса целых функций в $\mathbf{C}$, уточненного порядка, то в этом направлении известен „приближенный" аналог теоремы Полиа, принадлежащий В. Бернштейну [5]. Построенный в [6] ее полный аналог не нашел, однако, применения, поскольку „ассоциированная" функция рассматривалась на некоторой многолистной поверхности.

В данной работе предлагается обобщение теоремы Полиа в духе результатов М. Ф. Субботина, А. Е. Аветисяна, М. М. Джрбашяна ([2], стр. 17), для целых функций конечного порядка и нормального типа, причем „ассоциированная" функция, т. е. некоторый аналог преобразования Бореля целой функции экспоненциального типа, рассматривается как и в классическом случае, на комплексной плоскости. Это позволило, как и в [7], в случае целых функций порядка $\rho > 0$ и нормального типа, выяснить связь обобщенного индикатора целой функции уточненного порядка $\rho(r)$, где $\rho(r) \to \rho$ при $r \to \infty$, с ρ-выпуклым носителем аналитического функционала и „ρ-многоугольником Бореля" функции, голоморфной в окрестности O в C. Здесь мы отталкивались от подобных результатов Э. Бореля [8], Г. Полиа ([3], стр. 137), В. Бернштейна [5]. Результаты этой статьи частично анонсированы в [15].

Автор весьма признателен академику АН Армянской ССР М. М. Джрбашяну за внимание к этой работе, профессору Б. Я. Левину за постановку задачи и последующее всестороннее обсуждение центральных результатов этой статьи.

Список обозначений: L — риманова поверхность логарифма вместе с точкой $\Lambda = \{(0, \theta): \theta \in R^1\}$; $L(\beta; R) = \{(r, \varphi) \in L: r \geqslant R \geqslant 0; |\varphi| < \beta\}$; $L(\beta) = L(\beta, 0)$; $\alpha_\rho = \min\{\pi/2\rho, \pi\}$, $\rho > 0$; $\pi: L \to \mathbf{C}$ — отображение проектирования; $\pi(r, \theta) = re^{i\theta}$; $\pi(\Lambda) = 0$; $\Pi_\theta = \{(r, \varphi) \in L: r > 0; |\varphi - \theta| < \alpha_\rho\}$;

если $\omega = (r, \varphi) \in L$, или $\omega = re^{i\varphi} \in \mathbf{C}$, а $\alpha \in R^1$, то $\omega^\alpha = r^\alpha \cdot e^{i\alpha\varphi}$; $m\omega = (|m|\cdot|\omega|, \operatorname{Arg} m + \operatorname{Arg}\omega)$, где $m, \omega \in L$; если $(r, \varphi) \in L$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, то отождествляем (r, φ) и $re^{i\varphi} \in \mathbf{C}$;

$$\varphi_\rho(\omega) = \begin{cases} \operatorname{Re}\omega^\rho \cdot \exp\{-2\pi k\rho i\}, & \omega \in \overline{\Pi}_{2k\pi} \\ 0 & , \omega = \Lambda; \ \rho > \frac{1}{2}; \ \alpha_\rho \leqslant |\operatorname{Arg}\omega - 2\pi k| \leqslant \pi \end{cases}$$

— 2π — периодическая функция относительно $\operatorname{Arg}\omega$ на L; $\Phi_\rho = \varphi_\rho \circ \pi^{-1}$; $D_\rho(\theta;\ b) = \{p \in \mathbf{C}: \Phi_\rho(pe^{i\theta}) > b\}$, где $b > 0$.

§ 1. Вспомогательный аппарат

1°. Пусть $\rho > 0$; $\mathbf{B}_\rho = \{V\}$ — класс функций, заданных в $L(\gamma)$, где $\gamma > \pi(1 + 1/\rho)$ и таких, что

1) $V(t)$ — положительная при $(t, 0) = t > 0$, возрастающая строго выпуклая от $\ln t$ функция, причем $V(0) = 0$;

2) функция $V(\omega)$ голоморфна в $L(\gamma)$, непрерывна в $\overline{L(\gamma)}$ и

$$\lim_{t\to\infty} [V(t)]^{-1} \cdot V(t\omega) = \omega^\rho, \tag{1}$$

причем стремление к пределу равномерное на любом компакте $K \subset L(\gamma)$.

Интерес к этому классу объясняет следующая

Теорема А ([9]; [5], стр. 349; [10], стр. 99; [6], стр. 114). *Для любой целой функции f конечного порядка $\rho > 0$ существует уточненный порядок $\rho(r)$ такой, что $r^{\rho(r)} \in \mathbf{B}_\rho$.*

Отметим свойства функций класса $\mathbf{B}_\rho$, которые понадобятся в дальнейшем (ср. [5], [6]). В нижеприводимых формулах, кроме (3), характер стремления к пределу такой же, как в (1), а K — любой компакт в $L(\gamma)$.

а) $$\lim_{t\to\infty} [V(t)]^{-1} \cdot t \cdot V'(t\omega) = \rho\omega^{\rho-1}, \quad \omega \in K, \tag{2}$$

где $V'(r, \varphi) = [V \circ (\pi|_{\Pi_\varphi})^{-1}]'(re^{i\varphi})$. В частности, $(\ln t)^{-1} \cdot \ln V(t)$ — уточненный порядок:

$$\rho = \lim_{t\to\infty} [V(t)]^{-1} \cdot tV'(t) = \lim_{t\to\infty} (\ln t)^{-1} \cdot \ln V(t); \tag{3}$$

б) $$\lim_{|\omega|\to\infty} [V(\omega)]^{-1} \cdot \pi(\omega) \cdot V'(\omega) = \rho, \quad |\operatorname{Arg}\omega| \leqslant \beta < \gamma; \tag{4}$$

в) функция $v(\omega) = \omega^{-\rho} \cdot V(\omega)$ — медленно изменяющаяся, т. е.

$$\lim_{t\to\infty} [v(t)]^{-1} \cdot v(t\omega) = 1, \quad \omega \in K \subset L(\gamma);$$

г) $$\lim_{|\omega|\to\infty} [V(\omega)]^{-1} \cdot V(m\omega) = m^\rho; \quad \lim_{|\omega|\to\infty} [v(\omega)]^{-1} v(m\omega) = 1 \tag{5}$$

при $|\operatorname{Arg}\omega| \leqslant \beta < \gamma$ и $m \in L$, причем $|\omega|^{-1} \cdot \omega m \in K \subset L(\gamma)$.

Из (1), полагая, $K = \{(1, \varphi) \in L: |\varphi| \leqslant \beta < \gamma\}$, заключаем: для любого $\beta \in (0, \gamma)$ найдутся число $Q_\beta > 0$ и значение аргумента функции

V такие, что $V(\omega)\neq 0$; $|\operatorname{Arg} V(\omega)-\rho \operatorname{Arg}\omega|<\dfrac{\pi}{2}$ при $\omega\in L(\beta;\ Q_\beta)$.

В соответствие с этим определим отображение

$$\tilde V\colon \bigcup_{0<\beta<\gamma} L(\beta;\ Q_\beta)\to L;\ V(\omega)=(|V(\omega)|,\ \operatorname{Arg} V(\omega)). \tag{6}$$

Аналогом одного результата В. Бернштейна ([5], стр. 353) является

Предложение 1*. *Существует система чисел* $\{R_\beta,\ 0<\beta<\gamma\}$ $R_\beta\geqslant Q_\beta$ *такая, что* $\tilde V\colon \bigcup\limits_{0<\beta<\gamma} L(\beta;\ R_\beta)\to L$ *—взаимнооднозначное конформное отображение, причем обратное отображение* $\chi=\tilde V^{-1}$ *голоморфно в* $Y=\bigcup\limits_{0<\beta<\gamma} L(\rho\beta;\ T_\beta)$, *где* $\{T_\beta>0,\ 0<\beta<\gamma\}$ *— некоторая система чисел. Кроме того, функция* $U=\pi\circ\chi$ *обладает всеми свойствами следов функций класса* $\mathbf{B}_{\rho^{-1}}$ *на множестве* Y.

Доказательство. 1) Зафиксируем произвольно $\beta\in(0,\gamma)$. Полагая в (2) $K=\{(1,\ \varphi)\in L\colon |\varphi|\leqslant\beta\}$, получаем: $V'(\omega)\neq 0$, $\forall\omega\in L(\beta;\ P_1)$, если P_1 достаточно велико. Покажем, что для любого $c\in(0,\ 1)$ существует число $\alpha\in(0,1)$ такое, что при некотором $P\geqslant P_1$

$$|V(m)-V(\omega)|>c\cdot|V'(\omega)|\cdot|z-w|,\ \forall m\in\Omega_\alpha(\omega)\colon \omega\in L(\beta;\ P), \tag{7}$$

где $z=\pi(m)$; $w=\pi(\omega)$; $\Omega_\alpha(\omega)=\{m\in\Pi_{\operatorname{Arg}\omega}\colon |z-w|\leqslant\alpha\cdot|w|\}$, причем $\Omega_\alpha(\omega)\subset L(\gamma)$. Рассмотрим функцию $G(\omega,\ m)=[(z-w)\cdot V'(\omega)]^{-1}\times\times[V(m)-V(\omega)]$, $\omega\in L(\beta;\ P_1)$; $m\in L(\gamma)\cap\Pi_{\operatorname{Arg}\omega}$. Пусть $A(\omega)=[w\times\times V'(\omega)]^{-1}\cdot V(\omega)$, $\tau=(z-w)\cdot w^{-1}$. Тогда $G(\omega,\ m)=G_1(\omega,\ m)+G_2(\omega,\ m)$, где $G_1(\omega,\ m)=A(\omega)\cdot[(1+\tau)^\rho-1]\cdot\tau^{-1}$; $G_2(\omega,\ m)=A(\omega)\cdot(1+\tau)^\rho\times\times\tau^{-1}\cdot\{[v(\omega)]^{-1}v(m)-1\}$, $v(\omega)=w^{-\rho}\cdot V(\omega)$. Используя (4), находим: для любого $\delta_1\in(c,\ 1)$ существуют числа $\alpha\in(0,1)$ и $P_2>P_1$, такие, что

$$|G_1(\omega,\ m)|>\delta_1,\ \forall\omega\in L(\beta,\ P_2);\ m\in\Omega_\alpha(\omega)\subset L(\gamma). \tag{8}$$

Функция $X(\omega,\ \tau)=v((1+\tau)\ \omega)$ голоморфная по τ в окрестности круга $\{\tau\in\mathbf{C}\colon |\tau|\leqslant\alpha<1\}$ при каждом $\omega\in L(\beta;\ P_2)$. По лемме Шварца

$$|G_2(\omega,\ m)|\leqslant|A(\omega)|\cdot(1+\alpha)^\rho\cdot\alpha^{-1}\cdot M_\alpha(\omega),\ \forall\omega\in L(\beta;\ P_2),\ m\in\Omega_\alpha(\omega),$$

где $M_\alpha(\omega)=\sup\limits_{|\tau|=\alpha}|[v(\omega)]^{-1}\cdot X(\omega,\ \tau)-1|$. Отсюда и из (4), (5) получаем при некотором $P\geqslant P_2$

$$|G_2(\omega,\ m)|<\delta_1-c,\ \forall\omega\in L(\beta;\ P),\ m\in\Omega_\alpha(\omega). \tag{9}$$

Неравенство (7) вытекает теперь из (8), (9).

2) Пусть $A_v(r,\ \varphi)=\{(t,\ \theta)\in L;\ t\geqslant r;\ (1-\delta)\ V(t)\leqslant(1+\delta)\ V(r);\ |\theta-\varphi|\leqslant 2\delta\}$; $\Delta=(1+\delta)\cdot(1-\delta)^{-1}$. Выберем $\delta\in(0,1)$ так, чтобы $|1-\Delta^{1/\rho}\times\times e^{i2\delta}|<\alpha$, $2\delta<\gamma-\beta$. Если $U(s)$—функция, обратная к $V(t)$, то $y(s)=(\ln s)^{-1}\cdot\ln U(s)\to 1/\rho$ при $s\to\infty$, и $y(s)$— уточненный порядок

---

* В (5) рассматривался плоский случай $\gamma<\min\{\pi,\ \pi/\rho\}$.

([5], [6], стр. 118). Поэтому $\lim\limits_{r\to\infty} r^{-1} U(\Delta\cdot V(r)) = \Delta^{1/\rho}$ (см. [1], стр. 60) и существует $S_1 > P$ такое, что

$$|\operatorname{Arg} \tilde{V}(\omega) - \rho \operatorname{Arg}\omega| < \rho\delta; \ A_\delta(\omega) \subset \Omega_\alpha(\omega),\ \forall\omega \in L(\beta;\ S_1). \tag{10}$$

3) Выберем число $\varkappa \in (0,\ 1)$ так, чтобы

$$(1-\delta)(1+\varkappa) < (1+\delta)\cdot(1-\varkappa). \tag{11}$$

Из (1) заключаем: найдется S_2 со свойством:

$$(1-\varkappa)\cdot|V(\omega)| < V(|\omega|) < (1+\varkappa)\cdot|V(\omega)|,\ \forall\omega \in L(\beta;\ S_2). \tag{12}$$

4) Отображение $\tilde{V}$ — взаимнооднозначное в $L(\beta;\ R_\beta)$, где $R_\beta = \max\{S_1,\ S_2\}$. Действительно, пусть $m,\ \omega \in L(\beta;\ R_\beta)$; $m \neq \omega$; $|m| \geqslant |\omega|$. Если $m \in \Omega_\alpha(\omega)$, то из (7) вытекает: $V(m) \neq V(\omega)$ и $\tilde{V}(m) \neq \tilde{V}(\omega)$. Если $m \in L(\beta;\ R_\beta)/\Omega_\alpha(\omega)$, то $m \in L(\beta;\ R_\beta) \setminus A_\delta(\omega)$. Тогда либо $|\operatorname{Arg} m - \operatorname{Arg}\omega| > 2\delta$ и из (10) находим: $\tilde{V}(m) \neq \tilde{V}(\omega)$ либо $(1-\delta)\ V(|m|) > (1+\delta)\ V(\omega)$ и из (12) имеем $(1-\varkappa)\cdot(1+\delta)\cdot|V(\omega)| < (1+\varkappa)\cdot(1-\delta) \times |V(m)|$. Согласно (11), это возможно, когда $|V(m)| > |V(\omega)|$, т. е. $\tilde{V}(m) \neq \tilde{V}(\omega)$. Итак, обратная функция $\tilde{V}^{-1} = \lambda$ существует в $\tilde{V}(L(\beta;\ R_\beta))$.

5) Образ B_β угла $L(\beta;\ R_\beta)$ при голоморфном отображении $\tilde{V}$ — односвязная область на L, содержащая бесконечный отрезок $\{(s,\ 0) \in L: s > V(R_\beta)\}$ — см. свойство 1) функции V. Из (10) следует, что при некоторых $T^{(i)} = T^{(i)}(\delta,\ \beta)$, $i = 1,\ 2$ имеем: $L((\beta-\delta)\rho;\ T^{(1)}) \subset B_\beta \subset L(\rho(\beta+\delta);\ T^{(2)})$, причем δ можно взять как угодно малым. Остальные утверждения по существу доказаны в [5], стр. 354—357.

2°. В дальнейшем потребуются следующие интегральные свойства функции класса $\mathbf{B}_\rho$:

Предложение 2. *Пусть* $\beta \in (\pi/\rho,\ \gamma)$; $a > 0$; $r > 0$; $\varphi_0 \in (\pi/2,\ \frac{\pi}{2} + \rho\alpha_\rho)$, *причем в обозначениях предложения* 1 *для всех* $\varphi \in [-\varphi_0,\ \varphi_0]$

$$\Gamma_\varphi = \Gamma(\varphi;\ r;\ a) = \{V(r)(a + te^{i\varphi}),\ t > 0\} \subset L(\pi;\ T_\beta), \tag{13}$$

$$N_\varphi(\psi) = \int\limits_{\Gamma_\varphi} \exp\{w - V(\psi\lambda(w))\}\,dw;\ 0 < \alpha < \alpha_\rho;\ G_\varphi = \{\psi \in L(\alpha):$$

$\operatorname{Re}(\psi^\rho - 1)\, e^{i\varphi} > 0\}$. *Тогда*

1) *при любом* $\varphi \in [-\varphi_0,\ \varphi_0]$ *функция* N_φ *голоморфна в области* G_φ;

2) *существует функция* N, *голоморфная в области* $D = L(\alpha) \setminus [0,1]$ *такая, что* $N(\psi) = N_\varphi(\psi)$, $\psi \in D \cap G_\varphi$;

3) *функции* $N_+(\varphi) = \lim\limits_{z\to\varphi;\ \operatorname{Im} z>0} N(z)$; $N_-(\varphi) = \lim\limits_{z\to\varphi;\ \operatorname{Im} z<0} N(z)$ *непрерывны на полуинтервале* $[0,1)$, *причем* $N_+(0) = N_-(0)$.

4) *справедливо условие*

$$\lim_{\varphi\to 1} \rho(\varphi - 1)\cdot N(\varphi) = 1. \tag{14}$$

Доказательство. 1) Учитывая, что $w \equiv V(\chi(w))$, а множество

$$G_\varphi = \{\varphi \in L(\alpha)\colon \operatorname{Re}(\varphi^\rho - 1)\, e^{i\varphi} > 0\} \neq \varnothing, \tag{15}$$

имеем из (1)

$$B(w, \varphi) \overset{\text{опр}}{=} \exp\{w - V(\varphi\chi(w))\} = \exp\{w[(1 - \varphi^\rho) + \varepsilon(w)]\}, \tag{16}$$

где $\varepsilon(w) \to 0$ при $|w| \to \infty$ равномерно на любом компакте $K \subset \{\varphi \in L(\alpha)$ $\operatorname{Re}(\varphi^\rho - 1)\, e^{i\varphi} \geqslant b > 0\}$. Тогда существуют t_0, $A > 0$, такие, что

$$N_\varphi(\varphi) \leqslant \int_0^{t_0} |B((a + te^{i\varphi})\, V(r),\ \varphi)|\, dt + A\exp\{aV(r)\operatorname{Re}(1 - \varphi^\rho)\},\ \forall\varphi \in K.$$

Т. е. интеграл $N_\varphi(\varphi)$ сходится равномерно на K по φ. Поэтому функция $N_\varphi(\varphi)$ голоморфна в G_φ, $\forall\varphi \in [-\varphi_0, \varphi_0]$ (см. (15)). Если $0 \in G_\varphi$ (при $\varphi \in (\pi/2, \varphi_0)$), то функция $N_\varphi(\varphi)$ непрерывна в 0 относительно G_φ.

2) Пусть $0 < \varphi_2 - \varphi_1 < \pi$; $\varphi \in G_{\varphi_1} \cap G_{\varphi_2}$; $C_t = \{w \in \mathbb{C}\colon\ w = V(r) \times \times (a + te^{i\varphi}), \varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2\}$. Тогда $\varphi \in G_\varphi$, $\forall\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$ и $\max\{\operatorname{Re}(1 - \varphi^\rho)\, e^{i\varphi}$, $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]\}$. Проводя рассуждения, аналогичные описанным выше (см. (16)), заключаем, что $\int\limits_{C_t} B(w, \varphi)\, dw \to 0$ при $t \to \infty$. Отсюда $N_{\varphi_1}(\varphi) \equiv N_{\varphi_2}(\varphi)$, $\varphi \in G_{\varphi_1} \cap G_{\varphi_2}$. Итак, утверждения 1) и 2) предложения 2 выполняются.

3) Представляя функцию $B(w, \varphi)$ (см. (16)) в виде $\exp\{w(1 - \varphi^\rho)\} \times \exp\{\varphi^\rho w - V(\varphi\chi(w))\}$, интегрируя по частям и используя формулу $U'(w) = [V'(\chi(w))]^{-1}$, $U = \pi \circ \chi$, находим

$$N_\varphi(\varphi) = (\varphi^\rho - 1)^{-1}\cdot[B(aV(r), \varphi) + J_\varphi(\varphi)],\ \varphi \in G_\varphi, \tag{17}$$

где

$$J_\varphi(\varphi) = \int\limits_{\Gamma_\varphi} B(w, \varphi)\cdot H(w, \varphi)\, dw;\ H(w, \varphi) = \varphi^\rho - \varphi\cdot V'(\varphi\chi(w)) \times$$
$$\times [V'(\chi(w))]^{-1}.$$

Из (17) вытекает, что J_φ — голоморфная функция в G_φ,

$$\forall\varphi \in [-\varphi_0, \varphi_0] \text{ и } J_{\varphi_1}(\varphi) \equiv J_{\varphi_2}(\varphi),\ \varphi \in G_{\varphi_1} \cap G_{\varphi_2},\ 0 < \varphi_2 - \varphi_1 < \pi$$

(см. (2)). Для того чтобы выполнялось равенство $\lim\limits_{\varphi\to 1} \rho(\varphi - 1)\, N_\varphi(\varphi) = 1$, $\forall\varphi \in [-\varphi_0, \varphi_0]$, равносильное (14), необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\varphi\to 1} J_\varphi(\varphi) = 0,\ |\varphi| \leqslant \varphi_0. \tag{18}$$

4) Пусть $K(w, \varphi) = w^{-1} \cdot V(\varphi\chi(w))$, $\delta \in (0, 1)$; $S_\delta = \{\varphi \in \mathbf{C}: |\varphi - 1| \leqslant \delta\}$; $M_\delta(w) = \sup_{\varphi \in S_\delta} |\varphi^\rho - K(w, \varphi)|$; $D_\delta = \sup\{|\varphi - 1| \cdot |\varphi^\rho - 1|^{-1}, \varphi \in S_\delta \setminus \{1\}\}$. Из (1) следует, что существует $t_1 = t_1(\delta)$ такое, что $M_\delta(V(r)(a + t e^{i\varphi})) < \delta^2 \cdot D_\delta^{-1}$, $t > t_1$, $|\varphi| \leqslant \varphi_0$. Из леммы Шварца имеем для $\varphi \in S_\delta \setminus \{1\}$; $|\varphi| \leqslant \varphi_0$

$$\left|\frac{1 - K(w, \varphi)}{1 - \varphi^\rho} - 1\right| = |\varphi^\rho - 1|\, |\varphi^\rho - K(w, \varphi)| \leqslant \frac{M_\delta(w) \cdot |\varphi - 1|}{\delta\, |\varphi^\rho - 1|}, \tag{19}$$

где $w = V(r)(a + t e^{i\varphi})$, $t > t_1$. Из леммы Шварца получаем также

$$|H(w, \varphi)| \leqslant Q_\delta(w) \cdot |\varphi - 1| \cdot \delta^{-1}, \ \forall \varphi \in S_\delta; \ Q_\delta(w) = \sup_{\varphi \in S_\delta} |H(w, \varphi)|.$$

Отсюда аналогично предыдущему, обнаруживаем:

$$|H(V(r)(a + t e^{i\varphi}); \varphi)| \leqslant \delta\, |\varphi - 1|, \ \forall t \geqslant t_2 = t_2(\delta), \ \varphi \in S_\delta; \ |\varphi| \leqslant \varphi_0. \tag{20}$$

Оценим теперь интеграл $J_\varphi(\varphi)$ при $|\varphi| \leqslant \varphi_0$ (см. (17)). Пусть $t_3 = \max\{t_1, t_2\}$; $\varepsilon \in (0, \pi/2)$; $G_\varphi(\varepsilon, \delta) = \{\varphi \in G_\varphi \cap S_\delta: |\varphi + \operatorname{Arg}(\varphi^\rho - 1)| < \varepsilon\}$; $\delta < \cos\varepsilon$. Из (19), (20) находим при

$$\varphi \in G_\varphi(\varepsilon, \delta): |J_\varphi(\varphi)| \leqslant \delta\, |\varphi - 1| \int_0^{t_3} |B(V(r)(a + te^{i\varphi}); \varphi)|\, dt + Me^{aV(r)\operatorname{Re}(1-\varphi^\rho)} \times$$

$$\times \int_{t_3}^{\infty} \exp\{-tV(r)|\varphi^\rho - 1|(\cos\varepsilon - \delta)\}\, dt.$$

Здесь $M = M(t_3) = \mathrm{const}$. Учитывая, что δ можно взять как угодно малым, убеждаемся в справедливости (18) и, следовательно, (14). Предложение доказано.

Предложение 3. *Пусть* $0 < b < a$. *Существуют* $\alpha \in (0, \alpha_\rho)$, $A, B, C > 0$ *такие, что в обозначениях предложения* 2 *при* $r > A$*

$$|N(\varphi)| \leqslant B \exp\{-b V(|\varphi|)\}, \ \forall \varphi \in L(\alpha); \ |\varphi| > C. \tag{21}$$

Доказательство. Пусть $b < d < a$. Из предложения 1 и (1) получаем: существует $A > 0$ со свойством

$$r^{-\rho} \cdot [\chi(aV(r))]^\rho > d, \ \forall r > A. \tag{22}$$

Возьмем $\alpha \in (0, \alpha_\rho)$ такое, что $d\cos\alpha_\rho > b$. Рассмотрим функцию

$$y(|\varphi|, \lambda, w) = [V(|\varphi|)]^{-1} \cdot \operatorname{Re}[V(2\chi(w))\, V(|\varphi|\, e^{i\lambda}\chi(w))],$$

где

$$|\lambda| \leqslant \alpha; \ |\varphi|\, e^{i\lambda} \in \{z \in L(\alpha): \operatorname{Re} z^\rho > 2^\rho\} \overset{\text{опр}}{=} D; \ w \in \Gamma_0,$$

(см. (13)). Из (1) имеем:

$$\lim_{w \to \infty} y(|\varphi|, \lambda, w) = -\infty, \ \forall \varphi \in D.$$

* Функция $N(\varphi)$ зависит от r, см. предложение 2.

Поэтому

$$z(|\varphi|) = \{(\mu, u) \in [-\alpha, \alpha] \times \Gamma_0 : x(|\varphi|) \overset{\text{опр}}{=} \sup \{y(|\varphi|, \lambda, w), |\lambda| \leqslant \alpha;$$

$$w \in \Gamma_0\} = y(|\varphi|, \mu, u)\} \neq \varnothing. \text{ Пусть } W(|z|) = \inf \{u : (\mu, u) \in Z(|z|).$$

Поскольку (см. (1))

$$\overline{\lim_{|\varphi| \to \infty}} x(|\varphi|) \lim_{|\varphi| \to \infty} y(|\varphi|, \lambda, w) = -\omega^{\rho} \cos \lambda\rho,$$

где $\omega = r^{-1} \cdot \chi(w)$, то $W(|\varphi|) \leqslant M < \infty$, $\forall |\varphi| > K$; $\varphi \in D$ при некоторых $M, K > 0$. Выберем $0 < \varepsilon < d \cos \alpha\rho - b$. Из (1) находим: существует $C > K$ со свойством:

$$y(|\varphi|, \lambda, w) \leqslant -\omega^{\rho} \cos \lambda\rho + \varepsilon, \ \forall |\varphi| > C; \ |\lambda| \leqslant \alpha; \ w \in [aV(r), M].$$

Учитывая, что при

$$|\varphi| > C \ x(|\varphi|) = \sup \{y(|\varphi|, \lambda, w) : |\lambda| \leqslant \alpha; \ w \in [aV(r), M]\}$$

и (22), выводим отсюда: $x(|\varphi|) \leqslant -d \cos \alpha\rho + \varepsilon < -b$, $\forall |\varphi| > C$.

Итак

$$\operatorname{Re} [V(2\chi(w)) - V(\varphi\chi(w))] \leqslant -bV(|\varphi|), \ \forall |\varphi| > C; \ \varphi \in L(\alpha); \ w \in \Gamma_0. \tag{23}$$

Имеем: $N(\varphi) = N_0(\varphi)$ при $\varphi \in D \subset G_0$ (см. предложение 2). Из (23) поэтому заключаем о справедливости (21)

$$\int_{\Gamma_0} \exp \{w - V(2\chi(w))\} \, dw = B \ (\varphi = 2 \in G_0).$$

3°. Некоторые свойства множества $\chi(\Gamma(\varphi, r, a))$ (см. (13)) выясняет

Предложение 4. *Пусть* $a > b > 0$;

$$Q_{\rho}(\lambda, b) = \left\{ \omega \in L : \operatorname{Re} \omega^{\rho} e^{i\rho\lambda} > b; \ |\operatorname{Arg} \omega + \lambda| \leqslant \frac{\pi}{2\rho} \right\}. \tag{24}$$

Существуют числа

$$S > 0; \ \alpha \in (0, \alpha_{\rho}); \ \varphi_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \rho\alpha_{\rho} \right), \ \varphi_0 < \alpha\rho + \frac{\pi}{2},$$

такие, что

$$\tau^{-1} \chi(\Gamma(\varphi, |\tau|, a)) \subset Q_{\rho}(\theta - \alpha \operatorname{sgn} \varphi), \ \forall |\tau| > S; \ |\varphi| \leqslant \varphi_0, \tag{25}$$

где $\theta = \arg \tau$. *Если, кроме того,* $\operatorname{Arg} z = \theta - \alpha \operatorname{sgn} \varphi$, *то для любого* $\varphi \in [-\varphi_0, \varphi_0]$ *существует* $R_0 = R_0(|\tau|)$ *со свойством:*

$$\operatorname{Re} V(z/\tau \ \chi(w)) \geqslant b \cdot V(|z|), \ \forall |z| > R_0; \ w \in \Gamma(\varphi, |\tau|, a). \tag{26}$$

Доказательство. Возьмем $\alpha \in (0, \alpha_{\rho})$, так, чтобы $a \cos \alpha\rho > b$. Выберем $\varphi_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \rho\alpha_{\rho} \right)$ со свойством $\varphi_0 < \alpha\rho + \pi/2$. Из предложения 1, используя свойства функций класса $\mathrm{B}_{\rho-1}$, находим: для всех $r > R_1 = R_1(\varepsilon)$; $\varphi \in [-\varphi_0, \varphi_0]$ $\Gamma_\varphi \subset \Pi(L(\pi, T_\beta))$ (см. (13)), где $\varepsilon > 0$, и $|\mathrm{Arg}\, \chi(w) - \rho^{-1} \arg w| < \varepsilon$, $\forall w \in \Gamma_\varphi$. С другой стороны, если, например, $\varphi > 0$, то $0 \leqslant \arg w \leqslant \varphi$, $\forall w \in \Gamma_\varphi$; $\varphi \in [0, \varphi_0]$; $r > R_1$. Поэтому при тех же предположениях $\varepsilon < \mathrm{Arg}\, \chi(w) < \varphi/\rho + \varepsilon$. Полагая, что

$$\varepsilon < \rho^{-1} \cdot \min\left\{\alpha\rho + \frac{\pi}{2} - \varphi_0,\ \pi/2\right\},$$

заключаем отсюда: $|\mathrm{Arg}\, \chi(w) - \alpha| < \dfrac{\pi}{2\rho}$, $\forall w \in \Gamma_\varphi$; $r > R_1$, $0 < \varphi \leqslant \varphi_0$. Чтобы убедиться в справедливости (25) теперь достаточно заметить, что $r \equiv \chi(V(r))$

$$\varliminf_{r \to \infty} T_r \geqslant a \cos \rho\alpha > b, \tag{27}$$

где $T_r = \inf\{\mathrm{Re}\, r^{-\rho} \cdot [\chi(w)]^\rho - e^{i\rho\alpha \operatorname{sgn} \varphi},\ w \in \Gamma_\varphi;\ |\varphi| \leqslant \varphi_0\}$ (см. доказательство предложения 3). По аналогичным причинам из (27) вытекает (26), поскольку

$$\varliminf_{s \to \infty} \inf_{w \in \Gamma_\varphi} \mathrm{Re}\, [V(s)]^{-1} \cdot V(s/r\, e^{-i\alpha \operatorname{sgn} \varphi})] > b.$$

§ 2. Аналог теоремы Полиа

1°. Пусть $\rho > 0$, $V \in \mathrm{B}_\rho$. Рассмотрим класс $\mathfrak{M}_\rho(V) = \{f\}$ целых функций в $\mathbf{C}$, таких, что при некоторых $M = M(f)$, $m = m(f) > 0$

$$|f(z)| \leqslant M \exp\{mV(|z|)\},\ \forall z \in \mathbf{C}. \tag{28}$$

Определение 1. ([5]; [11], стр. 324; [12]). Пусть

$$\Delta_k = \rho \cdot \int_0^\infty e^{-V(t)} \cdot t^k dt;\ f(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{a_k}{\Delta_k} z^k$$

— целая функция класса $\mathfrak{M}_\rho(V)$. Ее V-преобразованием Бореля назовем функцию

$$F(p) = \sum_{k=0}^\infty \frac{a_k}{p^{k+1}}. \tag{29}$$

Это преобразование осуществляет изоморфизм класса $\mathfrak{M}_\rho(V)$ и класса функций, голоморфных в окрестности ∞: целая функция f удовлетворяет условию (28) тогда и только тогда, когда ряд (29) сходится при всех $|p| > m^{1/\rho}$ ([1], стр. 61), поскольку $\chi(k) \cdot (\rho e)^{-1/\rho} \sim \sqrt[k]{\Delta_k}$, где $\chi(s)$ — функция, обратная к $V(t)$ ([5], стр. 370; [13], теорема 13.5).

Пусть $P_\rho = \{h\}$ — класс конечных неотрицательных тригонометрически — ρ-выпуклых 2π-периодических функций в R^1. Тогда $\mathfrak{M}_\rho(V) =$

$= \bigcup \mathbf{P}_\rho(V;\ h) | h \in \mathbf{P}_\rho$, где $\mathbf{P}_\rho(V;\ h) = \{f\}$—класс целых функций, таких, что при некотором $A = A(f, \varepsilon)$ и любом $\varepsilon > 0$

$$|f(re^{i\theta})| \leqslant A \exp\{(h(\theta) + \varepsilon(V(r)\},\ \forall z = re^{i\theta} \in \mathbf{C}. \tag{30}$$

Напомним некоторые факты, связанные с ρ-выпуклыми множествами.

Определение 2 ([11], стр. 333; [7]). Пусть $\rho > 0$; $0 \leqslant \theta_2 - \theta_1 \leqslant 2\pi_\rho$; $\Delta(\theta_1,\ \theta_2) = \{z = re^{i\theta} \in \mathbf{C}:\ \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2\}$. Множество E в $\mathbf{C}$ называется ρ-выпуклым, если $D \in E$ и при любых допустимых значениях θ_1, θ_2 образ $\Delta(\theta_1,\ \theta_2) \cap E$ при отображении $z \to z^\rho$ выпуклое множество.

Для любой функции $h \in p_\rho$

$$K_h = \{p \in \mathbf{C}:\ \Phi_\rho(pe^{i\theta}) \leqslant h(\theta),\ \forall \theta \in R^1\}^* \tag{31}$$

—единственный ρ-выпуклый компакт, ρ-опорной функцией которого является h, т. е.

$$h(\theta) = \sup_{p \in K_h} \Phi_\rho(pe^{i\theta})\ [7].$$

Нижеследующее интегральное представление функции $F(p)$ (29) в близкой форме есть в [5], стр. 379; [11], стр. 330 (случай $\Delta_k = \Gamma\left(\frac{k}{\rho} + \mu\right)$; [12]).

Лемма 1. *Пусть* $\rho > 0$; $V \in \mathbf{B}_3$; $h \in P_\rho$; $f \in \mathbf{P}_\rho(V;\ h)$. *Тогда* ($\operatorname{Arg} z = \theta$)

$$F_\theta(r,\ \varphi) \overset{\text{опр}}{=} \rho \cdot \int_0^\infty \exp\{-V((rt,\ \theta + \varphi))\} f(te^{i\theta})\, d(te^{i\theta})$$

функция, голоморфная в области $Q_\rho = Q_\rho(\theta;\ h(\theta))$ *(см. (24)) при любом* $\theta \in R^1$, 2π*-периодическая по* φ, *когда* $\rho < 1/2$, *причем* $\{H_\theta(p),\ p \in D_\rho(\theta;\ h(\theta))^{**};\ \theta \in R^1\}$, *где* $H_\theta(p) = F_\theta \circ \pi^{-1}(p)$, $\pi^{-1}(p) \in Q_\rho$ — *аналитическое продолжение* V*-преобразования Бореля* $F(p)$ *функции* f *во внешность* ρ*-выпуклого компакта* K_h (31).

Доказательство. Голоморфность функции $F_\theta(\omega)$ объясняется равномерной сходимостью интеграла $F_\theta(\omega)$ на любом компакте $K \subset Q_\rho$ (см. доказательство предложения 2,1)). Обычным путем (см., например, [1], стр. 115) доказывается при некотором $R > 0$ тождество

$$F_\theta(r,\ -\theta) \equiv F(re^{i\theta}),\ \forall r > R. \tag{32}$$

При $\rho \geqslant 1/2$ из теоремы единственности получаем: $H_\theta(p)$— аналитическое продолжение функции $F(p)$ в $D_\rho(\theta;\ h(\theta))$.

При $\rho < 1/2$ ∞ — внутренняя точка $D_\rho(\theta;\ h(\theta))$. Функция $F \circ \pi$— голоморфная 2π-периодическая на $A = \{\omega \in L:\ |\omega| > m^{1/\rho}\}$, где

$$m = \max_{\psi \in R^1} h(\psi) = h(\theta_0) \geqslant 0,\ |\theta - \theta_0| \leqslant \pi \tag{33}$$

(см. (30), (28)). По теореме единственности для связных комплексно-одномерных аналитических многообразий из (32) выводим:

---

*, ** См. список обозначений.

$$F \circ \pi(\omega) = F_0(\omega), \ \forall \omega \in A \cap Q_\rho. \qquad (34)$$

Луч $\{(r, -\theta+\pi) \in L: r^\rho \cos \pi\rho > h(\theta)\}$, который проектируется в разрез области $D_\rho(\theta; h(\theta))$ по лучу $\operatorname{Arg} p = -\theta + \pi$, принадлежит $A \cap Q_\rho$: $h(\theta) \geqslant h(\theta_0) \cos \rho(\theta - \theta_0) \geqslant m \cos \pi\rho$ (см. (33); [1], стр. 78). Отсюда и из (32) вытекает аналогичное заключение относительно $H_0(p)$ и при $0 < \rho < 1/2$. По этой же причине $F_\theta(\omega)$ — 2π-периодическая функция в Q_ρ: если $\omega_1, \omega_2 \in Q_\rho$, $\operatorname{Arg} \omega_2 - \operatorname{Arg} \omega_1 = 2\pi$, то $\omega_1, \omega_2 \in A$.

Так как K_h — звездный компакт, то $\mathbf{C} \diagdown K_h$ — односвязная область на сфере Римана ($F(\infty) = 0$). Отсюда и из теоремы о монодромии заключаем о справедливости леммы.

2°. Рассмотрим иной вид связи между функциями, голоморфными в окрестности ∞ в $\mathbf{C}$ и целыми функциями класса $\mathfrak{M}_\rho(V)$, где $V \in \mathbf{B}_\rho$, $\rho > 0$.

Предложение 5. *Пусть в обозначениях предложения* 2

$$\Phi(\varphi) = N_+(\varphi) - N_-(\varphi); \ R > 1; \ L_R(\delta) = \{\varphi \in \mathbf{C}: |\arg \varphi| < \delta; |\varphi| < R\};$$

$\psi(z)$ — *функция, голоморфная в секторе* $L_R(\delta)$, *непрерывная в его замыкании. Тогда*

1) *справедлива формула*

$$\psi(1) = \frac{\rho}{2\pi i}\left[\int\limits_{\partial L_R} N(\varphi)\psi(\varphi)\,d\varphi + \int\limits_0^1 \Phi(\varphi)\psi(\varphi)\,d\varphi\right], \qquad (35)$$

где последний интеграл понимается в смысле Римана, а ∂L_R — *граница сектора* L_R, *ориентированная в положительном направлении;*

2) *если*

$$d_k = \frac{\rho}{2\pi i}\int\limits_0^1 \Phi(\varphi)\varphi^k\,d\varphi, \ k = 0, 1, \cdots,$$

то $\lim\limits_{k\to\infty} d_k = 0$.

Доказательство. Формула (35) вытекает из интегральной теоремы Коши. Достаточно рассмотреть контур, объединяющий множество ∂L_R, отрезок $[0, 1-\varepsilon]$, $0 < \varepsilon < 1$, дважды проходимый в противоположных направлениях и окружность $\{\varphi \in \mathbf{C}: |\varphi - 1| = \varepsilon\}$, отрицательно ориентированную, а затем перейти к пределу при $\varepsilon \to 0+$. Утверждение 2) объясняется равномерной сходимостью по переменной k интеграла d_k (признак Абеля) и непрерывностью подынтегральной функции.

Сопоставим теперь функции $F(p) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{p^{k+1}}$, голоморфной в окрестности ∞ в $\mathbf{C}$, целую функцию (см. определение 1 и предложение 5)

$$\hat{f}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{\Delta_k}(1-d_k)z^k.$$

Аналогично предыдущему устанавливаем, что $\hat{f}\in\mathfrak{M}_\rho(V)$. Эта функция с функцией $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{\Delta_k}z^k$, V-преобразование которой совпадает с F, связана соотношением (см. предложение 5)

$$\hat{f}(z)=\frac{\rho}{2\pi i}\int_{\partial L_R} f(\alpha z)\,N(\alpha)\,d\alpha,\ \forall R>1. \tag{36}$$

Согласно (35), достаточно доказать, что

$$\hat{f}(z)=f(z)-\frac{\rho}{2\pi i}\int_0^1 f(\alpha z)\,\Phi(\alpha)\,d\alpha.$$

Интегрируя по частям последний интеграл, используя непрерывность функции $\int_0^{\alpha}\Phi(\beta)\,d\beta$ (Φ — функция, интегрируемая по Риману на $[0,1]$) и равномерную сходимость на любом компакте степенного ряда, в который разлагается целая функция, убеждаемся в том, что

$$\frac{\rho}{2\pi i}\int_0^1 f(\alpha z)\,\Phi(\alpha)\,d\alpha=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d_k\cdot a_k}{\Delta_k}z^k.$$

Отсюда и вытекает формула (36).

Другой вид ассоциации, отличный от данного, между целыми функциями класса $\mathfrak{M}_\rho(V)$ и функциями, голоморфными в окрестности ∞, рассматривали В. Бернштейн [5] и Ф. И. Гече [12] при построении „приближенных" аналогов теоремы Полиа.

Именно для функции $\hat{f}$, а не для f, существует удобное для дальнейших рассмотрений интегральное представление через голоморфную в окрестности ∞ функцию F. Соответствующая интегральная формула, полученная ниже, развивает результаты А. Макинтайра [14] и М. М. Джрбашяна ([11], стр. 327), рассматривавших $\Delta_k=\Gamma\left(\frac{k}{\rho}+\mu\right)$ соответственно при $\mu=1/\rho$ и $\operatorname{Re}\mu>0$ (см. определение 1 — тогда $d_k\equiv 0$; $k=0, 1, 2,\cdots$). Ее доказательство проводится по схеме А. Макинтайра [14].

Теорема 1*. *Пусть* $\rho>0$; $V\in\mathfrak{M}_\rho$; χ — *отображение, обратное к* $\tilde{V}$ (6); F — *функция, голоморфная в окрестности* ∞; $U=\pi\circ\chi$.

---

* В [15] эта теорема анонсирована для случая $\hat{f}=f$; $d_k=d_k(V)\equiv 0$, $k=0, 1, 2,\cdots$, причем это условие в формулировке теоремы 1 в [15] опущено по недосмотру автора.

Существуют $a,\ R>0$; $\varphi_0\in\left(\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}+\rho\alpha_\rho\right)$ *такие, что при* $|\tau|>R$; $\frac{\pi}{2}<\varphi\leqslant\varphi_0$

$$\hat f(\tau)=\frac{V(|\tau|)}{2\pi i\tau}\int\limits_{\lambda(a,\varphi)}\exp\{V(|\tau|)\varphi\}\cdot F(\tau^{-1}\cdot U(V(|\tau|\varphi))\,d\varphi, \qquad (37)$$

где $\lambda(a,\varphi)=\{\varphi=a+te^{\pm i\varphi};\ t\geqslant 0\}$ — *бесконечный контур, ориентированный в направлении возрастания* $\arg\varphi$.

Доказательство. 1) Формула (37) эквивалентна формуле

$$\hat f(\tau)=(2\pi i\tau)^{-1}\cdot[J_\varphi-J_{-\varphi}],\ J_\mu=\int\limits_{\Gamma_\mu}e^w\cdot F[\tau^{-1}\cdot U(w)]\,dw, \qquad (38)$$

где $\Gamma_\mu=\Gamma(\mu,|\tau|,a)$ (см. (13)), $\mu=\pm\varphi$; $\varphi>\frac{\pi}{2}$. Выберем $a>m>\tau$, где m — связанная с f постоянная, согласно (28), и пусть $b\in(m,a)$ ($f,\ \hat f\in\mathfrak{M}_\rho(V)$ — см. выше). Из предложения 4 вытекает существование чисел $S>0$; $\alpha\in(0,\alpha_\rho)$, $\varphi_0\in(\pi/2,\ \pi/2+\rho\alpha_\rho)$, таких, что при $|\tau|>S$; $\pi/2<\varphi\leqslant\varphi_0$ (см, 24), (25))

$$\tau^{-1}U(\Gamma(\varphi,|\tau|,a))\subset\pi(Q_\rho(\theta-\alpha;\ b))=D_\rho(\theta-\alpha;\ b), \qquad (39)$$

где $\theta=\arg\tau$; $U=\pi\circ\chi$. Так как $b>m$, то $D_\rho(\theta-\alpha;\ b)\subset\{p\in\mathbf{C}:|p|>>m^{1/\rho}\}$. Но на этом множестве ряд $F(p)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{a}{p^{k+1}}$ сходится (см. выше). Так как $F(\infty)=0$, то при некотором $M>0$

$$|F(p)|<M,\ \forall p\in D_\rho(\theta-\alpha;\ b). \qquad (40)$$

Поэтому интегралы $J_{\pm\varphi}$ сходятся абсолютно. Далее, согласно лемме 1, используя ее обозначения, имеем при $\rho<1/2$: $F_\theta(r,\psi+2\pi)=F_\theta(r,\psi)=F(\omega re^{i\psi})$, если $(r,\psi),(r,\psi+2\pi)\in Q_\rho(\theta-\alpha,b)$, а при любом $\rho<0$

$$J_\varphi=\int\limits_{\Gamma_\varphi}e^w\cdot F_{\theta-\alpha}(\tau^{-1}\chi(w))\,dw=\rho\int\limits_{\Gamma_\varphi}dw\int\limits_0^{\infty\,(\mathrm{Arg}\,z=\theta-\alpha)}T(w,z)\,dz,$$

где $T(w,z)=f(z)\cdot\exp\left\{w-V\left(\frac{z}{\tau}\chi(w)\right)\right\}$.

2) Покажем, что возможна перемена порядка интегрирования. Интегралы

$$\int\limits_0^{\infty\,(\mathrm{Arg}\,z=\theta-\alpha)}T(w,z)dz,\ \int\limits_{\Gamma_\varphi}T(w,z)\,dw$$

сходятся равномерно по параметру на каждом компакте, принадлежащем соответственно $\{z \in \mathbf{C}: \operatorname{Arg} z = \theta - \alpha\}$ и Γ_φ (см. доказательства леммы 1 предложения 2, 1)). Пусть $Y(w, z) = \operatorname{Re} V\left(\frac{z}{\tau}\chi(w)\right)$. Тогда из (24), (26) (условия предложения 4 выполняются) находим: при некотором $R_0 > 0$

$$\int_{R_0}^{\infty (\operatorname{Arg} z = \theta - \alpha)} |f(z)| \exp\{-Y(w, z)\}\, d|z| \leqslant \int_{R_0}^{\infty (\operatorname{Arg} z = \theta - \alpha)} \exp\{(m - b) V(|z|)\}\, d|z| < \infty. \quad (41)$$

Функция $M(|z|) = \inf\limits_{w \in \Gamma_\varphi} Y(w, z)$ непрерывна на полуинтервале $(0, R_0]$, поскольку (см. (1))

$$Y(w, z) = V(|\chi(w)|)\left(\left|\frac{z}{\tau}\right|^\rho \cos(\rho\alpha - \varphi) + \varepsilon(w)\right),$$

где $\varepsilon(w) \to 0$ при

$$|w| \to \infty;\ w \in \Gamma_\varphi \text{ и } -\frac{\pi}{2} < \rho\alpha - \varphi_0 < \rho\alpha - \varphi < \rho\alpha < \frac{\pi}{2}$$

(предложение 4). Отсюда и из (41) выводим

$$\int_0^\infty dt \int_0^{\infty (\operatorname{Arg} z = \theta - \alpha)} |T(V(|\tau|)(te^{i\varphi} + a), z)\, d|z| < \infty \quad (\pi/2 < \varphi < \pi).$$

Следовательно,

$$J_\varphi = \rho \int_0^{\infty (\operatorname{Arg} z = \theta - \alpha)} f(z) N_\varphi\left(\frac{z}{\tau}\right) dz = \rho\tau \cdot \int_0^{\infty (\operatorname{Arg} \varphi = -\alpha)} f(\tau\varphi) N_\varphi(\varphi)\, d\varphi$$

(см. предложение 2). Аналогично,

$$J_{-\varphi} = \rho \cdot \int_0^{\infty (\operatorname{Arg} z = \theta + \alpha)} f(z) N_\varphi\left(\frac{z}{\tau}\right) dz = \rho\tau \cdot \int_\infty^{\infty (\operatorname{Arg} \varphi = \alpha)} f(\tau\varphi) N_\varphi(\varphi)\, d\varphi.$$

3) Пусть $C_s = \{z = se^{i\psi}, |\psi| \leqslant \alpha\}$, $1 < s$; $N(\varphi)$ — функция, построенная в предложении 2. Из предложения 3 находим

$$\int_{C_s} f(\tau\varphi) N(\varphi)\, d\varphi \to 0 \text{ при } s \to \infty \ (b > m).$$

Поэтому

$$\rho (2\pi i\tau)^{-1} \cdot [J_\varphi - J_{-\varphi}] = \lim_{s \to \infty} \frac{\rho}{2\pi i} \int_{\partial G_s} f(\tau\varphi) N(\varphi)\, d\varphi, \quad (42)$$

где G_s — ориентированная в положительном направлении область, ограниченная отрезками $\{\varphi = re^{\pm i\alpha}: 0 \leqslant r \leqslant s\}$ и дугой C_s. Для доказательства теоремы 1 достаточно теперь воспользоваться формулой (36) (см. (38)).

Лемма 2. *Если в условиях теоремы* 2 *функция* F *аналитически продолжается в* $\mathbf{C} \setminus K_h$ (*см.* (31)), *то* $\hat{f} \in \mathbf{P}_\rho\,(V;\ h)$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что в (28) постоянная $m > \sup\limits_{\psi \in R^1} h(\psi)$. Пусть $m > a_1 > b_1 > h(\theta)$. Согласно предложению 4 найдем a, $S > 0$; $\varphi \in (\pi/2,\ \pi/2 + \rho a_\rho)$, такие, что

$$(re^{i\theta})^{-1} \cdot U(\Gamma(\pm\varphi,\ r,\ a_1)) \subset D_\rho(\theta \mp a;\ b_1) \subset \mathbf{C} \setminus K_h,\ \forall r > S,$$

причем эти постоянные можно выбрать так, чтобы одновременно выполнялось (39) при $\arg\tau = \theta$. Но в (39) $a > b > m$, следовательно, в области, ограниченной контурами $\lambda(a_1,\ \varphi)$, $\lambda(a,\ \varphi)$ (см. (37)), определена голоморфная по φ функция $G(\varphi,\ r,\ \theta) = F[(re^{i\theta})^{-1} \cdot U(V(r)\,\varphi)] \times \exp\{V(r)\,\varphi\}$. Так как

$$F(\infty) = 0, \text{ то } \int\limits_{B_y} G(\varphi,\ r,\ \theta)\, d\varphi \to 0$$

при $y \to \pm\infty$, где $B_y = \{\varphi = x + iy:\ a_1 \leqslant x \leqslant a\}$. Из теоремы Коши и (37) получаем

$$\hat{f}(re^{i\theta}) = \frac{V(r)}{2\pi i r\, e^{i\theta}} \int\limits_{\lambda(a_1,\ \varphi)} G(\varphi,\ r,\ \theta)\, d\varphi.$$

Оценивая этот интеграл, как и ранее (см. 32)), находим: при некотором $M_1 > 0$ $|\hat{f}(re^{i\theta})| < M_1 \exp\{a_1 V(r)\}$, $\forall r > S$. Поэтому $h_{\hat{f}}^{*}(\theta) \leqslant h(\theta)$, $\forall \theta \in R^1$ (разность $a_1 - h(\theta)$ может быть произвольно мала). Это эквивалентно тому, что $\hat{f} \in \mathbf{P}_\rho\,(V;\ h)$, благодаря лемме Гартогса ([3], стр. 39) и непрерывности функции h.

3°. Как известно, [5], [12], справедлива и другая интегральная формула, связывающая функцию f из $\mathfrak{M}_\rho\,(V)$ и ее V-преобразование Бореля F:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int\limits_{\Gamma} E_\rho(zp;\ V) \cdot F(p)\, dp;\ E_\rho(w;\ V) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{\Delta_k}, \tag{43}$$

где Γ — ориентированный в положительном направлении жорданов контур, охватывающий особенности F (см. определение 1).

Анализ исследований в [5] показывает, что одна из причин, помешавших В. Бернштейну получить полный аналог теоремы Полиа для класса целых функций уточненного порядка, исходя из (43), состоит в том, что обобщенный индикатор $h_E^{+}(\theta)$ у функции $E_\rho(w;\ V)$

не был известен (за исключением случая $V(t)=t^\rho$; $E_\rho(w; t^\rho)$ — функция Миттаг—Леффлера).

Лемма 3. *Пусть* $\rho>0; V\in\mathfrak{M}_\rho$; $h_E^+(\theta)=\max\{0, h_E(\theta)\}$; $h_E(\theta)=\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}[V(r)]^{-1}\cdot\ln|E_\rho(re^{i\theta}; V)|$ — *обобщенный индикатор функции* $E_\rho(w; V)$ (*см.* (43)). *Тогда*

$$h_E^+(\theta)=\cos^+\rho\theta=\begin{cases}\cos\rho\theta, & |\theta|\leqslant\alpha_\rho\\ 0, & \rho>1/2;\ \alpha_\rho\leqslant|\theta|\leqslant\pi.\end{cases}$$

Доказательство. Последовательность $\{d_k\}$ из предложения 5 обладает свойством: $|d_k|<1$ при $k\geqslant k_0$. Рассмотрим функцию

$$F(p)=\sum_{k=k_0}^{\infty}\frac{1}{(1-d_k)\,p^{k+1}}.$$

Согласно предложению 5 имеем: $d_k=d(k)$, где

$$d(z)=\int_0^1\Phi(\alpha)\,\alpha^z\,d\alpha=B(1)-z\int_0^1 B(\alpha)\,\alpha^{z-1}\,d\alpha=$$

$$=B(1)-z\int_0^\infty\tilde{B}(e^{-x})\,e^{-zx}\,dx,$$

$B(\alpha)=\int\limits_0^\alpha\Phi(\beta)\,d\beta$ — непрерывная функция на $[0,1]$. Отсюда используя лемму Ватсона ([16], стр. 33), находим: $d(z)$ — целая функция такая, что для любого $\varepsilon>0$ $d(z)\to0$ при $z\to\infty$; $z\in L\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)$. Поэтому $A(z)=[1-d(z)]^{-1}$ — функция, голоморфная в области $\bigcup\limits_{0<\varepsilon<\frac{\pi}{2}}L\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon;\ R_\varepsilon\right)$. Применяя теперь теорему 7.3.6 из [17], стр. 215 заключаем: функция $\sum\limits_{k=k_0}^{\infty}A(k)\,z^{k+1}$ голоморфно продолжается в области $G_\varepsilon=\{z=re^{i\theta}\in\mathrm{C}: 0\leqslant r<\exp\{\operatorname{ctg}\varepsilon\cdot\min\{\theta, 2\pi-\theta\}\}, 0\leqslant\theta\leqslant2\pi\}$ при любом $\varepsilon>0$. Поэтому функция $F(p)=\sum\limits_{k=k_0}^{\infty}\frac{A(k)}{p^{k+1}}$ аналитически продолжается в $\mathrm{C}\diagdown[0,1]$.

2) Отрезок $[0,1]$ — ρ-выпуклый компакт, для которого ρ-опорной функцией является функция $\cos^+\rho\theta$. По лемме 2 тогда у функции $\sum\limits_{k=k_0}^{\infty}\frac{z^k}{\Delta_k}$ и, следовательно, у функции $E_\rho(z; V)$ (см. 42)) срезка индикатора удовлетворяет условию: $h_E^+(\theta)\leqslant\cos^+\rho\theta$, $|\theta|\leqslant\pi$.

С другой стороны, по лемме 1 ρ-выпуклый компакт K_h (см. (31)) ассоциированный с неотрицательной срезкой h_E^+ обобщенного индикатора h_E целой функции $E_\rho(z;\ V)$, содержит точки $\{1\}$, $\{0\}$ и, следовательно, отрезок $[0,1]$. Отсюда $h_E^+(\theta) \geqslant \cos^+ \rho\theta$. Лемма доказана.

Аналогом теоремы Полиа для целых функций уточненного порядка является обобщающая результаты М. Ф. Субботина, А. Е. Аветисяна и М. М. Джрбашяна ([2], стр. 17).

Теорема 2 (*Ср.* [8], *теорема* 6). *Пусть* $\rho > 0$; $V \in \mathbf{B}_\rho$; $h \in P_\rho$; $f \in \mathfrak{M}_\rho(V)$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *У целой функции f неотрицательная срезка ее обобщенного индикатора $h_f^+ = h$;*

2) *Наименьший ρ-выпуклый компакт, во внешность которого аналитически продолжается V-преобразование Бореля функции f, совпадает с K_h (см. (31)).*

3) *Если μ — аналитический функционал такой, что $\mu_\rho(E_\rho(z;\ \varphi;\ V)) \equiv f(z)$* (см. 43)), то K_h — единственный ρ-выпуклый носитель функционала μ;*

4) *В обозначениях определения* 1

$$H(z) = H(re^{i\theta}) \overset{\text{опр}}{=} r^\rho \cdot h(\theta) = \inf\{a^\rho > 0\ a^{-1} z \in B_\rho(b)\} -$$

ρ-функционал Минковского открытого ядра $B_\rho(b)$ „ρ-многоугольника Бореля“ Δ функции $b(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, где Δ — множество точек абсолютной сходимости интеграла

$$\int\limits_0^\infty \exp\{-V(t)\} \cdot f(tz)\, dt$$

или

$$B_\rho(b) = \{z \in \mathbf{C}:\ H(z) < 1\}.$$

Компакт, о котором говорится в условии 2), существует благодаря теореме о монодромии, поскольку пересечение T любого числа ρ-выпуклых компактов — ρ-выпуклый и, следовательно, звездный компакт, т. е. дополнение множества T—односвязная область на сфере Римана.

Доказательство теоремы 2 протекает по той же схеме, что и доказательство теоремы 6 в [8], исходя из лемм 1, 3 (в рассуждениях § 2 из 8 функцию Миттаг-Леффлера следует заменить на функцию $E_\rho(w;\ V)$, $K \in \mathbf{B}_\rho$ и использовать (42)).

Замечание 1. При $\rho \leqslant 1/2$ имеем: $h_f^+(\theta) \equiv h_f(\theta)$ ([1], стр. 78).

---

* Существование такого функционала доказывается путем ([3], стр. 137; [10], лемма 3).

Замечание 2. Поскольку ρ-выпуклые множества — это выпуклые множества в **C**, содержащие 0, то при $\rho=1$ теорема 2 не является полным аналогом теоремы Полиа в классической формулировке. Вопрос о том, можно ли получить такой аналог, нуждается в дополнительном исследовании (функция V в Λ имеет особенность), на чем мы здесь не останавливаемся.

Институт физики им. Л. В. Киренского
СО АН СССР

Поступила 24.VII.1976

Լ. Ս. ՄԱՅԵՐԳՈՅԶ. Պոլիայի թեորեմի անալոգը և նրա մի քանի կիրառությունները (*ամփոփում*)

Լավ հայտնի է Պոլիայի թեորեմը էքսպոնենցիալ տիպի ամբողջ ֆունկցիայի ինդիկատորի և համալուծ դիագրամայի միջև կապի մասին։ Տվյալ հոդվածում առաջարկվում է նրա ընդհանրացումը ճշգրտված կարգի ամբողջ ֆունկցիաների դասի վրա, որը նման է Մ. Ֆ. Սուբոտինի, Մ. Մ. Ջրբաշյանի, Ա. Ե. Ավետիսյանի ստացած արդյունքներին $\rho>0$ կարգի և նորմալ տիպի ամբողջ ֆունկցիաների համար։ Է. Բորելի, Գ. Պոլիայի, Վ. Բեռնշտեյնի արդյունքների օգնությամբ պարզաբանել ճշգրտված կարգի $\rho(r)$ ամբողջ ֆունկցիայի ընդհանրացված ինդիկատորի կապը, որտեղ $\rho(r)\to\rho$ երբ $r\to\infty$, անալիտիկ ֆունկցիոնալի ρ-ուռուցիկ կրիչի և C^1-ում O կետի շրջակայքում հոլոմորֆ ֆունկցիայի ρ-Բորելի բազմանկյան հետ։

L. S. MAERGOIZ. *On an analogue of Polya theorem and its applications* (summary)

Polya theorem on connections between indicator and conjugate diagrams of entire function of exponential type is well known. In the present paper its generalization for entire functions of proximate order is given. This is similar to M. F. Subotin, M. M. Jrbashian, A. E. Avetisian results for entire functions of finite order $\rho>0$ and of normal type. With results by E. Borel, G. Polya, V. Bernstein it reveals the connection of generalized indicator of an entire function of proximate order $\rho(r)$ ($\rho(r)\to\rho>0$, when $r\to\infty$) with ρ-convex support of analytic functional and "Borel ρ-polygon" of function which is analytic in a neighborhood of O in C^1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Б. Я. Левин.* Распределение корней целых функций, М., Гостехиздат, 1956.
2. История отечественной математики, т. 4, книга 1, Киев, изд. «Наукова думка», 1970.
3. *Л. Хермандер.* Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных, Изд. «Мир», 1968.
4. *C. O. Kiselman.* Functionals on the space of solutions to a differential equation with constant coefficiants. The Fourier and Borel transformations, Math. Scand., 23, 1968, 27—53.
5. *V. Bernstein.* Sulla crescenza delle transendenti intere di ordine finito, Reale Accad. d'Italia, Memorie delle classe di scien. fis. matem. e natur., IV, 1933, 339—401.
6. *Л. С. Маергойз.* Аналог теоремы Полиа для целых функций уточненного порядка, в сб. «Некоторые свойства голоморфных функций многих комплексных переменных», Красноярск, Изд. ИФ СО АН СССР, 1973, 109—121.
7. *Л. С. Маергойз.* Плоские ρ-выпуклые множества и некоторые их приложения, в сб. «Голоморфные функции многих комплексных переменных», Красноярск, Изд. ИФ СО АН СССР, 1972, 75—91.

8. *E. Borel.* Lecons sur les sèries divergentes, Paris, 1928.
9. *G. Valiron.* Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'orde fini et en particulier les fonctions à correspondance reguliere, Ann. fac. sci. Univ. Toulouse, 5, 1913, 117—257.
10. *А. А. Гольдберг, И. В. Островский.* Распределение значений мероморфных функций, М., Изд. «Наука», 1970.
11. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., Изд. «Наука», 1966.
12. *Ф. И. Гече.* Об уточненных характеристиках роста целых функций многих комплексных переменных, Литовск. матем. сб., VIII, № 3, 1968, 461—488.
13. *М. А. Евграфов.* Асимптотические оценки и целые функции, М., Физматгиз. 1962.
14. *A. Macintyre.* Laplace's transformation and integral functions, Proc. London Math. Soc., (2), 45, 1938, 1—20.
15. *Л. С. Маергойз.* Аналог теоремы Полна для целых функций уточненного порядка и некоторые его приложения, Функциональный анализ и его приложения, II, вып. 3, 1977, 84—85.
16. *М. В. Федорюк.* Метод перевала, М., Изд. «Наука», 1977.
17. *Л. Бибербах.* Аналитическое продолжение, М., Изд. «Наука», 1967.