ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XV, № 1, 1980 Математика

И. Г. ХАЧАТРЯН

ОПЕРАТОРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

В настоящей работе рассматриваются следующие дифференциальные уравнения порядка $n > 2$:

$$y^{(n)}+\sum_{k=0}^{n-2} p_k(x)\, y^{(k)} = \lambda^n y, \; 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{1}$$

$$u^{(n)}+\sum_{k=0}^{n-2} g_k(x)\, u^{(k)} = \lambda^n u, \; 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{2}$$

коэффициенты которых регулярны в четырехугольнике D_l с вершинами $0, l, l(1-\omega_1)^{-1}, l(1-\omega_{n-1})^{-1}$, где

$$\omega_s = e^{i\frac{2\pi}{n}s}, \; s=0, 1,\cdots, n-1, \tag{3}$$

и, кроме того, удовлетворяют условиям*

$$p_k^{(k)}(z),\, g_k^{(k)}(z) \in H_1(D_l), \; k=0, 1,\cdots, n-2. \tag{4}$$

В работе автора [14] была доказана следующая

Теорема A. *Пусть коэффициенты уравнений* (1) *и* (2) *удовлетворяют условиям* (4), *а функции* $y(x, \lambda)$ *и* $u(x, \lambda)$ *являются, соответственно, решениями уравнений* (1) *и* (2), *удовлетворяющими начальным условиям*

$$y^{(\nu)}(0, \lambda) = a_\nu, \; \nu=0, 1,\cdots, n-1, \tag{5}$$

$$u^{(\nu)}(0, \lambda) = b_\nu, \; \nu=0, 1,\cdots, n-1, \tag{6}$$

где a_ν, b_ν — *некоторые постоянные, причем если* $b_\nu=0$ $(\nu=0, 1,\cdots, k-1;\ 0\leqslant k\leqslant n-1)$ *и* $b_k \neq 0$, *то* $a_\nu = b_\nu$ $(\nu=0, 1,\cdots, k)$. *Тогда существует функция* $L(x, t)$ $(0\leqslant t\leqslant x\leqslant l)$, *не зависящая от параметра* λ, *такая, что при всех значениях* λ *имеет место формула***

---

* Определение класса H_1 (или E_1) аналитических функций содержится в книге И. И. Привалова [16].

** Для уравнений порядка $n > 2$ формулу (7) впервые получил А. А. Сахнович [5], однако в работе [5] требуется аналитичность коэффициентов уравнений в круге $|z| < R$ $(R > l)$.

В работе В. И. Мацаева [9] (см. также [6]) показано, что для существования ядра $L(x, t)$ требование аналитичности коэффициентов является существенным.

$$y(x, \lambda) = u(x, \lambda) + \int_0^x L(x, t)\, u(t, \lambda)\, dt,\ 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{7}$$

При этом функция $L(x, t)$ имеет все частные производные до порядка $n-2$ включительно, которые непрерывны по совокупности аргументов и абсолютно непрерывны по каждому аргументу. Кроме того, $L(x, t) = \widetilde{L}(x-t, t)$, где функция $\widetilde{L}(\xi, z)$ определена в области $(z \in D_{l-\xi};\ 0 \leqslant \xi \leqslant l)$ и все ее частные производные порядка $n-1$ при фиксированном ξ принадлежат классу $H_1(D_{l-\xi})$.

Формула (7) показывает, что оператор $I+L$, определенный формулой

$$(I+L) f = f(x) + \int_0^x L(x, t)\, f(t)\, dt,\ 0 \leqslant x < l, \tag{8}$$

преобразует решение $u(x, \lambda)$ задачи Коши (2), (6) в решение $y(x, \lambda)$ задачи (1), (5). Очевидно, что каждая из функций $u(x, \lambda)$ и $y(x, \lambda)$ удовлетворяет некоторым $n-1$ линейно независимым краевым условиям вида

$$V(f) \equiv \sum_{\nu=0}^{n-1} \alpha_\nu f^{(\nu)}(0) = 0. \tag{9}$$

Однако если рассматривать краевые задачи с $n-m$ $(1 < m \leqslant n)$ краевыми условиями вида (9), то, как показано в работе Л. А. Сахновича [7] (см. также [8]), может и не существовать оператора $I+L$ вида (8), преобразующего все решения одной краевой задачи в решения другой.

Цель настоящей работы—привести для уравнений высших порядков другие* возможные обобщения известных формул (операторов преобразования), полученных для дифференциальных уравнений второго порядка (см. [1]—[4]). Здесь приводятся операторы (формулы (19), (23)), которые строятся при помощи m $(1 \leqslant m \leqslant n)$ ядер и преобразуют решения уравнения (2), удовлетворяющие $n-m$ краевым условиям вида (9), в решения уравнения (1), удовлетворяющие также некоторым $n-m$ краевым условиям вида (9). Далее вместе с уравнением (1) рассматривается простейшее уравнение

$$\psi^{(n)} = \lambda^n \psi \tag{10}$$

и выведенная в общем случае формула (19) приводится к другому виду (формулы (30), (31)). Эти формулы, полученные при условиях (4), являются простыми следствиями теоремы А. Еще один вариант оператора (формула (32)), преобразующего всякое решение уравнения (10) в решение уравнения (1), приводится при условиях

---

* В случае $n > 2$ существование оператора преобразования, сохраняющего на бесконечности асимптотическое поведение решений, установлено в работе автора [15].

$$p_k^{(k)}(z) \in H_1(\Delta_l), \; k = 0, 1, \cdots, n-2, \tag{11}$$

где область Δ_l представляет собой $4(n-2)$-угольник (при $n = 4$ — шестиугольник) и определяется следующим образом:

$$\Delta_l = \bigcup_{s=1}^{n-1} \Delta_s(l), \tag{12}$$

где $\Delta_s(l)$—треугольник с вершинами l, $l\sigma_{s,s-1}^{-1}$, $l\sigma_{s,s+1}^{-1}$, причем $\sigma_{1,0}^{-1} = \sigma_{n-1,n}^{-1} = 0$ и

$$\sigma_{s,\nu} = \frac{\omega_s - \omega_\nu}{1 - \omega_\nu} = \frac{\sin\frac{\pi}{n}(\nu - s)}{\sin\frac{\pi}{n}\nu} e^{i\frac{\pi}{n}s}, \; s, \nu = 1, 2, \cdots, n-1. \tag{13}$$

Треугольник $\Delta_s(l)$ является равнобедренным, причем углы у вершин $l\sigma_{s,s-1}^{-1}$ и $l\sigma_{s,s+1}^{-1}$ имеют раствор $\frac{\pi}{n}$, кроме того, сторона треугольника, соединяющая эти вершины, проходит через начало координат. Для многоугольника Δ_l точка $l/2$ и вещественная ось являются, соответственно, центром и осью симметрии. Отметим, что $D_l \subset \Delta_l$ (области $\Delta_s(l)$, Δ_l и D_l удобно считать замкнутыми). Здесь используются те же свойства функций класса H_1, что и в работе [14] при выводе формулы (7).

Если уравнения (1) и (2) рассматривать в полуинтервале $0 \leqslant x < a$ $(0 < a \leqslant \infty)$ и предполагать, что условия (4) и (11) выполняются при каждом l $(0 < l < a)$, то формула (7), а также полученные формулы справедливы при $0 \leqslant x < a$. Область D_∞ представляет собой сектор $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$, а область Δ_∞ — сектор $|\arg z| \leqslant \pi - \frac{2\pi}{n}$.

При $n = 2$ области D_l и Δ_l превращаются в отрезок $[0, l]$, и тогда условия (4) и (11) естественно понимать как суммируемость коэффициентов на отрезке $[0, l]$.

Операторы преобразования для дифференциальных уравнений порядка $n > 2$ (без требования аналитичности коэффициентов) изучались в работах [10]—[13], однако полученные в этих работах формулы имеют более сложный вид, чем выведенные здесь формулы.

1°. Приведем два простых следствия теоремы А. Обозначим через $w_j(x, \lambda)$ и $v_j(x, \lambda)$ $(j = 1, 2, \cdots, m;\; 1 \leqslant m \leqslant n)$, соответственно решения уравнений (1) и (2), удовлетворяющие начальным условиям

$$w_j^{(\nu)}(0, \lambda) = a_{\nu,j}, \; \nu = 0, 1, \cdots, n-1,$$

$$v_j^{(\nu)}(0, \lambda) = b_{\nu,j}, \; \nu = 0, 1, \cdots, n-1,$$

где $a_{\nu,j}$, $b_{\nu,j}$ — некоторые постоянные, причем числа $a_{\nu,j}$ при каждом j $(1 \leqslant j \leqslant m)$ удовлетворяют следующему условию: если

$b_{\nu, j}=0$ ($\nu=0, 1,\cdots, k_j-1$; $0\leqslant k_j\leqslant n-1$) и $b_{k_j, j}\neq 0$, то

$$a_{\nu, j}=b_{\nu, j} \quad (\nu=0, 1,\cdots, k_j).$$

Введем следующие функции:

$$y(x, \lambda)=\sum_{j=1}^{m} c_j(\lambda)\, w_j(x, \lambda), \tag{14}$$

$$y_s(x, \lambda)=\sum_{j=1}^{m} \gamma_{s, j} c_j(\lambda)\, w_j(x, \lambda),\ s=1, 2,\cdots, m, \tag{15}$$

$$u(x, \lambda)=\sum_{j=1}^{m} c_j(\lambda)\, v_j(x, \lambda), \tag{16}$$

$$u_s(x, \lambda)=\sum_{j=1}^{m} \gamma_{s, j} c_j(\lambda)\, v_j(x, \lambda),\ s=1, 2,\cdots, m, \tag{17}$$

где числа $c_j(\lambda)$—произвольные, а числа $\gamma_{s, j}$ такие, что определитель матрицы

$$\Gamma=\begin{Vmatrix} \gamma_{1,1} & \gamma_{1,2} & \cdots & \gamma_{1,m} \\ \gamma_{2,1} & \gamma_{2,2} & \cdots & \gamma_{2,m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{m,1} & \gamma_{m,2} & \cdots & \gamma_{m,m} \end{Vmatrix} \tag{18}$$

отличен от нуля: $\det\Gamma\neq 0$. Очевидно, что решения $y(x, \lambda)$, $y_s(x, \lambda)$ ($s=1, 2,\cdots, m$) уравнения (1) удовлетворяют таким же краевым условиям вида (9), каким удовлетворяют решения $w_j(x, \lambda)$ ($j=1, 2,\cdots, m$). Аналогичным свойством обладают и решения $u(x, \lambda)$, $u_s(x, \lambda)$ ($s=1, 2,\cdots, m$) уравнения (2) вместе с решениями $v_j(x, \lambda)$ ($j=1, 2,\cdots, m$).

Следствие 1. *Имеет место представление*

$$y(x, \lambda)=u(x, \lambda)+\sum_{s=1}^{m}\int_0^x K_s(x, t)\, u_s(t, \lambda)\, dt,\ 0\leqslant x\leqslant l, \tag{19}$$

где ядра $K_s(x, t)$ не зависят от чисел $c_j(\lambda)$.

Действительно, согласно теореме А, существуют функции $L_j(x, t)$ ($j=1, 2,\cdots, m$) такие, что имеют место формулы

$$w_j(x, \lambda)=v_j(x, \lambda)+\int_0^x L_j(x, t)\, v_j(t, \lambda)\, dt,\ j=1, 2,\cdots, m. \tag{20}$$

Функции $K_s(x, t)$ ($s=1, 2,\cdots, m$) определим из системы уравнений

$$\sum_{s=1}^{m} \gamma_{s, j} K_s(x, t)=L_j(x, t),\ j=1, 2,\cdots, m. \tag{21}$$

В силу $\det\Gamma\neq 0$ система (21) имеет единственное решение.

Из формул (20) и (21) имеем

$$w_j(x, \lambda) = v_j(x, \lambda) + \sum_{s=1}^{m} \gamma_{s,j} \int_0^x K_s(x, t)\, v_j(t, \lambda)\, dt, \tag{22}$$

$$j = 1, 2, \cdots, m.$$

Если равенства (22) умножить, соответственно, на $c_j(\lambda)$ и просуммировать по значениям j, а также учесть формулы (14), (16), (17), то получим представление (19).

Введем вектор-функции

$$\mathbf{w}(x, \lambda) = (w_1(x, \lambda), w_2(x, \lambda), \cdots, w_m(x, \lambda)),$$

$$\mathbf{v}(x, \lambda) = (v_1(x, \lambda), v_2(x, \lambda), \cdots, v_m(x, \lambda)),$$

$$\mathbf{y}(x, \lambda) = (y_1(x, \lambda), y_2(x, \lambda) \cdots, y_m(x, \lambda)),$$

$$\mathbf{u}(x, \lambda) = (u_1(x, \lambda), u_2(x, \lambda), \cdots, u_m(x, \lambda))$$

(эти векторы, написанные в виде строки, в нижеприводимых формулах нужно понимать как столбцы). Введем также диагональные матрицы

$$\mathbf{C}(\lambda) = \begin{Vmatrix} c_1(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2(\lambda) & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & c_m(\lambda) \end{Vmatrix},$$

$$\mathbf{L}(x, t) = \begin{Vmatrix} L_1(x, t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & L_2(x, t) & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & L_m(x, t) \end{Vmatrix}.$$

Следствие 2. *Имеет место представление*

$$\mathbf{y}(x, \lambda) = \mathbf{u}(x, \lambda) + \int_0^x \mathbf{K}(x, t)\, \mathbf{u}(t, \lambda)\, dt, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{23}$$

где матрица $\mathbf{K}(x, t)$ *не зависит от* $\mathbf{C}(\lambda)$ *и имеет вид*

$$\mathbf{K}(x, t) = \Gamma \mathbf{L}(x, t)\, \Gamma^{-1}. \tag{24}$$

Действительно, формулы (20) запишем в виде

$$\mathbf{w}(x, \lambda) = \mathbf{v}(x, \lambda) + \int_0^x \mathbf{L}(x, t)\, \mathbf{v}(t, \lambda)\, dt.$$

Отсюда получаем

$$\Gamma \mathbf{C}(\lambda)\, \mathbf{w}(x, \lambda) = \Gamma \mathbf{C}(\lambda)\, \mathbf{v}(x, \lambda) + \int_0^x \Gamma \mathbf{L}(x, t)\, \mathbf{C}(\lambda)\, \mathbf{v}(t, \lambda)\, dt. \tag{25}$$

Однако

$$\mathbf{y}(x, \lambda) = \Gamma \mathbf{C}(\lambda)\, \mathbf{w}(x, \lambda), \quad \mathbf{u}(x, \lambda) = \Gamma \mathbf{C}(\lambda)\, \mathbf{v}(x, \lambda),$$

поэтому формула (25) принимает вид (23), причем матрица $\mathbf{K}(x, t)$ определяется по формуле (24).

Замечание 1. Пусть

$$\gamma_{s,j} = \varepsilon_{s-1}^{j-1},\ s, j = 1, 2, \cdots, m,$$

где

$$\varepsilon_s = e^{i\frac{2\pi}{m}s},\ s = 0, 1, \cdots, m-1,$$

тогда в формуле (23) матрица $\mathbf{K}(x, t)$ представляет собой циркулянт

$$\mathbf{K}(x, t) = \begin{Vmatrix} K_1(x, t), & K_2(x, t), \cdots, & K_{m-1}(x, t), & K_m(x, t) \\ K_m(x, t), & K_1(x, t), \cdots, & K_{m-2}(x, t), & K_{m-1}(x, t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_2(x, t), & K_3(x, t), \cdots, & K_m(x, t), & K_1(x, t) \end{Vmatrix},$$

причем

$$K_s(x, t) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{s-1}^{1-j} L_j(x, t),\ s = 1, 2, \cdots, m.$$

Если же порядок n — четное число и $m = \frac{n}{2}$, кроме того (см. (3)),

$$\gamma_{s,j} = \omega_{s-1}^{2j-1},\ s, j = 1, 2, \cdots, m,$$

то матрица $\mathbf{K}(x, t)$ имеет вид

$$\mathbf{K}(x, t) = \begin{Vmatrix} K_1(x, t), & K_2(x, t), \cdots, & K_{m-1}(x, t), & K_m(x, t) \\ -K_m(x, t), & K_1(x, t), \cdots, & K_{m-2}(x, t), & K_{m-1}(x, t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -K_2(x, t), & -K_3(x, t), \cdots, & -K_m(x, t), & K_1(x, t) \end{Vmatrix},$$

причем

$$K_s(x, t) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} \omega_{s-1}^{1-2j} L_j(x, t),\ s = 1, 2, \cdots, m.$$

Замечание 2. Если числа $c_j(\lambda)$ обладают свойствами

$$c_j(\lambda\omega_{r_s}) = \gamma_{s,j} c_j(\lambda),\ s, j = 1, 2, \cdots, m,$$

а это возможно, в частности, когда числа $\gamma_{s,j}$ имеют вид

$$\gamma_{s,j} = \omega_{r_s}^{j},\ s, j = 1, 2, \cdots, m,$$

то вектор-функции $\mathbf{y}(x, \lambda)$ и $\mathbf{u}(x, \lambda)$ принимают вид

$$\mathbf{y}(x, \lambda) = (y(x, \lambda\omega_{r_1}), y(x, \lambda\omega_{r_2}), \cdots, y(x, \lambda\omega_{r_m})),$$

$$\mathbf{u}(x, \lambda) = (u(x, \lambda\omega_{r_1}), u(x, \lambda\omega_{r_2}), \cdots, u(x, \lambda\omega_{r_m})).$$

2°. Рассмотрим вместе с уравнением (1) простейшее уравнение (10) и в некоторых случаях формулу (19) приведем к другому виду. Пусть функции $w_j(x, \lambda)$ и $\varphi_j(x, \lambda)$ $(j = 0, 1, \cdots, n-1)$ являются со ответственно решениями уравнений (1) и (10), удовлетворяющими начальным условиям

$$w_j^{(\nu)}(0,\lambda)=\begin{cases}0 & \text{при } \nu<j,\\ a_{\nu,j} & \text{при } \nu\geqslant j,\end{cases}\quad \nu=0,1,\cdots,n-1,$$

$$\varphi_j^{(\nu)}(0,\lambda)=\begin{cases}0 & \text{при } \nu\neq j,\\ 1 & \text{при } \nu=j,\end{cases}\quad \nu=0,1,\cdots,n-1,$$

$$j=0,1,\cdots,n-1,$$

где $a_{\nu,j}$ — некоторые постоянные, причем $a_{\nu,\nu}=1$ $(\nu=0,1,\cdots,n-1)$. Легко убедиться, что

$$\varphi_j(x,\lambda)=\frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1}(\omega_s\lambda)^{-j}e^{\omega_s\lambda x},\ j=0,1,\cdots,n-1. \tag{26}$$

Пусть $1\leqslant m\leqslant n$ и $0\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_m\leqslant n-1$. Введем функции

$$y(x,\lambda)=\sum_{j=1}^{m}c_j(\lambda)\,w_{k_j}(x,\lambda),$$

$$\psi(x,\lambda)=\sum_{j=1}^{m}c_j(\lambda)\,\varphi_{k_j}(x,\lambda),$$

$$\psi_s(x,\lambda)=\sum_{j=1}^{m}\gamma_{s,j}\,c_j(\lambda)\,\varphi_{k_j}(x,\lambda),\ s=1,2,\cdots,m,$$

где числа $c_j(\lambda)$ — произвольные, а числа $\gamma_{s,j}$ имеют вид

$$\gamma_{s,j}=\omega_{r_s}^{k_j},\ s,\ j=1,2,\cdots,m, \tag{27}$$

причем $0\leqslant r_1<r_2<\cdots<r_m\leqslant n-1$ и $\det\Gamma\neq 0$ (см. (18)).

Очевидно, что решения $\psi(x,\lambda)$ и $\psi_s(x,\lambda)$ $(s=1,2,\cdots,m)$ уравнения (10) удовлетворяют краевым условиям

$$U_\nu(f)\equiv f^{(\varkappa_\nu)}(0)=0,\ \nu=1,2,\cdots,n-m, \tag{28}$$

где $0\leqslant\varkappa_1<\varkappa_2<\cdots<\varkappa_{n-m}\leqslant n-1$ и $\varkappa_\nu\neq k_j$ $(\nu=1,2,\cdots,n-m;$ $j=1,2,\cdots,m)$.

Учитывая (26) и (27), нетрудно убедиться, что

$$\psi_s(x,\lambda)=\psi(x\omega_{r_s},\lambda),\ s=1,2,\cdots,m.$$

Поэтому, согласно следствию 1, имеем

$$y(x,\lambda)=\psi(x,\lambda)+\sum_{s=1}^{m}\int_0^x K_s(x,t)\,\psi(t\,\omega_{r_s},\lambda)\,dt. \tag{29}$$

Если в (29) сделать замену переменного $\tau=t\,\omega_{r_s}$ и обозначить

$$F_s(x,\tau)=\omega_{r_s}^{-1}K_s(x,\tau\,\omega_{r_s}^{-1}),\ s=1,2,\cdots,m,$$

то получим формулу

$$y(x, \lambda) = \psi(x, \lambda) + \sum_{s=1}^{m} \int_{0}^{x-r_s} F_s(x, \tau)\, \psi(\tau, \lambda)\, d\tau, \quad 0 < x \leqslant l, \tag{30}$$

в которой $\psi(x, \lambda)$ — произвольное решение краевой задачи (10), (28), а $y(x, \lambda)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$y^{(\nu)}(0, \lambda) = \sum_{j=1}^{m} \psi^{(k_j)}(0, \lambda)\, w_{k_j}^{(\nu)}(0, \lambda), \quad \nu = 0, 1, \cdots, n-1,$$

при этом $y(x, \lambda)$ удовлетворяет $n-m$ линейно независимым краевым условиям вида

$$V_s(f) \equiv \sum_{\nu=0}^{n-1} a_{s,\nu} f^{(\nu)}(0) = 0, \quad s = 1, 2, \cdots, n-m,$$

которым удовлетворяют функции $w_{k_j}(x, \lambda)$ $(j = 1, 2, \cdots, m)$. Отметим, что ядра $F_s(x, \tau)$ не зависят от решения $\psi(x, \lambda)$.

В частности, когда $m = n$, формула (30) принимает вид

$$y(x, \lambda) = \psi(x, \lambda) + \sum_{s=0}^{n-1} \int_{0}^{x\alpha_s} \tilde{F}_s(x, \tau)\, \psi(\tau, \lambda)\, d\tau, \quad 0 < x \leqslant l, \tag{31}$$

где $\psi(x, \lambda)$ — произвольное решение уравнения (10) (в этом случае краевые условия отсутствуют), а $y(x, \lambda)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$y^{(\nu)}(0, \lambda) = \sum_{j=0}^{\nu} a_{\nu, j}\, \psi^{(j)}(0, \lambda), \quad \nu = 0, 1, \cdots, n-1.$$

Имеют место также соотношения

$$\omega_s \tilde{F}_s(x, t\omega_s) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \omega_s^{-j} L_j(x, t), \quad s = 0, 1, \cdots, n-1,$$

где функции $L_j(x, t)$, согласно теореме А, соответствуют решениям $w_j(x, \lambda)$ и $\varphi_j(x, \lambda)$ по формуле

$$w_j(x, \lambda) = \varphi_j(x, \lambda) + \int_0^x L_j(x, t)\, \varphi_j(t, \lambda)\, dt, \quad j = 0, 1, \cdots, n-1.$$

3°. Приведем другой вариант формулы (31).

Теорема. *Пусть* $\psi(x, \lambda)$ — *произвольное решение уравнения* (10), *а* $y(x, \lambda)$ — *решение уравнения* (1), *удовлетворяющее начальным условиям*

$$y^{(\nu)}(0, \lambda) = \sum_{j=0}^{\nu} a_{\nu, j} \psi^{(j)}(0, \lambda), \quad \nu = 0, 1, \cdots, n-1,$$

где $a_{\nu, j}$ — некоторые постоянные, причем $a_{\nu, \nu} = 1$ $(\nu = 0, 1, \cdots, n-1)$. Если коэффициенты уравнения (1) *удовлетворяют условиям* (11), *то имеет место представление*

$$y(x, \lambda) = \psi(x, \lambda) + \sum_{s=1}^{n-1} \int_{x}^{x\omega_s} M_s(x, \tau) \psi(\tau, \lambda)\, d\tau, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{32}$$

где ядра $M_s(x, \tau)$ не зависят от решения $\psi(x, \lambda)$.

Доказательство. Заметим, что формулу (32) достаточно установить для $\psi(x, \lambda) = e^{\lambda x}$ и $y(x, \lambda)$, удовлетворяющего начальным условиям

$$y^{(\nu)}(0, \lambda) = \sum_{j=0}^{\nu} a_{\nu, j} \lambda^j, \quad \nu = 0, 1, \cdots, n-1. \tag{33}$$

Введем обозначения (см. (26))

$$\varphi(x, \lambda) = \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-1} e^{\omega_s \lambda x}, \tag{34}$$

$$q_k(x) = -\sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{k-\nu} C_{n-2-\nu}^{k-\nu} p_{n-2-\nu}^{(k-\nu)}(x), \quad k = 0, 1, \cdots, n-2. \tag{35}$$

В силу условий теоремы из (35) следует, что

$$q_k^{(n-2-k)}(z) \in H_1(\Delta_l), \quad k = 0, 1, \cdots, n-2. \tag{36}$$

Учитывая формулы

$$p_{n-2-k}(x) = -\sum_{\nu=0}^{k} C_{n-2-\nu}^{k-\nu} q_\nu^{(k-\nu)}(x), \quad k = 0, 1, \cdots, n-2,$$

нетрудно убедиться, что $y(x, \lambda)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$y(x, \lambda) = R_0(x, \lambda) + \frac{1}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-2} \int_0^x \varphi^{(n-1-k)}(x-t, \lambda)\, q_k(t)\, y(t, \lambda)\, dt, \tag{37}$$

где

$$R_0(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda)\, y(0, \lambda) +$$

$$+ \int_0^x \varphi(t, \lambda) \left\{ \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(x-t)^k}{k!} \left[y^{(k+1)}(0, \lambda) - \sum_{\nu=0}^{k-1} y^{(\nu)}(0, \lambda) \sum_{j=\nu}^{k-1} C_j^{\nu}\, q_{k-j-1}^{(j-\nu)}(0) \right] \right\} dt.$$

В силу (33) и (34) функция $R_0(x, \lambda)$ приводится к виду

$$R_0(x, \lambda) = e^{\lambda x} + \sum_{s=1}^{n-1} \int_x^{x\omega_s} e^{\lambda\tau} N_s \left(\frac{\tau - x\omega_s}{1 - \omega_s} \right) d\tau, \tag{38}$$

где

$$N_s(\xi) = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\xi^k}{k!\, n} \sum_{j=0}^{n-2-k} \frac{(\omega_s - 1)^k}{\omega_s^{k+j+1}} h_{k,j},$$

$$h_{k,j} = a_{k+j+1,j} - \sum_{\nu=0}^{k-1} a_{\nu+j,j} \sum_{m=\nu}^{k-1} C_{m+j}^{m-\nu} q_{k-m-1}^{(m-\nu)}(0).$$

Применив метод последовательных приближений к уравнению (37), получим

$$y(x, \lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} R_j(x, \lambda), \tag{39}$$

где функции $R_j(x, \lambda)$ определяются из рекуррентных соотношений

$$R_{j+1}(x, \lambda) = \frac{1}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-2} \int_0^x \varphi^{(n-1-k)}(x - t, \lambda)\, q_k(t)\, R_j(t, \lambda)\, dt,\ j = 0, 1, 2, \cdots. \tag{40}$$

Методом индукции докажем, что функции $R_j(x, \lambda)$ допускают представление

$$R_j(x, \lambda) = \sum_{s=1}^{n-1} \int_x^{x\omega_s} e^{\lambda\tau} G_{s,j} \left(\frac{\tau - x\omega_s}{1 - \omega_s}, \frac{x - \tau}{1 - \omega_s} \right) d\tau,\ j = 1, 2, \cdots, \tag{41}$$

где функции $G_{s,j}(\xi, z)$ $(j = 1, 2, \cdots)$ при каждом фиксированном ξ $(0 \leqslant \xi \leqslant l)$ регулярны и ограничены по переменной z в многоугольнике $\bar{\Delta}_s(\xi, l)$, который определяется следующим образом: $z \in \bar{\Delta}_s(\xi, l)$, если $(\alpha z + \zeta) \in \Delta_l$ при всех (см. (12)) $\zeta \in \Delta_s(\xi)$ и $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Отметим, что $\Delta_s(l - \xi) \subseteq \tilde{\Delta}_s(\xi, l) \subseteq \Delta_l$.

Пусть при некотором j формула (41) верна. Тогда имеем

$$R_j(x, \lambda) = \sum_{s=1}^{n-1} (\omega_s - 1) \int_0^x e^{\lambda[x - (1 - \omega_s)v]} G_{s,j}(x - v, v)\, dv. \tag{42}$$

Заметим, что

$$\frac{1}{\lambda^n} \varphi^{(n-1-k)}(x, \lambda) = \frac{1}{k!\, n} \sum_{\nu=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{\omega_\nu}\right)^{k+1} \int_0^x (x - u)^k e^{\lambda[x - (1 - \omega_\nu)u]}\, du, \tag{43}$$

$$k = 0, 1, \cdots, n - 2.$$

В силу (42) и (43) из (40) имеем

$$R_{j+1}(x,\lambda)=\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!\,n}\sum_{s,\nu=1}^{n-1}(\omega_s-1)\left(1-\frac{1}{\omega_\nu}\right)^{k+1}e^{\lambda x}\,T_{k,s,\nu}(x,\lambda), \quad (44)$$

где

$$T_{k,s,\nu}(x,\lambda)=$$
$$=\int_0^x q_k(t)\int_0^{x-t}(x-t-u)^k\int_0^t G_{s,j}(t-v,v)\,e^{\lambda[(\omega_\nu-1)u+(\omega_s-1)v]}\,dvdudt. \quad (45)$$

Если в формуле (45) сделать замену переменных $u=u_1$, $t=t_1-u_1$, $v=v_1-u_1$ и опустить индексы у новых переменных, то получим

$$T_{k,s,\nu}(x,\lambda)=$$
$$=\int_0^x(x-t)^k\int_0^t\int_0^v e^{\lambda[(\omega_\nu-\omega_s)u+(\omega_s-1)v]}\,q_k(t-u)\,G_{s,j}(t-v,v-u)\,dudvdt. \quad (46)$$

Из (46) при $\nu=s$ имеем

$$T_{k,s,s}(x,\lambda)=$$
$$=\int_0^x(x-t)^k\int_0^t e^{\lambda(\omega_s-1)v}\int_0^v q_k(t-u)\,G_{s,j}(t-v,v-u)\,dudvdt, \quad (47)$$

Если в (46) при $\nu\neq s$ сделать замену переменного (см. (13)) $u=\zeta+v\sigma_{\nu,s}^{-1}$, то получим

$$T_{k,s,\nu}(x,\lambda)=\int_0^x(x-t)^k\int_0^t\int_{-v\sigma_{\nu,s}^{-1}}^{v\sigma_{s,\nu}^{-1}}e^{\lambda(\omega_\nu-\omega_s)\zeta}\times$$
$$\times q_k\left(t-\zeta-\frac{v}{\sigma_{\nu,s}}\right)G_{s,j}\left(t-v,\frac{v}{\sigma_{s,\nu}}-\zeta\right)d\zeta dvdt. \quad (48)$$

Однако в силу (36) и согласно предположению относительно функций $G_{s,j}(\xi,z)$, формулу (48) можно записать в виде

$$T_{k,s,\nu}(x,\lambda)=\int_0^x(x-t)^k\int_0^t\int_0^{v\sigma_{s,\nu}^{-1}}e^{\lambda(\omega_\nu-\omega_s)\zeta}\times$$
$$\times q_k\left(t-\zeta-\frac{v}{\sigma_{\nu,s}}\right)G_{s,j}\left(t-v,\frac{v}{\sigma_{s,\nu}}-\zeta\right)d\zeta dvdt-$$
$$-\int_0^x(x-t)^k\int_0^t\int_0^{-v\sigma_{\nu,s}^{-1}}e^{\lambda(\omega_\nu-\omega_s)\zeta}\,q_k\left(t-\zeta-\frac{v}{\sigma_{\nu,s}}\right)G_{s,\nu}\left(t-v,\frac{v}{\sigma_{s,\nu}}-\zeta\right)d\zeta dvdt. \quad (49)$$

Из (49) имеем

$$T_{k,s,\nu}(x,\lambda)=$$

$$=\frac{1}{\sigma_{s,\nu}}\int_0^x (x-t)^k\int_0^t\int_0^v e^{\lambda(\omega_\nu-1)u} q_k\left(t-v+\frac{v-u}{\sigma_{s,\nu}}\right)G_{s,j}\left(t-v,\frac{v-u}{\sigma_{s,\nu}}\right)du\,dv\,dt+$$

$$+\frac{1}{\sigma_{\nu,s}}\int_0^x (x-t)^k\int_0^t\int_0^v e^{\lambda(\omega_s-1)u} q_k\left(t-\frac{v-u}{\sigma_{\nu,s}}\right)G_{s,j}\left(t-v,v-\frac{v-u}{\sigma_{\nu,s}}\right)du\,dv\,dt. \tag{50}$$

С помощью изменения порядка интегрирования и простых замен переменных из формул (44), (47) и (50) получим

$$R_{j+1}(x,\lambda)=\sum_{s=1}^{n-1}\int_x^{x\omega_s} e^{\lambda\tau}G_{s,j+1}\left(\frac{\tau-x\omega_s}{1-\omega_s},\frac{x-\tau}{1-\omega_s}\right)d\tau, \tag{51}$$

где функция $G_{s,j+1}(\xi,z)$ определяется по формуле

$$G_{s,j+1}(\xi,z)=\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!\,n}\left\{\left(1-\frac{1}{\omega_s}\right)^{k+1}\int_0^\xi(\xi-u)^k\int_0^z q_k(u+\zeta)\,G_{s,j}(u,\zeta)\,d\zeta\,du+\right.$$

$$+\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq s}}^{n-1}\frac{1}{\sigma_{\nu,s}}\left(1-\frac{\omega_s}{\omega_\nu}\right)^{k+1}\int_0^\xi\int_z^{\frac{\xi-u}{\sigma_{s,\nu}}+z}\left(\frac{\xi-u}{\sigma_{s,\nu}}+z-\zeta\right)^k q_k(u+\zeta)\,G_{s,j}(u,\zeta)\,d\zeta\,du-$$

$$\left.-\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq s}}^{n-1}\frac{1}{\sigma_{s,\nu}}\left(1-\frac{\omega_\nu}{\omega_s}\right)^{k+1}\int_0^\xi\int_0^{\frac{\xi-u}{\sigma_{\nu,s}}}\left(\frac{\xi-u}{\sigma_{\nu,s}}-\zeta\right)^k q_k(u+\zeta)\,G_{\nu,j}(u,\zeta)\,d\zeta\,du\right\}. \tag{52}$$

Если учесть формулы

$$\left(1-\frac{1}{\omega_s}\right)^{k+1}(\xi-u)^k=(1-\omega_s)^{k+1}(z-\zeta)^k+$$

$$+\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq s}}^{n-1}\frac{1}{\sigma_{\nu,s}}\left(1-\frac{\omega_s}{\omega_\nu}\right)^{k+1}\left(\frac{\xi-u}{\sigma_{s,\nu}}+z-\zeta\right)^k,$$

$$k=0,\ 1,\cdots,\ n-2,$$

и аналитичность подынтегральных функций в (52), то соотношение (52) приводится к более удобному виду

$$G_{s,j+1}(\xi,z)=\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!\,n}\left\{(1-\omega_s)^{k+1}\int_0^\xi\int_0^z(z-\zeta)^k q_k(u+\zeta)\,G_{s,j}(u,\zeta)\,d\zeta\,du+\right.$$

$$+\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq s}}^{n-1}\frac{1}{\sigma_{\nu,s}}\left(1-\frac{\omega_s}{\omega_\nu}\right)^{k+1}\int_0^{\xi}\int_0^{\frac{\xi-u}{\sigma_{s,\nu}}+z}\left(\frac{\xi-u}{\sigma_{s,\nu}}+z-\zeta\right)^k q_k(u+\zeta)\,G_{s,j}(u,\zeta)\,d\zeta du-$$

$$-\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq s}}^{n-1}\frac{1}{\sigma_{s,\nu}}\left(1-\frac{\omega_\nu}{\omega_s}\right)^{k+1}\int_0^{\xi}\int_0^{\frac{\xi-u}{\sigma_{\nu,s}}}\left(\frac{\xi-u}{\sigma_{\nu,s}}-\zeta\right)^k q_k(u+\zeta)\,G_{\nu,j}(u,\zeta)\,d\zeta du\Bigg\}. \tag{53}$$

Если приведенные выше рассуждения применить к формуле (40), соответствующей значению $j=0$, то получим представление (41), соответствующее значению $j=1$, при этом для функции $G_{s,1}(\xi, z)$ получим формулу

$$G_{s,1}(\xi,z)=\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!\,n}\Bigg\{\frac{1}{\omega_s}\left(1-\frac{1}{\omega_s}\right)^k\int_0^{\xi}(\xi-u)^k q_k(u)\,du+$$

$$+(1-\omega_s)^{k+1}\int_0^{\xi}N_s(u)\int_0^{z}(z-\zeta)^k q_k(u+\zeta)\,d\zeta du+$$

$$+\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq s}}^{n-1}\frac{1}{\sigma_{\nu,s}}\left(1-\frac{\omega_s}{\omega_\nu}\right)^{k+1}\int_0^{\xi}N_s(u)\int_0^{\frac{\xi-u}{\sigma_{s,\nu}}+z}\left(\frac{\xi-u}{\sigma_{s,\nu}}+z-\zeta\right)^k q_k(u+\zeta)\,d\zeta du-$$

$$-\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq s}}^{n-1}\frac{1}{\sigma_{s,\nu}}\left(1-\frac{\omega_\nu}{\omega_s}\right)^{k+1}\int_0^{\xi}N_\nu(u)\int_0^{\frac{\xi-u}{\sigma_{\nu,s}}}\left(\frac{\xi-u}{\sigma_{\nu,s}}-\zeta\right)^k q_k(u+\zeta)\,d\zeta du\Bigg\}. \tag{54}$$

Из формул (54) и (53) следует, что функции $G_{s,1}(\xi, z)$ и $G_{s,j+1}(\xi, z)$ регулярны и ограничены по переменной z в области $\bar{\Delta}_s(\xi, l)$. Формулы (41) доказаны.

Из (37) вытекает конечность величины

$$c=\frac{2n-3}{n}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{2^{k+1}}{k!}\Bigg\{\sup_{0<\xi<l;\ z\in\Delta_l}\int_{\xi}^{z}|z-\zeta|^k\,|q_k(\zeta)|\,|d\zeta|\Bigg\}<\infty.$$

Учитывая это, из формулы (54) получим неравенство

$$|G_{s,1}(\xi,z)|\leqslant c\left\{\frac{1}{2(2n-3)}+\max_{1<s<n-1}\int_0^{l}|N_s(u)|\,du\right\}=c_1,$$

после чего, из формул (53) по индукции получаются оценки

$$|G_{s,\,j+1}(\xi,\ z)|\leqslant c_1\frac{(c\xi)^j}{j!},\quad j=1,\ 2,\cdots.$$

Положим

$$G_s(\xi,\ z)=N_s(\xi)+\sum_{j=1}^{\infty}G_{s,j}(\xi,\ z),\ s=1,\ 2,\cdots,\ n-1. \tag{55}$$

В силу равномерной сходимости ряда (55) функция $G_s(\xi,\ z)$ при фиксированном $\xi\ (0\leqslant\xi\leqslant l)$ регулярна и ограничена по переменной z в области $\bar{\Delta}_s(\xi,\ l)$. Если формулы (54) просуммировать по значениям j и учесть (54), (55), то для функций $G_s(\xi,\ z)$ получим следующую систему интегральных уравнений:

$$G_s(\xi,\ z)=N_s(\xi)+\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!\,n}\frac{1}{\omega_s}\left(1-\frac{1}{\omega_s}\right)^k\int_0^{\xi}(\xi-u)^k q_k(u)\,du+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!\,n}\Bigg\{(1-\omega_s)^{k+1}\int_0^{\xi}\int_0^{z}(z-\zeta)^k q_k(u+\zeta)\,G_s(u,\zeta)\,d\zeta du+$$

$$+\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq s}}^{n-1}\frac{1}{\sigma_{\nu,\,s}}\left(1-\frac{\omega_s}{\omega_\nu}\right)^{k+1}\int_0^{\xi}\int_0^{\frac{\xi-u}{\sigma_{s,\,\nu}}+z}\left(\frac{\xi-u}{\sigma_{s,\,\nu}}+z-\zeta\right)^k q_k(u+\zeta)\,G_s(u,\zeta)\,d\zeta du-$$

$$-\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq s}}^{n-1}\frac{1}{\sigma_{s,\,\nu}}\left(1-\frac{\omega_\nu}{\omega_s}\right)^{k+1}\int_0^{\xi}\int_0^{\frac{\xi-u}{\sigma_{\nu,\,s}}}\left(\frac{\xi-u}{\sigma_{\nu,\,s}}-\zeta\right)^k q_k(u+\zeta)\,G_\nu(u,\zeta)\,d\zeta du\Bigg\},$$

$$s=1,\ 2,\cdots,\ n-1.$$

В силу (38), (41) и (55) из (39) получим формулу

$$y(x,\lambda)=e^{\lambda x}+\sum_{s=1}^{n-1}\int_x^{x\omega_s}e^{\lambda\tau}\,G_s\left(\frac{\tau-x\omega_s}{1-\omega_s},\ \frac{x-\tau}{1-\omega_s}\right)d\tau.$$

Остается положить

$$M_s(x,\ \tau)=G_s\left(\frac{\tau-x\omega_s}{1-\omega_s},\ \frac{x-\tau}{1-\omega_s}\right),\ s=1,\ 2,\cdots,\ n-1.$$

Теорема доказана.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 16.VI.1978

Ի. Գ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ. Ձևափոխության օպերատորներ եզրային խնդիրների համար *(ամփոփում)*

Հոդվածում երկու եզրային խնդիրների համար կառուցվում է սպեկտրալ պարամետրից անկախ վոլտերյան K ինտեգրալ օպերատոր այնպիսին, որ $I+K$ օպերատորը մի խնդրի լուծումները ձևափոխում է մյուսի լուծումներին։

J. G. KHACHATRIAN. *The transformation operators for the boundary problems* (summary)

For two boundary problems the Volterra's integral operator K uudepending on the spectral parameter and such that the operator $I+K$ transforms the solutions of one problem into the solutions of the other is constructed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Я. Повзнер.* О дифференциальных уравнениях типа Штурма—Лиувилля на полуоси, Матем. сб., 23 (65), 1948, 3—52.
2. *Б. Я. Левин.* Преобразование типа Фурье и Лапласа при помощи решений дифференциального уравнения второго порядка, ДАН СССР, 106, № 2, 1956, 187—190.
3. *В. А. Марченко.* Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка, Труды ММО, 1, 1952, 327—420.
4. *В. А. Марченко.* Спектральная теория операторов Штурма—Лиувилля, Киев, 1972.
5. *Л. А. Сахнович.* Обратная задача для дифференциальных операторов порядка $n > 2$ с аналитическими коэффициентами, Матем. сб., 46 (88), № 1, 1958, 61—76.
6. *Л. А. Сахнович.* Необходимые условия наличия оператора преобразования для уравнения четвертого порядка, УМН, 16, вып. 5, 1961, 199—204.
7. *Л. А. Сахнович.* Метод оператора преобразования для уравнений высших порядков, Матем. сб., 55 (97), № 3, 1961, 347—360.
8. *Л. А. Сахнович.* Об обратной задаче для уравнений четвертого порядка, Матем. сб., 56 (98), № 2, 1962, 137—146.
9. *В. И. Мацаев.* О существовании оператора преобразования для дифференциальных уравнений высших порядков, ДАН СССР, 130, № 3, 1960, 499—502.
10. *М. К. Фаге.* Интегральные представления операторно-аналитических функций одной независимой переменной, Труды ММО, 8, 1959, 3—48.
11. *А. Ф. Леонтьев.* Оценка роста решения одного дифференциального уравнения при больших по модулю значениях параметра и ее применения к некоторым вопросам теории функций, Сиб. матем ж., 1, № 3, 1960, 456—487.
12. *Ю. Н. Валицкий.* Об операторе преобразования для интегро-дифференциольных операторов типа Вольтерра, Сб. «Матем. физика», Киев, 1965, 23—36.
13. *А. П. Хромов.* Об одном представлении ядер резольвент вольтерровских операторов и его применениях, Матем. сб., 89 (131), № 2 (10), 1972 207—226
14. *И. Г. Хачатрян.* Об операторах преобразования для дифференциальных уравнений высших порядков, Изв. АН Арм. ССР, серия матем., XIII, № 3, 1979, 215—237
15. *И. Г. Хачатрян.* О существовании оператора преобразования для дифференциальных уравнений высших порядков, сохраняющего асимптотику решений, Изв. АН Арм. ССР, серия матем., XIV, № 6, 1979.
16. *И. И. Привалов.* Граничные свойства аналитических функций, М., 1950.