ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIV, № 6, 1979 Математика

М. М. ДЖРБАШЯН

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ И ЗАМКНУТОСТЬ НЕКОТОРЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Еще Винер и Пэли в своей знаменитой монографии привели несколько интересных приложений следующего простого, но важного положения:

Свойства замкнутости и ортогональности инвариантны при любом линейном преобразовании всего L_2 в себя, которое сохраняет величину интеграла от квадрата модуля каждой функции (см. [1], гл. II).

Настоящая статья посвящена дальнейшим систематическим приложениям указанного рода подхода к исследованию вопросов представления и замкнутости ряда важных систем аналитических функций. Именно с этой точки зрения здесь излагается ряд результатов автора, анонсированных им без доказательств в двух его ранних заметках ([2], [3]). Кроме того, с той же точки зрения, излагаются некоторые давние результаты и других авторов, по возможности в наиболее общей формулировке, начиная от классической теоремы Мюнца-Сасса ([4], [1]) и кончая некоторыми результатами Поллачека о полиномах, ортогональных с весом на всей вещественной оси ([5], [6]).

Что касается результатов, установленных ранее другими авторами, то в данной статье их изложение, в основном, значительно отличается от первоначального.

Поскольку, таким образом, данная статья частично имеет обзорный характер, то мы сочли необходимым в конце параграфов 1 и 2 привести подробные литературные ссылки, освещающие историю вопроса в хронологическом порядке. Не претендуя на полноту в этих ссылках, мы постарались, иногда довольно подробно, останавливаться также на сущности и методах, примененных в предшествующих работах и их взаимосвязи.

В § 1 сначала приводятся формулировки ряда общеизвестных результатов гармонического анализа, которыми мы будем систематически пользоваться во всем дальнейшем изложении. Здесь приводятся также определенные ортонормальные на всей оси $(-\infty, +\infty)$ системы рациональных функций Мальмквиста и Такенака (теорема 1). На основе отмеченного выше общего положения об инвариантности свойств ортогональности и замкнутости при линейных преобразованиях в L_2, сохраняющих норму, теорема 1 по существу является основой при установлении ряда теорем, приводимых в последующем изложении.

В § 2 приводится интегральное представление ортогонализированной на $(0, +\infty)$ системы Мюнца-Сасса $\{e^{-\nu_k t} x^{\nu_k-1}\}_1^\infty$ (теорема 2), а также критерий замкнутости этой системы в $L_2(0, +\infty)$ и эквивалентной ей системы $\{u^{\nu_j}(\log u)^{r_j-1}\}_0^\infty$ в $L_2(0, 1)$ (теоремы 3 и 3′).

В § 3 устанавливается эффективная ортогонализация систем функций вида $\{\varkappa_{p_j-1}(t)\, e^{-\tau_j t}\}_0^\infty$, где

$$\varkappa_j(t) = \Gamma\left(j+\frac{1}{2}+it\right)\Big/\Gamma\left(\frac{1}{2}+it\right) \quad (j \geqslant 0)$$

в виде ее интегрального представления (теорема 4). Критерий замкнутости этой системы с весом $\operatorname{ch}^{-1}\pi t$ в $L_2(-\infty, +\infty)$ является существенным обобщением одной известной теоремы Винера и Пэли (теорема 5). Приводимые здесь же специальные случаи этих теорем — об интегральном представлении и замкнутости систем полиномов $\{P_n(t)\}_0^\infty$, ортонормальных на $(-\infty, +\infty)$ с весом $\operatorname{ch}^{-1}\pi t$ — имеют самостоятельный интерес (теоремы 6 и 7). Они по существу служат основой для последующих важных результатов такого же рода, излагаемых дальше.

Наконец, заключительный § 4 посвящен изложению теории систем полиномов Ф. Поллачека $\{P_n^{(\alpha)}(t; \varphi)\}_0^\infty$, ортонормальных на $(-\infty, +\infty)$ с весовой функцией вида

$$w^{(\alpha)}(t; \varphi) = \frac{2^\alpha}{\pi}(\sin\varphi)^{1+\alpha}\left|\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}+it\right)\right|^2 e^{-(\pi-2\varphi)t}, \quad -\infty < t < +\infty,$$

где $\alpha \in (-1, +\infty)$ и $\varphi \in (0, \pi)$ — произвольные параметры.

Отметим, однако, что Поллачек построил теорию своих полиномов совершенно отличным от приводимого нами методом, позволившим ему установить лишь их замкнутость (теорема 9), производящую функцию (теорема 11) и рекуррентные уравнения (теорема 12).

Развитый здесь метод построения теории полиномов Поллачека, анонсированный автором в его заметке [2], позволил установить новый важный факт — интегральное представление этих полиномов (теоремы 8 и 10). Кроме того, в конце мы приводим также построение родственных ортогональных полиномов для полуоси $(0, +\infty)$ с установлением всех соответствующих результатов для них (теоремы 13, 14, 15 и 16).

§ 1. Предварительные сведения

1.1. (а). Как обычно, обозначим через $L_2(a, b)$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$ класс измеримых на промежутке (a, b) комплекснозначных функций, для которых существует конечный интеграл Лебега

$$\int_a^b |f(x)|^2\, dx,$$

при этом число

$$\|f(x)\|_{L_2(a,\, b)} = \left\{ \int_a^b |f(x)|^2\, dx \right\}^{1/2}$$

называется *нормой элемента* $f(x) \in L_2(a, b)$.

Если понятно о каком промежутке идет речь, то будем пользоваться более краткими обозначениями L_2 и $\|f\|$.

Элемент $f(x) \in L_2(a, b)$ *называется пределом последовательности элементов* $\{f_n(x)\}_1^\infty$, $f_n(x) \in L_2(a, b)$ *по норме, если*

$$\lim_{n \to \infty} \|f - f_n\| = 0.$$

Этот предел $f(x)$ называется также *пределом в среднем* последовательности элементов $\{f_n(x)\}_1^\infty$, и применяется также краткая запись

$$f(x) = \overset{(a,\, b)}{l \cdot i \cdot m}\, f_n(x).$$

(б) Для произвольной функции $f(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$ интеграл Фурье

$$\mathbf{F}[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-iut}\, dt$$

в смысле Лебега, вообще говоря, не существует.

Как известно, Планшерель впервые построил оператор Фурье $\mathbf{F}[f]$ для класса $L_2(-\infty, +\infty)$, доказав теорему, устанавливающую полное равноправие между функцией и ее преобразованием Фурье.

Теорема А (Планшерель). *Пусть* $f(x)$ — *произвольная функция из класса* $L_2(-\infty, +\infty)$. *Тогда*

1°. *Преобразование Фурье* $F(u) = \mathbf{F}[f]$ *и его обращение* $f(x) = \mathbf{F}^{-1}[f]$ *могут быть определены предельными соотношениями*

$$F(u) = \underset{\sigma \to +\infty}{\overset{(-\infty,\, +\infty)}{l \cdot i \cdot m}}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} f(t)\, e^{-iut}\, dt, \tag{1.1}$$

$$f(x) = \underset{\sigma \to +\infty}{\overset{(-\infty,\, +\infty)}{l \cdot i \cdot m}}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} F(u)\, e^{ixu}\, du, \tag{1.2}$$

причем имеет место равенство Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(u)|^2\, du = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\, dx. \tag{1.3}$$

2°. *Для любой пары функций* $f(x)$ *и* $g(x)$ *из* $L_2(-\infty, +\infty)$ *и их преобразований Фурье* $F(u) = \mathbf{F}[f]$ *и* $G(u) = \mathbf{F}[g]$ *имеет место обобщенное равенство Парсеваля*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(u)\,\overline{G(u)}\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx. \tag{1.4}$$

(в) Следующее предложение о преобразованиях Меллина в классах L_2 непосредственно следует из теоремы Планшереля.

Теорема Б. *Пусть $\varphi(x)$ — произвольная функция из класса $L_2(0, +\infty)$. Тогда*

1°. *Преобразование Меллина*

$$\Phi(t) = M[\varphi] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underset{\sigma\to+\infty}{\overset{(+\infty,+\infty)}{l\cdot i\cdot m}} \int_{1/\sigma}^{\sigma} \varphi(x)\, x^{-\frac{1}{2}-it}\,dx \tag{1.5}$$

и его обращение

$$\varphi(x) = M^{-1}[\Phi] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underset{\sigma\to+\infty}{\overset{(0,\infty)}{l\cdot i\cdot m}} \int_{-\sigma}^{\sigma} \Phi(t)\, x^{-\frac{1}{2}-it}\,dt \tag{1.6}$$

осуществляют взаимно-однозначные отображения семейств функций $L_2(0, +\infty)$ и $L_2(-\infty, +\infty)$ друг на друга с сохранением норм

$$\int_0^{\infty} |\varphi(x)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(t)|^2\,dt. \tag{1.7}$$

2°. *Для произвольных пар функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ из $L_2(0, +\infty)$ и их преобразований Меллина $\Phi_1(t) = M[\varphi_1]$, $\Phi_2(t) = M[\varphi_2]$ имеет место равенство*

$$\int_0^{\infty} \varphi_1(x)\,\overline{\varphi_2(x)}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1(t)\,\overline{\Phi_2(t)}\,dt. \tag{1.8}$$

(г) Напомним теперь определение класса H^2_+ аналитических функций Харди-Тамаркина. А именно, класс H^2_+ — суть множество аналитических в верхней полуплоскости

$$G^{(+)} = \{z:\ \operatorname{Im} z > 0\}$$

функций $f(z)$, для которых

$$\|f\| = \sup_{0<y<+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^2\,dx \right\} < +\infty. \tag{1.9}$$

Отметим, что, как впервые было установлено в совместной с А. Е. Аветисяном работе автора (см. [7], стр. 417, а также [8], стр. 448), класс H^2_+ совпадает с множеством аналитических в области $G^{(+)}$ функций $f(z)$, для которых

$$\sup_{0<\varphi<\pi}\left\{\int_0^{+\infty}|f(re^{i\varphi})|^2\,dr\right\}<+\infty.^{*} \tag{1.9'}$$

Как известно, если $f(z)\in H^2_+$, то почти для всех $x\in(-\infty,+\infty)$ существует предельная функция

$$\lim_{y\to+0} f(x+iy)=f(x)\in L_2(-\infty,+\infty),$$

посредством которой сама функция $f(z)$ представима интегральной формулой Коши (см., например, [16])

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)}{t-z}\,dt=\begin{cases}f(z), & z\in G^{(+)}\\ 0, & z\in G^{(-)}=\{z:\operatorname{Im} z<0\}.\end{cases} \tag{1.10}$$

Для функций класса H^2_+ справедлива следующая фундаментальная

Теорема B (Винер-Пэли). 1°. *Для граничных значений* $f(x)$ *любой функции* $f(z)\in H^2_+$ *почти всюду*

$$F(u)=\mathbf{F}[f]=0,\quad -\infty<u<0. \tag{1.11}$$

Обратно, если функция $f(x)\in L_2(-\infty,+\infty)$ *обладает свойством* (1.11), *то она почти всюду на* $(-\infty,+\infty)$ *совпадает с граничными значениями некоторой функции* $f(z)\in H^2_+$.

2°. *Класс* H^2_+ *совпадает с множеством функций представимых в виде*

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}e^{izt}\varphi(t)\,dt,\quad z\in G^{(+)}, \tag{1.12}$$

где $\varphi(t)$ — *произвольная функция из* $L_2(0,+\infty)$, *причем*

$$\int_0^{\infty}|\varphi(t)|^2\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2\,dx. \tag{1.13}$$

Отсюда и из формулы (1.4) теоремы A вытекает

Следствие. *Пусть* $f_j(z)\in H^2_+$ $(j=1,2)$ *и* $F_j(u)=\mathbf{F}[f_j]$ $(j=1,2)$ — *преобразования Фурье их граничных значений* $f_j(x)$ $(j=1,2)$.

Тогда справедливо равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)\overline{f_2(x)}\,dx=\int_0^{+\infty}F_1(u)\overline{F_2(u)}\,du. \tag{1.14}$$

---

* Отметим, что значительно позже этот же результат был повторен в работе [9].

(д) Система функций $\{f_n(x)\}_1^\infty$, $f_n(x)\in L_2(a, b)$ $(-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty)$ называется *замкнутой* в $L_2(a, b)$, если из условий

$$f(x)\in L_2(a, b), \int_a^b f(x)\overline{f_n(x)}\,dx=0 \ (n=1, 2, \cdots)$$

вытекает, что $f(x)=0$ почти всюду на (a, b).

Если для любой функции $f(x)\in L_2(a, b)$

$$\inf_{\{P_n\}}\int_a^b |f(x)-P_n(x)|^2\,dx=0,$$

где P_n — всевозможные „полиномы" вида

$$P_n(x)=\sum_{k=1}^n a_k f_k(x),$$

то система функций $\{f_n(x)\}_1^\infty$ называется *полной* в $L_2(a, b)$.

Общеизвестно, что как в случае ортонормальной системы функций $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$

$$\int_b^a \varphi_n(x)\overline{\varphi_m(x)}\,dx=\delta_{nm}=\begin{cases}1, & m=n\\ 0, & m\neq n\end{cases} \ (m, n=1, 2, \cdots), \tag{1.15}$$

так и в общем случае произвольной счетной системы функций $\{f_n(x)\}_1^\infty$, *свойства замкнутости и полноты эквивалентны.*

В заключение сформулируем следующее предложение, которое непосредственно следует из обобщенных равенств Парсеваля (1.4), (1.8) и (1.12) теорем А, Б и следствия теоремы В.

Теорема Г. *Нижеследующие последовательности функций в соответствующих классах обладают одинаковыми свойствами полноты и замкнутости, а также ортонормальности.*

1°.

$$\{f_n(x)\}_1^\infty,\ f_n(x)\in L_2(-\infty, +\infty),$$
$$\{F_n(u)\}_1^\infty,\ F_n(u)=\mathbf{F}[f_n]\in L_2(-\infty, +\infty), \tag{1.16}$$

2°.

$$\{\varphi_n(x)\}_1^\infty,\ \varphi_n(x)\in L_2(0, +\infty),$$
$$\{\Phi_n(t)\}_1^\infty,\ \Phi_n(t)=M[\varphi_n]\in L_2(-\infty, +\infty), \tag{1.17}$$

3°.

$$\{\omega_n(x)\}_1^\infty,\ \omega_n(z)\in H_2^+,$$
$$\{\Omega_n(u)\}_1^\infty,\ \Omega_n(u)=\mathbf{F}[\omega_n]\in L_2(0, +\infty). \tag{1.18}$$

(е) Наконец, о функции Бляшке для верхней полуплоскости.

Пусть $\{z_j\}_1^\infty$ — произвольная последовательность комплексных чисел, расположенных в верхней полуплоскости $G^{(+)}$.

Как известно, *условие*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} \lambda_j}{1+|\lambda_j|^2} < +\infty \tag{1.19}$$

необходимо и достаточно для сходимости произведения Бляшке

$$B(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{z-\lambda_j}{z-\bar{\lambda}_j}\,\varkappa_j, \quad \varkappa_j = \frac{|1+\lambda_j^2|^{*}}{1+\lambda_j^2} \tag{1.20}$$

к аналитической в $G^{(+)}$ функции $B(z) \not\equiv 0$, обращающейся в нуль в *точках* последовательности $\{\lambda_j\}_1^{\infty}$.

Функция Бляшке $B(z)$ обладает свойствами:

1) $$|B(z)| \leqslant 1, \ z \in G^{(+)}, \tag{1.21}$$

2) почти всюду на $(-\infty, +\infty)$ существуют ее граничные значения

$$B(x) = \lim_{y \to +0} B(x+iy), \text{ причем } |B(x)| = 1. \tag{1.22}$$

Отметим также, что если для любого k $(1 \leqslant k < +\infty)$ обозначить через p_k — *кратность появления числа* λ_k во всей последовательности $\{\lambda_j\}_1^{\infty}$, то при условии (1.19) всегда будем иметь $1 \leqslant p_k < < +\infty$.

Поэтому для любого k $(1 \leqslant k < +\infty)$ точка $z = \lambda_k$ для функции $B(z)$ будет нулем кратности $p_k < +\infty$.

1.2. (a) Пусть $\{\lambda_j\}_1^{\infty}$, $\lambda_j \in G^{(+)}$ — произвольная последовательность комплексных чисел. Впредь для каждого k $(1 \leqslant k < +\infty)$ мы будем обозначать через $s_k \geqslant 1$ кратность появления числа λ_k на отрезке $\{\lambda_j\}_1^{k}$, а через p_k — кратность его появления во всей последовательности $\{\lambda_j\}_1^{\infty}$. Очевидно, что, вообще говоря,

$$1 \leqslant s_k \leqslant p_k \leqslant +\infty \ (1 \leqslant k < +\infty),$$

причем, как отмечалось выше, при условии (1.19) всегда $p_k < +\infty$.

С последовательностью чисел $\{\lambda_j\}_1^{\infty}$ будем ассоциировать систему рациональных функций $\{\Phi_n(z)\}_1^{\infty}$, где

$$\Phi_1(z) = \frac{\sqrt{\operatorname{Im} \lambda_1}}{z-\bar{\lambda}_1}, \quad \Phi_n(z) = \frac{\sqrt{\operatorname{Im} \lambda_n}}{z-\bar{\lambda}_n} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{z-\lambda_k}{z-\bar{\lambda}_k} \quad (n = 2, 3, \cdots). \tag{1.23}$$

Множество полюсов системы $\{\Phi_n(z)\}_1^{\infty}$ лежит на последовательности точек $\{\bar{\lambda}_j\}_1^{\infty}$, принадлежащих нижней полуплоскости $G^{(-)}$.

Отметим, что дробно-линейное преобразование $z = i\,\dfrac{1+w}{1-w}$ переводит систему $\{\Phi_n(z)\}_1^{\infty}$ в давно известную, ортогональную на окружности $|w| = 1$, систему рациональных функций $\{\varphi_n(w)\}_1^{\infty}$ с полюсами, лежащими в области $|w| > 1$. Эта система была открыта Ф. Мальмквистом — С. Такенака (см. [10] и [11], а также [12], стр. 363 и [13]).

* При этом условимся полагать $\varkappa_j = 1$ при $\lambda_j = i$.

В связи со сказанным, ортонормальность системы функций $\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Phi_n(z)\right\}_1^\infty$, на всей оси $(-\infty, +\infty)$, т. е. справедливость соотношений

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_n(x)\,\overline{\Phi_m(x)}\,dx = \delta_{nm} \quad (n;\ m = 1, 2, 3, \cdots) \tag{1.24}$$

является простой переформулировкой замечательного факта ортогональности на окружности $|w| = 1$ системы $\{\varphi_n(w)\}_1^\infty$, установленной указанными авторами.

Впрочем, соотношения ортонормальности (1.24) легко установить и непосредственно (см. [14], лемму 1).

Наконец, отметим очевидное свойство функций системы (1.24), а именно

$$\Phi_n(z) \in H_+^2 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots). \tag{1.25}$$

(б) Приведем теперь две простые леммы.

Лемма 1. *Для любого n $(1 \leqslant n < +\infty)$ справедливы представления вида*

$$\Phi_n(z) = \sum_{j=1}^{n}\frac{c_{nj}}{(z-\overline{\lambda}_j)^{s_j}}, \text{ где } c_{nn} \neq 0, * \tag{1.26'}$$

$$\frac{1}{(z-\overline{\lambda}_n)^{s_n}} = \sum_{j=1}^{n} c_{jn}^{*}\,\Phi_j(z), \text{ где } c_{nn}^{*} = c_{nn}^{-1}. \tag{1.26''}$$

Действительно, $\Phi_n(z)$ является правильной рациональной дробью со знаменателем $\prod_{j=1}^{n}(z-\overline{\lambda}_j)$. Поэтому, принимая во внимание определение чисел s_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$, очевидно, что формулы (1.26′) представляют собой обычное разложение нашей правильной дроби на простейшие. При этом, поскольку сама точка $z = \overline{\lambda}_n$ является для $\Phi_n(z)$ полюсом в точности порядка s_n, то заведомо $c_{nn} \neq 0$.

Что же касается формулы (1.26″) и того, что в ней $c_{nn}^{*} = c_{nn}^{-1}$, то она непосредственно следует из первых n формул вида (1.26′).

Лемма 2. *При любых $z \in G^{(+)}$ и $\lambda \in G^{(+)}$ имеет место оценка сверху*

$$\left|\frac{z-\lambda}{z-\overline{\lambda}}\right| \leqslant \exp\left\{-\rho(z)\frac{\operatorname{Im}\lambda}{1+|\lambda|^2}\right\}, \tag{1.27}$$

где

$$\rho(z) = \frac{2\operatorname{Im} z}{1+|z|^2}. \tag{1.27'}$$

---

* Если $s_j = 1$ $(1 \leqslant j < +\infty)$, то из (1.23) и (1.26′) легко следует формула (2) для коэффициентов $\{c_{jn}\}_1^\infty$ примечания [1.3].

Доказательство. Непосредственно проверяется, что справедливо тождество

$$1-\left|\frac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}}\right|^2=\frac{4\,\mathrm{Im}\,\lambda\cdot\mathrm{Im}\,z}{|z-\bar{\lambda}|^2};\ z\in G^{(+)},\ \lambda\in G^{(+)}.$$

Далее, из очевидного неравенства

$$1+|\lambda z|^2\geqslant-2\,\mathrm{Re}\,\{\lambda z\}$$

следует, что

$$|z-\bar{\lambda}|^2\leqslant(1+|\lambda|^2)(1+|z|^2).$$

Отсюда и из нашего тождества приходим к оценке

$$1-\left|\frac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}}\right|^2\geqslant 4\,\frac{\mathrm{Im}\,z\cdot\mathrm{Im}\,\lambda}{(1+|z|^2)(1+|\lambda|^2)};\ z,\ \lambda\in G^{(+)}. \tag{1.28}$$

Наконец, поскольку

$$\left|\frac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}}\right|=\exp\left\{\frac{1}{2}\,\log\left|\frac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}}\right|^2\right\}$$

и $\log(1-x)\leqslant-x$ $(0<x<1)$, из (1.28) получим неравенство (1.27) леммы.

(в) Докажем теперь теорему о полноте—замкнутости системы функций Мальмквиста-Такенака в подклассе $L_2^*(-\infty,+\infty)\subset\subset L_2(-\infty,+\infty)$ граничных значений функций класса H_+^2.

Теорема 1. *Для замкнутости системы* $\{\Phi_n(z)\}_1^\infty$, *или, что то же самое, системы* $\{(z-\bar{\lambda}_j)^{-s_j}\}_1^\infty$, *в подклассе* $L_2^*(-\infty,+\infty)$ *граничных значений функций из* H_+^2, *необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}\,\lambda_j}{1+|\lambda_j|^2}=+\infty. \tag{1.29}$$

Доказательство. Введем в рассмотрение систему $\{r_n(z)\}_1^\infty$ простейших рациональных дробей

$$r_n(z)=\frac{(s_n-1)!}{(z-\bar{\lambda}_n)^{s_n}}\in H_+^2. \tag{1.30}$$

Ввиду линейных соотношений (1.26′) и (1.26″) леммы 1, системы функций $\{\Phi_n(x)\}_1^\infty$ и $\{r_n(x)\}_1^\infty$, будучи сами из класса $L_2^*(-\infty,+\infty)$, могут быть замкнутыми во всем этом классе только одновременно. Поэтому доказательство мы будем проводить для системы $\{r_n(x)\}_1^\infty$.

Необходимость. Предположив, что ряд (1.29) сходится, докажем незамкнутость системы $\{r_n(x)\}_1^\infty$ в классе $L_2^*(-\infty,+\infty)$. Действительно, при условии (1.19) рассмотрим функцию

$$f_0(z)=\frac{B(z)}{i+z}, \tag{1.31}$$

где $B(z)$ — функция Бляшке (1.20), имеющая, как уже отмечалось, в каждой *точке* $z=\lambda_k$ нуль кратности $p_k<+\infty$ $(1\leqslant k<+\infty)$.

В силу свойств (1.21) — (1.22) функции $B(z)$, очевидно, что $f_0(z)\in H_+^2$ и, следовательно, согласно интегральной формуле Коши (1.10)

$$f_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_0(t)}{t-z}\,dt,\quad z\in G^{(+)}. \tag{1.32}$$

Но функция $f_0(z)\not\equiv 0$ и для каждого k $(1\leqslant k<+\infty)$ в точке $z=\lambda_k$ также имеет нуль конечной кратности $p_k\geqslant s_k\geqslant 1$. Следовательно, справедливы равенства

$$f_0^{(s_k-1)}(\lambda_k)=0\quad (k=1,\ 2,\ 3,\cdots).$$

Отсюда (s_k+1)-кратным дифференцированием (1.32) по параметру z получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f_0(t)\,\frac{(s_k-1)!}{(t-\lambda_k)^{s_k}}\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}f_0(t)\,\overline{r_k(t)}\,dt=0\quad (k=1,\ 2,\ 3,\cdots).$$

Поскольку почти всюду на оси $-\infty<t<+\infty$ $|f_0(t)|=|t+i|^{-1}\neq 0$ то из наших равенств следует, что система $\{r_k(x)\}_1^{\infty}$ не замкнута в классе $L_2^*(-\infty,+\infty)$.

Достаточность. Нам нужно убедиться в том, что если для граничных значений $f(x)\in L_2^*(-\infty,+\infty)$ некоторой функции $f(z)\in H_+^2$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,\overline{r_k(t)}\,dt=0\quad (k=1,\ 2,\ 3,\cdots), \tag{1.33}$$

то при условии (1.29) $f(x)=0$ почти всюду на всей оси $-\infty<x<$ $<+\infty$. Но поскольку функция $f(z)$ представима интегралом Коши

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)}{t-z}\,dt,\quad z\in G^{(+)},$$

то отсюда, ввиду равенств (1.33) и формул (1.30), заключаем, что

$$f^{(s_k-1)}(\lambda_k)=0\quad (k=1,\ 2,\ 3,\cdots). \tag{1.34}$$

Для любого n $(1\leqslant n<+\infty)$ введем в рассмотрение конечное произведение Бляшке

$$B_n(z)=\prod_{j=1}^{n}\frac{z-\lambda_j}{z-\bar{\lambda}_j}\,\varkappa_j,$$

а также функцию $\mathbf{F}_n(z)=f(z)/B_n(z)$.

Поскольку для любого k $(1\leqslant k<+\infty)$ кратность появления числа λ_k во всей последовательности $\{\lambda_j\}_1^{\infty}$ равна $p_k<+\infty$, а в ее отрезке $[\lambda_j]_1^n$ она равна $p_k(n) \leqslant p_k$, то легко видеть, что функция $\mathbf{F}_n(z)$ аналитична в полуплоскости $G^{(+)}$, и кроме того, $\mathbf{F}_n(z) \in H_+^2$. Поэтому $\mathbf{F}_n(z)$ также представима интегральной формулой Коши, и таким образом, мы будем иметь

$$f(z) = \frac{B_n(z)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{B_n(t)} \cdot \frac{dt}{t-z}, \quad z \in G^{(+)}$$

для любого $n \geqslant 1$.

Заметив, что $|B_n(t)| = 1$ при $t \in (-\infty, +\infty)$ и применив неравенство Шварца, получим

$$|f(z)| \leqslant \frac{|B_n(z)|}{2\sqrt{\pi \operatorname{Im} z}} \|f\|, \quad z \in G^{(+)}, \tag{1.35}$$

так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{|t-z|^2} = \frac{\pi}{\operatorname{Im} z} \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \, dt = \|f\|^2.$$

Наконец, пользуясь оценкой (1.27) леммы 2, мы будем иметь

$$|B_n(z)| \leqslant \exp\left\{ -\rho(z) \sum_{j=1}^{n} \frac{\operatorname{Im} \lambda_j}{1+|\lambda_j|^2} \right\}. \tag{1.27''}$$

Отсюда, переходя к пределу в неравенстве (1.35) при $n \to +\infty$, в силу условия (1.29) теоремы мы получим $f(z) \equiv 0$, т. е. $f(x) = 0$ почти всюду на всей оси $(-\infty, +\infty)$.

Примечания к § 1

[1.1]. По поводу сформулированных теорем А, Б, В и Г из п. 1.1 см. [1] (введение и гл. II), а также [8] (гл. I и гл. VII, теорему 7.4').

[1.2]. Относительно функции Бляшке в полуплоскости см., напр., [15], гл. VIII, а также [16], гл. XI.

[1.3]. В случае, когда $\operatorname{Im} \lambda_j > 0$, но $s_j = 1$ $(1 \leqslant j < +\infty)$ система $\{\Phi_n(z)\}_1^\infty$ была получена в работе Ердели [17], однако они были записаны не в виде (1.23), а в виде их явных разложений на простые дроби

$$\Phi_n(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{c_{jn}}{z-\bar{\lambda}_j} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots), \tag{1}$$

где

$$c_{jn} = \sqrt{\operatorname{Im} \lambda_n} \prod_{k=1}^{n-1} (\bar{\lambda}_j - \lambda_k) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} (\bar{\lambda}_j - \bar{\lambda}_k)^{-1}. \tag{2}$$

Формулы (1)—(2) были получены косвенным путем, как результат преобразования Фурье ортонормальной системы $\{\gamma_n(x)\}_1^\infty$, полученной им же посредством эффективной ортогонализации системы функций $\{e^{-\bar{\lambda}_k x}\}_1^\infty$ на полуоси $(0, +\infty)$ методом Грамма-Шмидта.

[1.4]. Запись системы $\{\Phi_n(z)\}_1^\infty$ в форме, эквивалентной (1.23), которую, как уже отмечалось, непосредственно можно получить отображением круга $|w|<1$ на полуплоскость $G^{(+)}$, по-видимому, впервые была приведена в работе [18] для случая, когда $\operatorname{Re}\lambda_j=0$ и $s_j \geqslant 1$ $(1 \leqslant j < +\infty)$. Она также была получена, по существу тем же косвенным путем, как результат преобразования Лапласа-Фурье ортонормальной системы $\{\gamma_n(x)\}_1^\infty$, получаемой при ортогонализации на $(0, +\infty)$ более общей, чем у Ердели системы функций $\{e^{-\bar{\lambda}_k x} x^{s_k-1}\}_1^\infty$, методом Сасса, дополненным затем А. О. Гельфондом [19]. Подробнее об этих системах речь будет идти в § 2.

[1.5]. По поводу теоремы 1.

При $s_j=1$ $(1 \leqslant j < +\infty)$ утверждение теоремы 1 является переформулировкой для полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$ и класса H_+^2 давно известного результата Такенака [11], установленного им для системы $\{\varphi_n(w)\}_1^\infty$ Мальмквиста-Такенака для области круга $D=\{w;\ |w|<1\}$ и аналитических в D функций из класса H_2 Харди.

В том же случае $s_j=1$ и $\operatorname{Im}\lambda_j>0$ $(1 \leqslant j < +\infty)$ теорема 1 содержится в работе Ердели [17] и была установлена им применением преобразования Лапласа над полной в $L_2(0, +\infty)$ системой Мюнца-Сасса $\{e^{-i\bar{\lambda}_n x}\}_1^\infty$ и полученной из соответствующей ортогонализованной им же и полной в $L_2(0, +\infty)$ системы $\{\gamma_n(x)\}_1^\infty$ (подробнее об этой системе см. в примечаниях [2.1] и [2.2] к § 2).

В случае, когда $s_j \geqslant 1$, но $\operatorname{Im}\lambda_j=0$ $(1 \leqslant j < +\infty)$ теорема 1 в терминах системы, эквивалентной $\{\Phi_n(z)\}_1^\infty$ была доказана в работе [18] также применением преобразования Лапласа над полной в $L_2(0, +\infty)$ обобщенной там же ортогональной системой $\{\gamma_n(x)\}_1^\infty$ Ердели—Гельфонда (подробнее об этих более общих системах см. в примечаниях [2.3] и [2.4] к § 2).

В общем случае, когда $s_j \geqslant 1$ и $\operatorname{Im}\lambda_j>0$ $(1 \leqslant j < +\infty)$ приведенный нами прямой способ доказательства теоремы 1 существенно отличается от предыдущих и публикуется автором впервые.

§ 2. Ортогонализация и замкнутость обобщенной системы Мюнца и Сасса

2.1. (а) Пусть $\{\mu_j\}_1^\infty$ $(\operatorname{Re}\mu_j>0)$ — произвольная последовательность комплексных чисел из правой полуплоскости $D^{(+)}=\{z\colon \operatorname{Re} z>0\}$. Как и в § 1, для любого k $(1 \leqslant k < +\infty)$ через $s_k \geqslant 1$ обозначаем кратность появления числа μ_k на отрезке $\{\mu_j\}_1^k$ нашей последовательности.

С последовательностью чисел $\{\mu_j\}_1^\infty$ мы будем ассоциировать последовательность функций

$$\{e^{-\mu_j x} x^{s_j - 1}\}_1^\infty, \quad e^{-\mu_j x} x^{s_j - 1} \in L_2(0, +\infty) \tag{2.1}$$

и через $\{\gamma_n(x)\}_1^\infty$ будем обозначать ортогонализацию на $(0, +\infty)$ системы (2.1) по известному методу Грамма—Шмидта.

Итак, мы будем иметь

$$\int_0^{+\infty} \gamma_n(x) \overline{\gamma_m(x)}\, dx = \delta_{nm} \quad (n, m = 1, 2, \cdots),$$

при этом каждая функция $\gamma_n(x)$ является конечной линейной комбинацией первых n функций системы (2.1) и однозначно определяется с точностью до множителя вида $e^{i\alpha_n}$ ($\operatorname{Im} \alpha_n = 0$).

Эффективная ортогонализация систем вида (2.1) и представление функций системы $\{\gamma_n(x)\}_1^\infty$ в качестве интегралов Фурье осуществляется с помощью систем функций Мальмквиста—Такенака. Заметим сперва, что система функций

$$\psi_1(z) = \sqrt{\frac{\operatorname{Re}\mu_1}{\pi}} \frac{i}{z + i\mu_1}, \quad \psi_n(z) = \sqrt{\frac{\operatorname{Re}\mu_n}{\pi}} \frac{i}{z + i\mu_n} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{z - i\bar{\mu}_j}{z + i\mu_j}, \tag{2.2}$$

$$(n = 2, 3, \cdots),$$

является системой Мальмквиста—Такенака $\left\{\frac{i\,\Phi_n(z)}{\sqrt{\pi}}\right\}_1^\infty$, ассоциированной с последовательностью чисел $\{\lambda_j\}_1^\infty$, где $\lambda_j = i\bar{\mu}_j$ и т. о. $\operatorname{Im}\lambda_j = \operatorname{Re}\mu_j > 0$ $(1 \leq j < +\infty)$.

Теорема 2. *При надлежащем выборе множителя $e^{i\alpha_n}$ для функций системы $\{\gamma_n(x)\}_1^\infty$ справедливо интегральное представление*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(t)\, e^{-ixt}\, dt = \begin{cases} \gamma_n(x), & x \in (0, +\infty) \\ 0, & x \in (-\infty, 0). \end{cases} \tag{2.3}$$

Доказательство. Так как, очевидно, $\psi_n(z) \in H_+^2$, то по теореме Винера—Пэли (B)

$$\mathbf{F}[\psi_n] = 0, \quad x \in (-\infty, 0) \tag{2.4}$$

и в силу равенства Парсеваля (1.14)— следствия теоремы B, мы получим

$$\int_0^\infty \gamma_n(x) \overline{\gamma_m(x)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(t) \overline{\psi_m(t)}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n(t) \overline{\Phi_m(t)}\, dt = \delta_{nm} \quad (n; m = 1, 2, 3, \cdots). \tag{2.5}$$

Для завершения доказательства теоремы нам, таким образом, остается убедиться в том, что при любом $n \geqslant 1$ функция $\gamma_n(x)$ является линейной комбинацией совокупности функций $\{e^{-\mu_j x} x^{s_j-1}\}_1^n$.

В самом деле, в силу формулы (1.26') леммы 1 для любого $n \geqslant 1$ будем иметь представление вида

$$\psi_n(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{c_{jn}}{(z+i\mu_j)^{s_j}}\quad c_{nn} \neq 0.$$

где $\{c_{jn}\}_1^n$ — вполне определенные числа. Следовательно, из (2.3) имеем при $x \in (0, +\infty)$

$$\gamma_n(x) = i\frac{\sqrt{\operatorname{Re}\mu_n}}{\pi\sqrt{2}} \sum_{j=1}^{n} c_{jn} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ixt}}{(t+i\mu_j)^{s_j}}\, dt. \tag{2.6}$$

Однако, по теореме вычетов при $x \in (0, +\infty)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ixt}}{(t+i\mu_j)^{s_j}} dt = e^{-i\frac{\pi}{2}(s_j+1)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ixt}}{(it-\mu_j)^{s_j}}\, d(it) =$$

$$= \frac{2\pi e^{-i\frac{\pi}{2}s_j}}{(s_j-1)!} \left\{ \frac{d^{s_j-1}}{dw^{s_j-1}} [e^{-xw}] \right\}_{w=\mu_j} = \frac{2\pi e^{-i\frac{\pi}{2}s_j}}{(s_j-1)!}\, e^{-\mu_j x} x^{s_j-1}, \ (j \geqslant 1).$$

Отсюда и из (2.6) следует требуемое утверждение.

(б) Приведем теперь критерий замкнутости системы $\{\gamma_n(x)\}_1^\infty$.

Теорема 3. *Для замкнутости в $L_2(0, +\infty)$ ортонормальной системы $\{\gamma_j(x)\}_1^\infty$, или, что то же самое, системы функций $\{e^{-\mu_j x} x^{s_j-1}\}_1^\infty$, выполнение условия*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}\mu_j}{1+|\mu_j|^2} = +\infty \tag{2.7}$$

необходимо и достаточно.

Доказательство. Поскольку по теореме 2

$$\gamma_n(x) = \mathbf{F}[\psi_n] = \mathbf{F}\left[\frac{i\Phi_n}{\sqrt{\pi}}\right] \ (n=1, 2, \cdots),$$

то в силу теоремы Г (3°) система $\{\gamma_j(x)\}_1^\infty$ в классе $L_2(0, +\infty)$ и система $\{\Phi_n(x)\}_1^\infty$ в классе $L_2^*(-\infty, +\infty)$ граничных значений функций из H^2_- обладают одинаковыми свойствами замкнутости. Поэтому утверждение теоремы непосредственно следует из теоремы 1.

Считаем не лишним привести здесь и второе, близкое по методу но независимое от теоремы 1, доказательство этой теоремы.

Необходимость. Как и в теореме 1, если

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \mu_j}{1+|\mu_j|^2} < +\infty,$$

то рассмотрим функцию

$$f_0(z) = \frac{B(z)}{i+z} \in H_+^2,$$

где $B(z)$ — функция Бляшке (1.20), ассоциированная с последовательностью комплексных чисел $\{\lambda_j\}_1^\infty$, где $\lambda_j = i\bar{\mu}_j$.

Далее, как уже отмечалось в ходе доказательства теоремы 1, функция $f_0(z) \not\equiv 0$, но

$$f_0^{(s_k-1)}(i\bar{\mu}_k) = 0 \quad (k=1, 2, \cdots). \tag{2.8}$$

Но согласно теореме В(2°) функция $f_0(z)$ допускает представление

$$f_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{izt} \varphi_0(t)\, dt, \quad z \in G^{(+)}, \tag{2.9}$$

где $\varphi_0(t) \in L_2(0, +\infty)$ и, очевидно, почти всюду на $(0, +\infty)$ отлична от нуля.

Наконец, из (2.8) и (2.9) следуют равенства

$$\int_0^{+\infty} \varphi_0(t) \overline{\{e^{-\mu_k t} t^{s_k-1}\}}\, dt = 0 \quad (k=1, 2, \cdots),$$

т. е. незамкнутость системы $\{e^{-\mu_k x} x^{s_k-1}\}_1^\infty$.

Достаточность. Пусть для некоторой функции $f_0(x) \in L_2(0, +\infty)$

$$\int_0^{+\infty} f_0(t) \overline{\{e^{-\mu_k t} t^{s_k-1}\}}\, dt = 0 \quad (k=1, 2, \cdots). \tag{2.10}$$

Согласно теореме В (2°) функция

$$F_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} f_0(t)\, e^{izt}\, dt, \quad z \in G^{(+)} \tag{2.11}$$

принадлежит классу H_+^2, причем в силу условий (2.10)

$$F_0^{(s_k-1)}(i\bar{\mu}_k) = 0 \quad (k=1, 2, \cdots).$$

Аналогично доказательству достаточной части теоремы 1 можно утверждать, что для любого n $(1 \leqslant n < +\infty)$ функция

$$F_0(z)\, B_n^{-1}(z), \quad B_n(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{z - i\bar{\mu}_j}{z + i\mu_j}$$

аналитична в полуплоскости $G^{(+)}$ и также принадлежит классу H_+^2. Поэтому вновь по теореме В (2°) справедливо представление вида

$$F_0(z)\,B_n^{-1}(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty} e^{izt} f_n(t)\,dt,\quad z\in G^{(+)},\tag{2.12}$$

где $f_n(t)\in L_2(0,+\infty)$, причем, так как при $\operatorname{Im} z=0$ $|B_n(z)|=1$, то по равенству Парсеваля

$$\int\limits_0^{\infty}|f_n(t)|^2\,dt=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|F_0(x)|^2\,dx=M_0<+\infty\quad(n=1,\ 2,\cdots).\tag{2.13}$$

Но из (2.11) по неравенству Шварца и по (2.12) получим оценку

$$|F_0(z)|\leqslant\left\{\frac{M_0}{4\pi\operatorname{Im} z}\right\}^{1/2}|B_n(z)|\quad(n=1,2,\cdots).\tag{2.14}$$

Наконец, пользуясь оценкой (1.27″), вытекающей из леммы 2,

$$|B_n(z)|\leqslant\exp\left\{-\rho(z)\sum_{j=1}^{n}\frac{\operatorname{Re}\mu_j}{1+|\mu_j|^2}\right\}\ (n=1,\ 2,\cdots)$$

и переходя к пределу в неравенстве (2.14) при $n\to+\infty$, в силу условия (2.7) нашей теоремы, мы получим, что $F_0(z)\equiv0$, $z\in G^{(+)}$. Но тогда из (2.11) по равенству Парсеваля

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|F_0(t)|^2\,dt=\int\limits_0^{+\infty}|f_0(t)|^2\,dt=0.$$

Следовательно, $f_0(x)=0$ почти всюду на полуоси $(0,+\infty)$, что в силу условий (2.10) и означает замкнутость нашей системы.

(в) Приведем переформулировку теоремы 3 для отрезка (0.1).

Теорема 3′. *Пусть* $\{\alpha_j\}_0^{\infty}\left(\operatorname{Re}\alpha_j>-\dfrac12\right)$ — *произвольная последовательность комплексных чисел, и для данного* k $(1\leqslant k<+\infty)$ $r_k\geqslant1$ — *кратность появления числа* α_k *на отрезке* $\{\alpha_j\}_0^k$.

Тогда для замкнутости в $L_2(0,1)$ *системы функций*

$$\{u^{\alpha_j}(\log u)^{r_j-1}\}_0^{\infty}\tag{2.1′}$$

или, что то же самое, обобщенной ортонормальной системы $\{E_n^{(\alpha)}(u)\}_0^{\infty}$ *Ердели – Гельфонда, необходимо и достаточно выполние условия*

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1+2\operatorname{Re}\alpha_j}{1+|\alpha_j|^2}=+\infty.\tag{2.15}$$

Доказательство. Линейное преобразование

$$g(x)=E[f(u)]=e^{-\frac{x}{2}}f(e^{-x})$$

---

* См. примечание [2.5] к теореме 2.

и его обращение

$$f(u) = E^{-1}[g(x)] = u^{-\frac{1}{2}}\, g(-\log u)$$

устанавливают взаимно-однозначные соответствия между функциями классов $L_2(0,1)$ и $L_2(0, +\infty)$ с сохранением норм

$$\int\limits_0^1 |f(u)|^2\, du = \int\limits_0^{+\infty} |g(x)|^2\, dx.$$

Легко видеть также, что для

$$g_k(x) = E[f_k(u)] \text{ и } f_k(u) = E^{-1}[g_k(x)] \quad (k = 1, 2)$$

будем иметь также

$$\int\limits_0^1 f_1(u)\, \overline{f_2(u)}\, du = \int\limits_0^{+\infty} g_1(x)\, \overline{g_2(x)}\, dx. \tag{2.16}$$

Далее, так как

$$u^{\alpha_j}(-\log u)^{r_j-1} = E^{-1}\left[e^{-\left(\alpha_j+\frac{1}{2}\right)x} x^{r_j-1}\right] \in L_2(0,1),$$

$$(j = 0, 1, 2, \cdots),$$

$$e^{-\left(\alpha_j+\frac{1}{2}\right)x} x^{r_j-1} = E\left[u^{\alpha_j}(-\log u)^{r_j-1}\right] \in L_2(0, +\infty),$$

то из общего равенства (2.16) легко следует (как и в теореме Г), что системы функций (2.1′) и $\{e^{-\left(\alpha_j+\frac{1}{2}\right)x} x^{r_j-1}\}_0^{\infty}$ могут быть замкнуты соответственно в $L_2(0,1)$ и $L_2(0, +\infty)$ только одновременно.

Поэтому, согласно теореме 3, система (2.1′) замкнута в $L_2(0,1)$ лишь в том случае, когда

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}\left(\alpha_j + \frac{1}{2}\right)}{1 + \left|\alpha_j + \frac{1}{2}\right|^2} = +\infty. \tag{2.15′}$$

Но нетрудно убедиться, что при условии $\operatorname{Re} \alpha_j > -\frac{1}{2}$ $(1 \leqslant j < +\infty)$ имеют место двусторонние оценки

$$\frac{1}{2}(1 + |\alpha_j|^2) \leqslant 1 + \left|\alpha_j + \frac{1}{2}\right|^2 \leqslant 2(1 + |\alpha_j|^2) \quad (1 \leqslant j < +\infty).$$

Поэтому условия (2.15) и (2.15′) эквивалентны, и теорема доказана.

(г) В теоремах 3 и 3′ в качестве весьма частного случая содержатся следующие хорошо известные утверждения:

1°. Система функций $\{e^{-\frac{x}{2}}x^n\}_0^\infty$, или, что то же самое, система функций Лаггера $\{e^{-\frac{x}{2}}L_n(x)\}_0^\infty$ замкнута в $L_2(0, +\infty)$.

2°. Система степеней $\{u^n\}_0^\infty$ замкнута в $L_2(0,1)$.

В самом деле, общая система $\{e^{-\mu_j x}x^{s_j-1}\}_1^\infty$ в случае, когда $\mu_j = \dfrac{1}{2}\ (1 \leqslant j < +\infty)$ и, тем самым, $s_j = j\ (1 \leqslant j < +\infty)$ сводится к рассматриваемой — $\{e^{-\frac{x}{2}}x^n\}_0^\infty$. Очевидно, что при этом условие (2.7) замкнутости теоремы 3 выполняемо.

Аналогично, при $\alpha_j = j\ (0 \leqslant j < +\infty)$ имеем $r_j = 1\ (0 \leqslant j < +\infty)$ и система $\{u^{\alpha_j}(\log u)^{r_j-1}\}_0^\infty$ переходит в систему степеней $\{u^n\}_0^\infty$ и условие (2.14) замкнутости теоремы 3' также выполнется.

Таким образом, замкнутость обеих систем $\{e^{-\frac{x}{2}}x^n\}_0^\infty$ и $\{u^n\}_0^\infty$ в $L_2(0, +\infty)$ и в $L_2(0,1)$, соответственно, следует из теорем 3 и 3'.

Заметим теперь, что в случае, когда $\mu_j = \dfrac{1}{2}$, $s_j = 1\ (1 \leqslant j < +\infty)$, из формулы (2.2) и из представления (2.3) ортонормальной на $(0, +\infty)$, системы функций $\{\gamma_n(x)\}_1^\infty$ теоремы 2 следует:

$$\gamma_{n+1}(x) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}\,\frac{\left(t-\frac{i}{2}\right)^n}{\left(t+\frac{i}{2}\right)^{n+1}}\,dt =$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}\,\frac{\left(t+\frac{i}{2}\right)^n}{\left(t-\frac{i}{2}\right)^{n+1}}\,dt \quad (0 < x < +\infty,\ 0 \leqslant n < +\infty). \qquad (2.17)$$

Убедимся теперь, что для этих функций справедливы формулы

$$\gamma_{n+1}(x) = e^{-\frac{x}{2}}L_n(x)\ (n = 0, 1, 2, \cdots), \qquad (2.18)$$

где $\{L_n(x)\}_0^\infty$ — ортонормальные на $(0, +\infty)$ с весом e^{-x} полиномы Лаггера

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\,\frac{d^n}{dx^n}\left[x^n e^{-x}\right] = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\,\frac{n!}{(n-k)!\,(k!)^2}\,x^k. \qquad (2.19)$$

Действительно, как хорошо известно, справедлива формула (см., например, [6], стр. 383)

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} L_n(x)\,dx = \frac{(s-1)^n}{s^{n+1}},\ \mathrm{Re}\, s > 0, \tag{2.20}$$

которую нетрудно получить лишь на основе определения (2.19) полинома $L_n(x)$.

Положив здесь $s = \frac{1}{2} + it$ $(-\infty < t < +\infty)$, мы получим

$$\int_0^{\infty} e^{-ixt}\left\{ e^{-\frac{x}{2}} L_n(x) \right\} dx = \frac{\left(t+\frac{i}{2}\right)^n}{i\left(t-\frac{i}{2}\right)^{n+1}},\ -\infty < t < +\infty,$$

откуда по формуле обращения Фурье мы приходим к требуемым соотношениям (2.18).

Отметим, наконец, что заодно по теореме 2 из (2.18) следуют формулы ортонормальности системы функций Лаггера

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x)\, L_m(x)\,dx = \delta_{nm}\ (n, m = 0, 1, 2, \cdots).$$

Примечания к § 2

По поводу теоремы 2.

[2.1]. В случае, когда все числа последовательности $\{\mu_j\}_1^{\infty}$ отличны друг от друга, т. е. когда $s_j = 1$ $(1 \leqslant j < +\infty)$, систему функций $\{\gamma_n(x)\}_1^{\infty}$ впервые в явной форме построил Ердели [17]. В этом случае функции этой системы, очевидно, представимы в виде

$$\gamma_n(x) = \sum_{j=1}^{n} c_{jn}\, e^{-\mu_j x}\ (n=1, 2, \cdots). \tag{1}$$

Путем прямого вычисления соответствующих определителей Грамма им были получены явные значения для коэффициентов $\{c_{jn}\}_1^n$ а именно

$$c_{jn} = \sqrt{2\mathrm{Re}\,\mu_n}\prod_{k=1}^{n-1}(\mu_j + \bar{\mu}_k)\prod_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{n}(\mu_j - \mu_k)^{-1}\ (j = 1, 2, \cdots, n). \tag{2}$$

[2.2]. Несколько позже, в другом частном случае, когда $\mathrm{Im}\,\mu_j = 0$, $s_j = 1$ $(1 \leqslant j < +\infty)$ эквивалентная с $\{\gamma_n(x)\}_1^{\infty}$ система была построена А. О. Гельфондом [19]. Им была рассмотрена последовательность функций Мюнца $\{u^{\alpha_j}\}_0^{\infty}$ на отрезке [0,1], ассоциированная с последовательностью чисел

$$\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_j < \alpha_{j+1} < \cdots \left(\alpha_j > -\frac{1+\alpha}{2},\ \alpha > -1\right).$$

для которой *кратность* r_k *появления числа* α_k *на отрезке* $\{\alpha_j\}_0^{k}$ равна единице. Затем путем явного вычисления решения экстремальной задачи Сасса [4], лежащего в основе доказательства известной теоремы Мюнца—Сасса, им по существу было установлено, что квазиполиномы

$$P_n^{(\alpha)}(u) = \sqrt{2\alpha_n + \alpha + 1}\sum_{j=0}^{n} \frac{Q_n(\alpha_j)}{R_n'(\alpha_j)}\, \frac{u^{\alpha_j}}{\alpha_n + \alpha_j + \alpha + 1} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots), \tag{3}$$

где

$$R_n(u) = \prod_{k=0}^{n}(u - \alpha_k),\ Q_n(u) = \prod_{k=0}^{n}(u + \alpha_k + \alpha + 1) \tag{4}$$

составляют ортонормальную систему на отрезке $[0,1]$ с весом u^{α}, т. е.

$$\int_0^1 u^{\alpha} P_n^{(\alpha)}(u)\, P_m^{(\alpha)}(u)\, du = \delta_{nm} \quad (n;\ m=0, 1, 2, \cdots). \tag{5}$$

[2.3]. Заметим, что формула (3) может быть записана также в виде контурного интеграла

$$P_n^{(\alpha)}(u) = \frac{\sqrt{2\alpha_n + \alpha + 1}}{2\pi i}\int_{C_n} \frac{Q_n(\zeta)}{R_n(\zeta)}\, \frac{u^{\zeta}}{\zeta + \alpha_n + \alpha + 1}\, d\zeta, \tag{3'}$$

где C_n — замкнутый контур, охватывающий все точки $\{\alpha_j\}_0^n$.

Простым предельным переходом в (3′) можно легко убедиться в том, что если

$$-\frac{1+\alpha}{2} < \alpha_0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_j \leqslant \cdots,$$

т. е. если, вообще говоря, $r_k \geqslant 1$ $(k > 0)$, то интеграл (3′) определяет некоторый квазиполином $P_n^{(\alpha)}(u)$ из системы функций $\{u^{\alpha_j}(\log u)^{r_j - 1}\}_0^n$, причем очевидно, что *свойство ортонормальности* (5) *системы* $\{P_n^{(\alpha)}(u)\}_0^{\infty}$ *при этом сохраняет силу. Отметим, что в менее компактной записи системы функций вида* $\{u^{\alpha_j}(\log u)^{r_j-1}\}_0^{\infty}$ были рассмотрены в работе [20] в связи с обобщением известных полиномов С. Н. Бернштейна и Хаусдорфа [21]. Отметим также, что интегральная запись (3′) системы $\{P_n^{(\alpha)}(u)\}_0^{\infty}$ и возможность снятия ограничения $r_j = 1$ $(j > 0)$ впервые была указана в работе [18]. Вместе с тем отметим, что все приводимые в § 1 указанной работы вычисления, имеющие целью заново доказывать формулы ортонормальности (5) системы $\{P_n^{(\alpha)}(u)\}_0^{\infty}$ на основе их интегральной записи (3′), как в случае, рассмотренном А. О. Гельфондом $(r_j = 1,\ 1 \leqslant j < +\infty)$, так и в общем случае, когда $r_j \geqslant 1$ $(1 \leqslant j < +\infty)$, ввиду сказанного выше, разумеется, излишни.

[2.4]. Приводимое в теореме 2 представление системы $\{\gamma_n(x)\}_1^\infty$ в общем случае, когда $\operatorname{Re}\mu_j > 0$ и $s_j \geq 1$ $(1 \leq j < +\infty)$ впервые было предложено в заметке автора [2]. Там же впервые были введены целочисленные параметры $\{s_j\}_1^\infty$, характеризующие кратности чисел данной последовательности $\{\mu_j\}_1^\infty$ и позволяющие ввести единую нумерацию и компактную запись для обеих систем

$$\{e^{-\mu_j x} x^{s_j - 1}\}_1^\infty \text{ и } \{\gamma_n(x)\}_1^\infty.$$

[2.5]. Наконец, отметим, что в последующей работе [22] в случае комплексных, но *отличных друг от друга показателей*

$$\{\alpha_j\}_0^\infty \left(\operatorname{Re}\alpha_j > -\frac{1+\alpha}{2}\right),$$

способом Сасса—Гельфонда были получены аналогичные (3)—(4) и (3′)—(4) формулы

$$E_n^{(\alpha)}(u) = \sqrt{1+\alpha+2\operatorname{Re}\alpha_n} \sum_{j=0}^{n} \frac{\overline{Q}_n(\alpha_j)}{\overline{R}_n'(\alpha_j)} \frac{u^{\alpha_j}}{\alpha_n + \overline{\alpha}_j + \alpha + 1}, \tag{6}$$

$$E_n^{(\alpha)}(u) = \frac{\sqrt{1+\alpha+2\operatorname{Re}\alpha_n}}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\overline{Q}_n(\zeta)}{\overline{R}_n(\zeta)} \frac{u^{\zeta}}{\zeta + \overline{\alpha}_n + \alpha + 1}\, d\zeta \tag{6′}$$

для квазиполиномов, ортонормальных на [0,1] в смысле

$$\int_0^1 u^{\alpha} E_n^{(\alpha)}(u)\, \overline{E_m^{(\alpha)}(u)}\, du = \delta_{nm} \quad (n,\ m = 0,\ 1,\ 2, \cdots). \tag{7}$$

По соображению, приведенному в [2,3] очевидно, что в записи (6′) свойство (7) ортонормальности системы $\{E_n^{(\alpha)}(u)\}_0^\infty$ сохраняет силу для любой последовательности показателей $\{\alpha_j\}_0^\infty \left(\operatorname{Re}\alpha_j > -\frac{1+\alpha}{2}\right)$, т. е. если, вообще говоря, $r_j \geq 1$ $(0 \leq j < +\infty)$.

В заключение укажем еще, что переход от системы $\{E_n^{(\alpha)}(u)\}_0^\infty$ к обобщенной системе Ердели—Гельфонда $\{\gamma_n(x)\}_1^\infty$ в общем случае, когда $\operatorname{Re}\mu_j > 0$ и $s_j \geq 1$ $(1 \leq j < +\infty)$, легко осуществить простой заменой

$$\mu_j = \frac{1+\alpha}{2} + \alpha_{j-1}\ (j \geq 1) \text{ и } \gamma_{n+1}(x) = e^{-\frac{1+\alpha}{2}x} E_n^{(\alpha)}(x)\ (0 \leq n < +\infty). \tag{8}$$

По поводу теорем 3 и 3′.

[2.6]. Необходимое и достаточное условие

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_j} = +\infty$$

аппроксимируемости непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций квазиполиномами вида

$$\sum_{j=0}^{n} c_j u^{\alpha_j} (\log u)^{r_j - 1}$$

в предположении, что порождающая их последовательность чисел $\{\alpha_j\}_0^\infty$ удовлетворяет условию

$$0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \cdots$$

и, таким образом, $r_j = 1$ $(1 \leqslant j < +\infty)$, впервые было получено Мюнцем [23].

Затем в своей работе Сасс [4] дал другое доказательство теоремы Мюнца, обобщив ее на случай комплексных, но вновь отличных друг от друга показателей $\{\alpha_j\}_0^\infty$ $\left(\operatorname{Re} \alpha_j > -\frac{1}{2}\right)$, т. е. когда $r_j = 1$ $(0 \leqslant j < +\infty)$. При этом теоремы Сасса об аппроксимации линейными агрегатами от множества функций $\{u^{\alpha_j}\}_0^\infty$ относились как к классу $C[0,1]$ непрерывных на $[0,1]$ функций (при условии $\alpha_0 = 0$, $\operatorname{Re} \alpha_j > 0$, $1 \leqslant j < +\infty$), так и к классу $L_2(0,1)$ (при условии $\operatorname{Re} \alpha_j > -\frac{1}{2}$, $0 \leqslant j < +\infty$). Отметим еще, что значительно позже Сасс вновь вернулся к этому кругу вопросов в своей работе [24], распространив свой метод, основанный на решении экстремальной задачи, на другие семейства аппроксимирующих линейных агрегатов от рациональных функций.

[2.7]. Винер и Пэли предложили другой метод доказательства теорем Мюнца—Сасса и ряда других теорем того же рода [1]. Их метод был основан на сведении задачи замкнутости к теореме единственности Бляшке для аналитических в круге функций из класса H_2 Харди, а также на теореме Г. На этом же методе основаны приведенные выше доказательства теорем замкнутости. Однако, достаточность утверждения теоремы устанавливается нами существенно другим способом, близким доказательству достаточной части теоремы 1. Отметим, что у них также как и у Мюнца и Сасса, ставилось то, же ограничение на последовательность показателей $\{\alpha_j\}_0^\infty$, что все они отличны друг от друга, т. е. что $r_j = 1$ $(0 \leqslant j < +\infty)$. Но для развитого ими метода это ограничение было совершенно лишним, что видно хотя бы из приведенного нами второго доказательства теоремы 3.

В случае, когда, вообще говоря, $r_j \geqslant 1$, но $\operatorname{Im} \alpha_j = 0$ $(0 \leqslant j < +\infty)$, как в классе $C[0,1]$, так и в классе $L_2(0,1)$ теорема Мюнца—Сасса была обобщена в работах [20] и [18] другими способами.

[2.8]. Отметим, что метод Сасса легко применить также и в общем случае комплексных показателей $\{\alpha_j\}_0^\infty$, когда, вообще говоря, $r_j \geqslant 1$ $(0 \leqslant j < +\infty)$. В самом деле, прежде всего очевидно, что для данного n $(0 \leqslant n < +\infty)$ среди всех квазиполиномов вида

$$\Omega_n(u) = \sum_{j=0}^{n} c_j\, u^{\alpha_j} (\log u)^{r_j - 1}, \left(\operatorname{Re} \alpha_j > -\frac{1}{2}\right) \tag{9}$$

минимум $M_n^{(k)}$ обобщенных функционалов Сасса

$$J_n^{(k)} = \int_0^1 |u^k - \Omega_n(u)|^2\, du \quad (0 \leqslant k < +\infty) \tag{10}$$

реализует квазиполином

$$\Omega_n^*(u) = \sum_{j=0}^{n} a_j^{(k)} E_j^{(0)}(u), \quad a_j^{(k)} = \int_0^1 u^k\, \overline{E_j^{(0)}(u)}\, du \quad (0 \leqslant j \leqslant n), \tag{11}$$

т. е. n-ый отрезок ряда Фурье функции u^k по системе $\{E_n^{(0)}(u)\}_0^\infty$.

Итак

$$M_n^{(k)} = \int_0^1 |u^k - \Omega_n^*(u)|^2\, du, \tag{12}$$

причем из формул (3), а также из представления (6') для системы функций $\{E_n^{(0)}(u)\}_0^\infty$ очевидно, что числа $M_n^{(k)} \equiv M_n^{(k)}\{\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ *непрерывно зависят от показателей* $\{\alpha_j\}_0^n$.

Однако, в случае, когда показатели $\{\alpha_j\}_0^\infty$ отличны друг от друга, т. е. когда $r_j = 1$ $(0 \leqslant j < +\infty)$, как впервые доказал Сасс [4]

$$M_n^{(k)} = \frac{1}{1+2k} \prod_{j=0}^{n} \left| \frac{k - \alpha_j}{k + \overline{\alpha}_j + 1} \right|^2. \tag{13}$$

Отсюда ввиду отмеченной непрерывной зависимости $M_n^{(k)}$ от параметров $\{\alpha_j\}_0^n$, легко заключаем, что формула (13) сохраняет силу и в общем случае, когда для показателей $\{\alpha_j\}_0^\infty$, вообще говоря, $r_j \geqslant 1$ $(0 \leqslant j < +\infty)$.

Но из формулы (13), как у Сасса, во-первых, следует, что для справедливости предельных соотношений

$$\lim_{n \to +\infty} M_n^{(k)} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

выполнение условия (2.15) теоремы 3' необходимо и достаточно. И, во-вторых, в силу теоремы Вейерштрасса о замкнутости в $L_2(0,1)$ системы целых степеней $\{u^k\}_0^\infty$ вновь приходим к утверждению этой теоремы.

[2.9]. В заключении своей статьи [17] Ердели, не входя в подробности, отмечает: „Наиболее интересным является случай равностоящих μ. В этом случае $\gamma_n(x)$ может быть выражено через полиномы Якоби".

Кроме того, хотя в его построении системы $\{\gamma_n(x)\}_1^n$ предполагалось, что все числа μ_k отличны друг от друга (см. примечание к теореме 2), далее он пишет: „··· в предельном случае, когда все μ_k равны, $\gamma_n(x)$ сводится к полиномам Лаггера".

Оба эти утверждения были детально рассмотрены в работе [18] с помощью интегрального представления (3′), приведенного в примечании [2.3] к теореме 2.

§ 3. Ортогонализация и замкнутость обобщенной системы Винера-Пэли

3.1. (а). Пусть $\{\sigma_j\}_0^\infty$ $\left(|\mathrm{Im}\,\sigma_j| < \dfrac{\pi}{2}\right)$ — произвольная последовательность комплексных чисел и для данного k $(0 \leqslant k < +\infty)$ обозначим через $s_k + 1$ кратность появления числа σ_k на отрезке $\{\sigma_j\}_0^k$ нашей последовательности.

Введем в рассмотрение последовательность полиномов $x_0(t) \equiv 1$,

$$x_j(t) = \left(\frac{1}{2} + it\right)\left(\frac{3}{2} + it\right)\cdots\left(\frac{2j-1}{2} + it\right) \quad (1 \leqslant j < +\infty) \tag{3.1}$$

и с нашей последовательностью чисел $\{\sigma_j\}_0^\infty$ будем ассоциировать следующую последовательность квазиполиномов:

$$\{x_{p_j-1}(t)\,e^{-i\sigma_j t}\}_0^\infty. \tag{3.2}$$

Заметим, что в виду условия $|\mathrm{Im}\,\sigma_j| < \dfrac{\pi}{2}$ $(0 \leqslant j < +\infty)$, очевидно, будем иметь

$$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}\,\pi t}}\, x_{p_j-1}(t)\,e^{-i\sigma_j t} \in L_2(-\infty, +\infty) \quad (0 \leqslant j < +\infty). \tag{3.3}$$

Обозначим далее через $\{\rho_j(t)\}_0^\infty$ ортогонализацию на всей оси $(-\infty, +\infty)$ с весом

$$w(t) = \pi^{-1}\left|\Gamma\left(\frac{1}{2} + it\right)\right|^2 = \frac{1}{\mathrm{ch}\,\pi t} \tag{3.4}$$

последовательности функций (3.2).

Итак, по определению системы функций $\{\rho_j(t)\}_0^\infty$ мы имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(t)\,\rho_n(t)\,\overline{\rho_m(t)}\,dt = \delta_{nm} \quad (n;\ m = 0, 1, 2, \cdots), \tag{3.5}$$

причем наши функции $\rho_n(t)$ однозначно определятся с точностью до множителей вида $e^{i\alpha_n}$ $(\mathrm{Im}\,\alpha_n = 0)$.

(б) Эффективное построение и интегральное представление системы $\{\rho_n(t)\}_0^\infty$ может быть получено прямым путем с помощью системы функций $\{\gamma_n(x)\}_1^\infty$ и ее интегрального представления, установленного в § 2.

С этой целью обозначим через $\{\omega_n(x)\}_1^\infty$ указанную систему в том случае, когда она ассоциирована с последовательностью чисел $\{\mu_j\}_1^\infty$, положив

$$\mu_j = \exp\{\alpha_{j-1}\} \quad (1 \leqslant j < +\infty)$$

и заметив, что ввиду условия $|\operatorname{Im} \alpha_j| < \frac{\pi}{2}$, мы будем иметь $\operatorname{Re} \mu_j > 0 \; (1 \leqslant j < +\infty)$.

Согласно теореме 2 функции системы $\{\omega_n(x)\}_1^\infty$, ассоциированные с последовательностью чисел $\{\exp \alpha_{j-1}\}_1^\infty$, имеют интегральное представление

$$\omega_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{\operatorname{Re} e^{\alpha_n}}{\pi}} \frac{i}{u + ie^{\alpha_n}} \prod_{j=0}^{n-1} \frac{u - ie^{\overline{\alpha_j}}}{u + ie^{\alpha_j}} e^{-ixu}\, du \tag{3.6}$$

$$(0 \leqslant n < +\infty).$$

Докажем теорему.

Теорема 4. *Функции системы $\{\rho_n(t)\}_0^\infty$ допускают интегральное представление*

$$\rho_n(t) = \left\{ \sqrt{2}\, \Gamma\left(\frac{1}{2} + it\right)\right\}^{-1} \int_0^{+\infty} \omega_{n+1}(x)\, x^{-\frac{1}{2}+it}\, dx \; (-\infty < t < +\infty), \tag{3.7}$$

а также представление

$$\rho_n(t) = \frac{\sqrt{\operatorname{Re} e^{\alpha_n}}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i}{u + ie^{\alpha_n}} \prod_{j=0}^{n-1} \frac{u - ie^{\overline{\alpha_j}}}{u + ie^{\alpha_j}} \left(e^{i\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} u} |u|\right)^{-\frac{1}{2}-it} du \tag{3.8}$$

$$(0 \leqslant n < +\infty).$$

где при $n = 0$ следует положить $\prod_{j=1}^{n-1} = 1$.

Доказательство. Положим

$$\rho_n^*(t) = M[\omega_{n+1}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \omega_{n+1}(x)\, x^{-\frac{1}{2}+it}\, dx \; (0 \leqslant n < +\infty) \tag{3.9}$$

и заметим, что в рассматриваемом случае $\mu_j = \exp\{\alpha_{j-1}\}$ $(1 \leqslant j < +\infty)$ мы имеем $\omega_n(x) = \gamma_{n+1}(x)$. Поэтому, согласно теореме Б (1° и 2°), а также в силу условий ортонормальности (2.1) нашей системы $\{\omega_n(x)\}_1^\infty \equiv \{\gamma_n(x)\}_1^\infty$ мы будем иметь:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n^*(t)\, \overline{\rho_m^*(t)}\, dt = \int_0^\infty \omega_{n+1}(x)\, \overline{\omega_{m+1}(x)}\, dx = \delta_{n,m} \tag{3.10}$$

$$(n;\; m = 0, 1, 2, \cdots),$$

т. е. система функций $\{\rho_n^*(t)\}_0^\infty$ ортонормальна на всей оси $(-\infty, +\infty)$.

Отметим теперь, что в рассматриваемом нами случае, поскольку $\mu_j = \exp\{\sigma_{j-1}\}$ $(1 \leqslant j < +\infty)$, очевидно, что кратность $s_k \geqslant 1$ появления числа μ_k на отрезке $\{\mu_j\}_1^k$, равна кратности p_{k-1} появления числа σ_{k-1} на отрезке $\{\sigma_j\}_0^{k-1}$, т. е. мы будем иметь $s_k = p_{k-1}$ $(1 \leqslant k < +\infty)$.

Отметим также, что как было установлено нами в 2.1 (a) при любом n $(1 \leqslant n < +\infty)$ функция $\gamma_n(x)$ является линейной комбинацией от совокупности функций $\{e^{-\mu_j x} x^{s_j-1}\}_1^n$.

Из сказанного выше следует, очевидно, что в нашем случае мы будем иметь

$$\omega_{n+1}(x) = \sum_{j=1}^{n+1} a_{n+1,\,j}\, e^{-\mu_j x} x^{s_j-1} = \sum_{j=0}^{n} b_{j,\,n} \exp\{-e^{\sigma_j} x\}\, x^{p_j-1}, \qquad (3.11)$$

$$(0 \leqslant n < +\infty),$$

где $b_{j,\,n} = a_{j+1,\,n+1}$ $(0 \leqslant j \leqslant n)$ — вполне определенные постоянные.

Заметим теперь, что поскольку $|\mathrm{Im}\,\sigma_j| < \frac{\pi}{2}$, т. е. $\mathrm{Re}\exp\{\sigma_j\} > 0$

то

$$\int_0^\infty \exp\{-e^{\sigma_j} x\}\, x^{p_j-3/2+it}\, dx = \Gamma\left(p_j - \frac{1}{2} + it\right) \times$$

$$\times \exp\left\{-\left(p_j - \frac{1}{2} + it\right)\sigma_j\right\}.$$

Поэтому из (3.9) и (3.11), а также в силу определения (3.1) полинома $\varkappa_j(t)$, вытекает, что функция $\rho_n^*(t)$ представима в виде суммы

$$\rho_n^*(t) = \sum_{j=0}^{n} a_{j,\,n+1}\, \Gamma\left(p_j - \frac{1}{2} + it\right) \exp\left\{-\left(p_j - \frac{1}{2} + it\right)\sigma_j\right\} =$$

$$= \Gamma\left(\frac{1}{2} + it\right) \sum_{j=0}^{n} b_{j,\,n}\, \varkappa_{p_j-1}(t) \exp\{-i\sigma_j t\},$$

где

$$b_{j,\,n} = a_{j,\,n+1} \exp\left\{-\left(p_j - \frac{1}{2}\right) e^{\sigma_j}\right\} \quad (0 \leqslant j \leqslant n).$$

Таким образом, функция $\rho_n^*(t)$ является линейной комбинацией от совокупности функций $\{\varkappa_{p_j-1}(t)\, e^{-i\sigma_j t}\}_0^n$ при любом n $(0 \leqslant n < +\infty)$.

Следовательно, обозначив

$$\rho_n(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + it\right)}\, \rho_n^*(t) = \sqrt{\pi} \sum_{j=0}^{n} b_{j,\,n}\, \varkappa_{p_j-1}\, e^{-i\sigma_j t} \qquad (3.12)$$

$$(0 \leqslant n < +\infty),$$

ввиду ортонормальности (3.10) системы $\{\rho_n^*(t)\}_0^\infty$ мы заключаем, что система квазиполиномов (3.12) действительно ортонормальна на всей оси $(-\infty, +\infty)$ с весом $\pi^{-1}\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2$. В силу (3.9) и (3.12) приходим к представлению (3.7) теоремы.

Перейдем теперь к установлению второго интегрального представления (3.8) теоремы. С этой целью для данного n $(0\leqslant n<+\infty)$ выберем числа $0<\varepsilon<R<+\infty$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ таким образом, чтобы точки нижней полуплоскости $\{-ie^{\vartheta_j}\}_0^n$ лежали бы внутри замкнутого контура $L_\alpha(\varepsilon;\ R)$, образованного отрезками

$$L_\alpha^{(1)}(\varepsilon;\ R)=\{\arg w=-\alpha;\ \varepsilon\leqslant|w|\leqslant R\};$$

$$L_\alpha^{(2)}(\varepsilon;\ R)=\{\arg w=-(\pi-\alpha);\ \varepsilon\leqslant|w|\leqslant R\}.$$

и соединяющими их концы дугами окружностей

$$C_\alpha(\varepsilon)=\{-(\pi-\alpha)\leqslant\arg w\leqslant-\alpha;\ |w|=\varepsilon\},$$

$$C_\alpha(R)=\{-(\pi-\alpha)\leqslant\arg w\leqslant-\alpha;\ |w|=R\}.$$

Заметим далее, что функция

$$\Omega_n(w)=\frac{1}{w+ie^{\vartheta_n}}\prod_{j=0}^{n-1}\frac{w-ie^{\bar{\vartheta}_j}}{w+ie^{\vartheta_j}}\,e^{-ixw},\ x\in(0,+\infty)$$

аналитична везде в нижней полуплоскости $\operatorname{Im} w<0$, кроме отличных друг от друга точек $\{-ie^{\vartheta_j}\}_0^n$, где она имеет лишь полюсы и, очевидно, при $|w|\to\infty$

$$\Omega_n(w)=O\left(|w|^{-1}e^{-|\operatorname{Im} w|x}\right),\ x\in(0,+\infty).$$

Поэтому, пользуясь теоремой Коши, а также леммой Жордана, нетрудно убедиться в том, что представление (3.6) функции $\omega_{n+1}(x)$ может быть записано также в виде контурного интеграла

$$\omega_{n+1}(x)=\frac{\sqrt{\operatorname{Re} e^{\vartheta_n}}}{\pi\sqrt{2}}\int\limits_{L_\alpha(\varepsilon;R)}\frac{i}{w+ie^{\vartheta_n}}\prod_{j=0}^{n-1}\frac{w-ie^{\bar{\vartheta}_j}}{w+ie^{\vartheta_j}}e^{-ixw}\,dw,\ x\in(0,+\infty). \tag{3.6'}$$

Но поскольку

$$\min_{w\in L_\alpha(\varepsilon;R)}\operatorname{Re}\{iw\}=\min_{w\in L_\alpha(\varepsilon;R)}|\operatorname{Im} w|=\varepsilon\sin\alpha>0,$$

очевидно, что интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty}e^{-ixw}x^{-\frac{1}{2}-it}\,dx=\Gamma\left(\frac{1}{2}+it\right)(iw)^{-\frac{1}{2}-it},\ x\in(0,+\infty) \tag{3.13}$$

равномерно сходится относительно $w\in L_\alpha(\varepsilon;\ R)$. Поэтому из (3.7), (3.6') и (3.13) получим для $t\in(-\infty,+\infty)$

$$\rho_n(t) = \frac{\sqrt{\operatorname{Re} e^{\alpha_n}}}{2\pi} \int\limits_{L_2(\varepsilon;\,R)} \frac{i}{w + i e^{\alpha_n}} \prod_{j=0}^{n-1} \frac{w - i e^{\bar\alpha_j}}{w + i e^{\alpha_j}} (iw)^{-\frac{1}{2}-it} dw. \qquad (3.14)$$

Заметим, наконец, что подынтегральная функция в (3.14) при $|w| \to 0$ имеет порядок $O\left(|w|^{-\frac{1}{2}}\right)$ и при $|w| \to \infty$ — порядок $O\left(|w|^{-\frac{3}{2}}\right)$. Поэтому последовательными предельными переходами в (3.14), сначала при $\alpha \to +0$, затем при $\varepsilon \to +0$ и, наконец, когда $R \to +\infty$, мы приходим к требуемому представлению (3.8) теоремы.

3.2. (а) Отметим, что когда все числа $\{\alpha_j\}_0^\infty$ отличны друг от друга, и тем самым, очевидно, будем иметь

$$p_j = 1, \quad \varkappa_{p_j-1}(t) = \varkappa_0(t) \equiv 1 \quad (0 \leqslant j < +\infty),$$

наша система (3.2) перейдет в систему вида $\{e^{-i\alpha_j t}\}_0^\infty$.

В этом случае систему функций

$$\left\{e^{-\frac{\pi}{2}|t|} e^{-i\alpha_j t}\right\}_0^\infty \left(|\operatorname{Im} \alpha_j| < \frac{\pi}{2}\right)$$

впервые ввели Винер и Пэли, установившие критерий ее замкнутости в $L_2(-\infty, +\infty)$. Приводимая ниже теорема является существенным обобщением теоремы Винера—Пэли.

Теорема 5. *Для замкнутости в $L_2(-\infty, +\infty)$ ортонормальной системы $\left\{\frac{\rho_j(t)}{\sqrt{\operatorname{ch} \pi t}}\right\}_0^\infty$ или, что то же самое, системы функций $\left\{\frac{\varkappa_{p_j-1}(t)}{\sqrt{\operatorname{ch} \pi t}} e^{-i\alpha_j t}\right\}_0^\infty$ выполнение условия*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\cos(\operatorname{Im} \alpha_j)}{\operatorname{ch}(\operatorname{Re} \alpha_j)} = +\infty \qquad (3.15)$$

необходимо и достаточно.

Доказательство. Из формул (3.9) и (3.12) имеем

$$\rho_n^*(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + it\right)}{\sqrt{\pi}} \rho_n(t) = M[\omega_{n+1}] \quad (0 \leqslant n < +\infty),$$

где $\{\omega_j(x)\}_1^\infty \equiv \{\gamma_j(x)\}_1^\infty$ — ортонормальная на полуоси $[0, +\infty)$ система, ассоциированная с последовательностью комплексных чисел $\{e^{\alpha_{j-1}}\}_1^\infty \equiv \{\mu_j\}_1^\infty$, $(\operatorname{Re} \mu_j > 0)$. Поэтому, согласно теореме Γ (2°), ортонормальные системы $\{\rho_j^*(t)\}_0^\infty$ и $\{\omega_j(x)\}_1^\infty$ соответственно в пространствах $L_2(-\infty, +\infty)$ и $L_2(0, +\infty)$ могут быть замкнутыми только одновременно. Очевидно, что то же самое утверждение справедливо также для систем $\left\{\frac{\rho_j(t)}{\sqrt{\operatorname{ch} \pi t}}\right\}_0^\infty$ и $\{\omega_j(x)\}_1^\infty$, так как

$$\exp\left\{-i \arg \Gamma\left(\frac{1}{2} + it\right)\right\} \rho_j^*(t) = \frac{\rho_j(t)}{\sqrt{\operatorname{ch} \pi t}} \quad (0 \leqslant n < +\infty).$$

Наконец, заметив, что в рассматриваемом нами случае

$$\frac{\operatorname{Re}\mu_{j+1}}{1+|\mu_{j+1}|^2}=\frac{\operatorname{Re}e^{\sigma_j}}{1+e^{2\operatorname{Re}\sigma_j}}=\frac{1}{2}\frac{\cos(\operatorname{Im}\sigma_j)}{\operatorname{ch}(\operatorname{Re}\sigma_j)}\quad(0\leqslant j<+\infty)$$

на основании теоремы 3 мы завершим доказательство нашей теоремы.

(б) Особо остановимся теперь на одном частном, но важном случае введенной нами выше общей ортонормальной на $(-\infty, +\infty)$ системы $\left\{\frac{\varphi_j(t)}{\sqrt{\operatorname{ch}\pi t}}\right\}_0^\infty$, которую мы получим при специальном выборе порождающей ее последовательности параметров $\{\sigma_j\}_0^\infty$ $\left(|\operatorname{Im}\sigma_j|<\frac{\pi}{2}\right)$.

Введем в рассмотрение функцию

$$w(t;\varphi)=\frac{\sin\varphi}{\pi}\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2e^{-(\pi-2\varphi)t}=\sin\varphi\,\frac{e^{-(\pi-2\varphi)t}}{\operatorname{ch}\pi t},\tag{3.16}$$

полагая, что значение φ $(0<\varphi<\pi)$ фиксировано и $-\infty<t<+\infty$. Очевидно, что функция $w(t;\varphi)>0$ экспоненциально убывает при $|t|\to+\infty$, при этом

$$w(t;\varphi)\sim\begin{cases}2\sin\varphi\,e^{-2(\pi-\varphi)t}, & \text{при } t\to+\infty\\ 2\sin\varphi\,e^{2\varphi t}, & \text{при } t\to-\infty.\end{cases}\tag{3.17}$$

Обозначим далее через $\{P_k(t)\}_0^\infty$ систему полиномов, которую мы получим путем ортогонализации последовательности степеней $\{t^k\}_0^\infty$ на $(-\infty, +\infty)$ с весом $w(t;\varphi)$. При этом мы будем полагать, что для любого k $(0\leqslant k<+\infty)$ у полинома $P_k(t;\varphi)$ степени k коэффициент при старшем его члене t^k имеет положительный знак, что, как известно, обеспечивает единственность всей нашей системы $\{P_k(t)\}_0^\infty$.

Итак, по определению мы будем иметь

$$\int_{-\infty}^{\infty}w(t,\varphi)\,P_n(t;\varphi)\,\overline{P_m(t;\varphi)}\,dt=\delta_{nm}\quad(n;\ m=0,1,2,\cdots)\tag{3.18}$$

для любого $0<\varphi<\pi$.

Полиномы нашей системы допускают интегральное представление. А именно, справедлива следующая

Теорема 6. *Для ортонормальных в смысле* (3.18) *полиномов* $P_n(t;\varphi)$ *справедливо интегральное представление*

$$P_n(t;\varphi)=e^{in\varphi}\frac{[2^{-1}(1-i\operatorname{ctg}\varphi)]^{\frac{1}{2}+it}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+it\right)}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}(1-i\operatorname{ctg}\varphi)x}L_n(x)\,x^{-\frac{1}{2}+it}\,dx$$

$$(n=0,1,2,\cdots),\tag{3.19}$$

где $L_n(x)$ — *полином Лагерра* (2.19).

Доказательство. Пусть значение $\varphi (0 < \varphi < \pi)$ фиксировано и

$$\sigma_j = -\log 2 - i\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \quad (0 \leqslant j < +\infty). \qquad (3.20)$$

Тогда очевидно, что $|\mathrm{Im}\, \sigma_j| < \frac{\pi}{2} \quad (0 \leqslant j < +\infty)$,

$$p_j = j+1, \ \varkappa_{p_j - 1}(t) = \varkappa_j(t) \quad (0 \leqslant j < +\infty)$$

и, тем самым, в рассматриваемом случае из (3.12) получим

$$\rho_n(t) \equiv \rho_n(t, \varphi) = \sqrt{\pi}\, 2^n e^{-\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) t} \sum_{j=1}^{n} b_{j,n} \varkappa_j(t) =$$

$$= 2^n e^{-\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) t} \sum_{j=0}^{n} c_{j,n} t^j, \qquad (3.21)$$

притом, очевидно, что совокупность коэффициентов $\{b_{j,n}\}_0^n$ и $\{c_{j,n}\}_0^n$ зависят от параметра φ.

Далее, в нашем случае из общей формулы (3.6) вытекает, что при $x \in (0, +\infty)$

$$\omega_{n+1}(x) \equiv \omega_{n+1}(x; \varphi) =$$

$$= i\,\frac{\sqrt{\sin\varphi}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(u + \frac{1}{2}\cos\varphi - \frac{i}{2}\sin\varphi\right)^n}{\left(u + \frac{1}{2}\cos\varphi + \frac{i}{2}\sin\varphi\right)^{n+1}} e^{-ixu}\, du \quad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

Отсюда, после замены переменного интегрирования

$$u = v\sin\varphi - \frac{1}{2}\cos\varphi$$

следует

$$\omega_{n+1}(x; \varphi) = i\,\frac{\sqrt{\sin\varphi}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(v - \frac{i}{2}\right)^n}{\left(v + \frac{i}{2}\right)^{n+1}} \exp\left\{-i\left(v\sin\varphi - \frac{1}{2}\cos\varphi\right)x\right\} dv$$

и поэтому

$$e^{-i\frac{x}{2}\cos\varphi}\, \omega_{n+1}(x; \varphi) = \frac{\sqrt{\sin\varphi}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(v + \frac{i}{2}\right)^n}{\left(v - \frac{i}{2}\right)^{n+1}} e^{i(x\sin\varphi)v}\, dv.$$

Далее, пользуясь представлением (2.17)—(2.18) полиномов Лаггера, мы получим

$$\omega_{n+1}(x;\ \varphi)=\sqrt{\sin\varphi}\ \exp\left\{\frac{i}{2}e^{i\varphi}x\right\}L_n(x\sin\varphi). \tag{3.22}$$

Наконец, отсюда в силу формулы (3.7) теоремы 4 приходим к представлению

$$\rho_n(t;\ \varphi)=\frac{\sqrt{2^{-1}\sin\varphi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+it\right)}\int\limits_0^{+\infty}\exp\left\{\frac{i}{2}e^{i\varphi}x\right\}L_n(x\sin\varphi)\,x^{-\frac{1}{2}+it}dx=$$

$$=\frac{\left\{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+it\right)\right\}^{-1}}{(\sin\varphi)^{it}}\int\limits_0^{+\infty}\exp\left\{-\frac{x}{2}(1-i\operatorname{ctg}\varphi)\right\}\times$$

$$\times L_n(x)\,x^{-\frac{1}{2}+it}dx. \tag{3.23}$$

Теперь нам необходимо вычислить аргумент старшего коэффициента $c_{n,n}$ в сумме (3.21). С этой целью, заметив, что в силу явного представления (2.19) полиномов Лаггера и ввиду того, что при $0<\varphi<\pi$ и $-\infty<t<+\infty$

$$\int\limits_0^{\infty}\exp\left\{-\frac{x}{2}(1-i\operatorname{ctg}\varphi)\right\}x^{k-\frac{1}{2}+it}dt=$$

$$=\left[2^{-1}(1-i\operatorname{ctg}\varphi)\right]^{-k-\frac{1}{2}-it}\varkappa_k(t)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+it\right)\quad(0<k<+\infty)$$

из (3.23) мы будем иметь

$$\rho_n(t;\ \varphi)=\sqrt{\sin\varphi}\,2^{it}\times$$

$$\times\exp\left\{i\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\left(\frac{1}{2}+it\right)\right\}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(2\sin\varphi)^k}{k!}\binom{n}{k}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)k}\varkappa_k(t). \tag{3.24}$$

Таким образом, в рассматриваемом нами случае (3.20) наряду с общей формулой (3.21) для функции $\rho_n(t;\ \varphi)$ имеет место явное представление в виде суммы (3.24).

Но поскольку по (3.1) у полинома $\varkappa_k(t)$ коэффициент при старшем члене t^k равен $e^{i\frac{\pi}{2}k}$, то сравнением наших формул (3.21) и (3.24) легко видеть, что в (3.21)

$$c_{n,n}=2^n(\sin\varphi)^{n+\frac{1}{2}}e^{-in\varphi+\frac{i}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}\qquad(n=0,\ 1,\ 2,\cdots),$$

т. е.

$$\arg c_{n,n}=-n\varphi+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right).$$

Отсюда и из (3.21) следует, что для полинома степени n

$$Q_n(t;\varphi)=2^{-it}e^{in\varphi}\exp\left\{-i\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\left(\frac{1}{2}+it\right)\right\}\rho_n(t;\varphi) \tag{3.25}$$

коэффициевт $q_n(\varphi)$ при старшем члене t^n положителен и равен

$$q_n(\varphi)=|c_{n,n}|=2^n(\sin\varphi)^{n+\frac{1}{2}}>0. \tag{3.26}$$

Система полиномов $\{Q_n(t;\varphi)\}_0^\infty$ ввиду свойства (3.5) системы $\{\rho_n(t)\}_0^\infty=\{\rho_n(t;\varphi)\}_0^\infty$ и формулы (3.25) ортонормальна на $(-\infty,+\infty)$ уже с весом $\exp\{-(\pi-2\varphi)t\}(\operatorname{ch}\pi t)^{-1}$, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp\{-(\pi-2\varphi)t\}}{\operatorname{ch}\pi t}Q_n(t;\varphi)\overline{Q_m(t;\varphi)}\,dt=\delta_{nm}\ (n,m=0,1,2,\cdots). \tag{3.27}$$

Но в силу (3.26) легко видеть, что у полиномов $\{Q_n(t;\varphi)\}_0^\infty$ вообще все коэффициенты будут вещественными.

Поэтому, если обозначить

$$P_n(t;\varphi)=(\sin\varphi)^{-1/2}Q_n(t;\varphi)\quad(n=0,1,2,\cdots) \tag{3.28}$$

и пользоваться определением (3.16) весовой функции $w(t;\varphi)$, то из (3.27) вытекает, что для $\{P_n(t;\varphi)\}_0^\infty$ выполняются условия ортонормальности (3.18).

Наконец, пользуясь соотношениями (3.28), (3.25) и (3.23), мы получим утверждение (3.19) об интегральном представлении полиномов $\{P_n(t;\varphi)\}_0^\infty$, ортонормальных на всей оси $(-\infty,+\infty)$ с весом $w(t;\varphi)$.

(в) В рассматриваемом нами случае по (3.20)

$$\cos(\operatorname{Im}\alpha_j)=\sin\varphi,\ \operatorname{ch}(\operatorname{Re}\alpha_j)=5/2\quad(0\leqslant j<+\infty).$$

Поэтому из теоремы 5 о замкнутости общей системы $\{(\operatorname{ch}\pi t)^{-1/2}\times\times\rho_n(t)\}_0^\infty$, в частности, вытекает

Теорема 7. 1°. *Ортонормальная на $(-\infty,+\infty)$ система функций $\{\sqrt{w(t;\varphi)}\,P_n(t;\varphi)\}_0^\infty$ замкнута в $L_2(-\infty,+\infty)$.*

2°. *Система полиномов $\{P_n(t;\varphi)\}_0^\infty$ замкнута в классе $L_2\{(-\infty,+\infty);\ w(t;\varphi)\,dt\}$ функций, для которых*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}w(t;\varphi)|f(t)|^2\,dt<+\infty. \tag{3.29}$$

Иначе говоря, положив для любой функции $f(t)$ из этого класса

$$c_k(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}w(t;\varphi)f(\tau)\,P_k(\tau;\varphi)\,d\tau\quad(0\leqslant k<+\infty) \tag{3.30}$$

и

$$S_n(t;\ f) = \sum_{k=0}^{n} c_k(f)\, P_k(t;\ \varphi) \quad (0 \leq n < +\infty)$$

будем иметь

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} w(t;\ \varphi)\, |f(t) - S_n(t;\ \varphi)|^2\, dt = 0. \tag{3.31}$$

В заключение отметим, что, как мы увидим в следующем параграфе, полученная нами система $\{P_n(t;\ \varphi)\}_0^\infty$ представляет собой специальный случай более общей системы полиномов $\{P_n^{(\alpha)}(t;\ \varphi)\}_0^\infty$, зависящих кроме $\varphi \in (0, \pi)$ еще от одного параметра $\alpha \in (-1, +\infty)$. Указанные системы, совпадающие с нашей системой лишь при значении параметра $\alpha = 0$, были впервые открыты Ф. Поллачеком [5] совершенно иным методом. Однако, как в его работе, так и в других источниках ([6], [25]), где полностью приводятся формулировки его результатов, не содержится одного из важнейших свойств этих полиномов, установленного нами в теореме 6.

§ 4. Система полиномов Поллачека и родственные системы для полуоси $(0, +\infty)$

4.1. В § 3 система $\{P_n(t;\ \varphi)\}_0^\infty$, во-первых, была получена рассмотрением весьма частного случая другой системы $\{\rho_n(t)\}_0^\infty$, когда порождающая ее последовательность параметров $\{\alpha_j\}_0^\infty$ была выбрана нами специальным образом (3.20).

Во-вторых, уже на основе общих интегральных представлений теоремы 5 той же системы $\{\rho_n(t)\}_0^\infty$ мы естественным путем пришли к теореме 6 об интегральном представлении нашей системы $\{P_n(t;\ \varphi)\}_0^\infty$. Таким образом, лишь этим путем в теореме 6 было установлено, что полиномы $\{P_n(t;\ \varphi)\}_0^\infty$ могут быть порождены также в результате интегрального преобразования Меллина над системой функций $\{e^{-\frac{1}{2}(1-\mathrm{ctg}\,\varphi)x} \times L_n(x)\}_0^\infty$ также, очевидно, ортонормальной на $(0, +\infty)$.

Предлагаемый нами в данном параграфе метод построения общей ортонормальной системы Поллачека $\{P_n^{(\alpha)}(t;\ \varphi)\}_0^\infty$, зависящей от двух параметров $\varphi \in (0, \pi)$ и $\alpha \in (-1, +\infty)$, основан уже именно на прямом применении преобразования Меллина над системой функций

$$\{e^{-\frac{1}{2}(1-t\,\mathrm{ctg}\,\varphi)x}\, x^{\frac{\alpha}{2}}\, L_n^{(\alpha)}(x)\}_0^\infty, \tag{4.1}$$

где $\{L_n^{(\alpha)}(x)\}_0^\infty$ — обобщенные полиномы Лаггера.

(а) Обобщенные полиномы Лаггера, как хорошо известно, определяются посредством формул*

* Теория полиномов Лаггера, а также других ортогональных систем полиномов, наиболее полно изложены в монографиях Г. Сегё [6], G. Sansone [26].

$$L_0^{(\alpha)}(x) \equiv 1,\ L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{x^{-\alpha} e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \{x^{n+\alpha} e^{-x}\} \quad (1 \leqslant n < +\infty) \tag{4.2}$$

для любого значения параметра $\alpha \in (-1, +\infty)$. Кроме того, они ортогональны на $(0, +\infty)$ с весом вида $e^{-x} x^{\alpha}$ для любого значения параметра $\alpha > -1$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha} L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x)\, dx = \frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+n)} \delta_{nm} \quad (n;\ m = 0, 1, 2, \cdots), \tag{4.3}$$

допускают явное представление

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{k!\,(n-k)!\,\Gamma(1+\alpha+k)} x^k \quad (0 \leqslant n < +\infty) \tag{4.2'}$$

и очевидно также, что $L_n^{(0)}(x) \equiv L_n(x) \quad (0 \leqslant n < +\infty)$.

Далее, наряду с системой $\{e^{-\frac{x}{2}} L_n(x)\}_0^{\infty}$ *система обобщенных функций Лагера*

$$\{e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}} L_n^{(\alpha)}(x)\}_0^{\infty} \quad (-1 < \alpha < +\infty) \tag{4.4}$$

также замкнута в $L_2(0, +\infty)$.

Приведем одно из простейших доказательств этого известного утверждения.

Пусть для некоторой функции $f_0(t) \in L_2(0, +\infty)$

$$\int_0^{+\infty} f_0(x) \{e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}} L_n^{(\alpha)}(x)\}\, dx = 0 \quad (0 \leqslant n < +\infty).$$

Ввиду формул (4.3) эти равенства эквивалентны следующим:

$$\int_0^{+\infty} f_0(x)\, e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}+n} dx = 0 \qquad (0 \leqslant n < +\infty).$$

Отсюда после замены переменного интегрирования получим

$$\int_0^{\infty} F_0(t)\, e^{-\frac{t}{2}} t^{n-1}\, dt = 0 \quad (1 \leqslant n < +\infty), \tag{4.5}$$

где

$$F_0(t) = e^{-\frac{t}{2}} t^{1+\frac{\alpha}{2}} f_0(2t) \in L_2(0, +\infty).$$

Но теперь уже равенства (4.5) эквивалентны следующим:

$$\int_0^{+\infty} F_0(t) \{e^{-\frac{t}{2}} L_n(t)\}\, dt = 0 \quad (0 \leqslant n < +\infty). \tag{4.5'}$$

Поэтому из замкнутости системы функций Лаггера $\{e^{-\frac{x}{2}} L_n(x)\}_0^\infty$ вытекает, что почти всюду на $(0, +\infty)$, $F_0(t) = f_0(t) = 0$, т. е. замкнутость системы (4.1).

(б) Заметив, что при любых значениях параметров $\alpha \in (-1, +\infty)$ и $\varphi \in (0, \pi)$

$$l_n(\tau; \varphi) \equiv e^{-\frac{1}{2}(1-i\operatorname{ctg}\varphi)\tau} \tau^{\frac{\alpha}{2}} L_n^{(\alpha)}(\tau) \in L_2(0, +\infty) \quad (0 \leqslant n < +\infty),$$

введем в рассмотрение последовательность функций $\{\Omega_n^{(\alpha)}(t; \varphi)\}_0^\infty$ — их преобразований Меллина

$$\Omega_n^{(\alpha)}(t; \varphi) \equiv M[l_n] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(1-i\operatorname{ctg}\varphi)\tau} L_n^{(\alpha)}(\tau)\, \tau^{\frac{\alpha-1}{2}+it} d\tau \quad (0 \leqslant n < +\infty). \quad (4.6)$$

Лемма 3. 1°. *Система функций* $\{\Omega_n^{(\alpha)}(t; \varphi)\}_0^\infty$ *замкнута в* $L_2(-\infty, +\infty)$ *и ортогональна на* $(-\infty, +\infty)$, *причем*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Omega_n^{(\alpha)}(t; \varphi)\, \overline{\Omega_m^{(\alpha)}(t; \varphi)}\, dt = \frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+n)} \delta_{nm} \quad (n; m = 0, 1, 2, \cdots). \quad (4.7)$$

2°. *Функция* $\Omega_n^{(\alpha)}(t; \varphi)$ *представима в следующем виде:*

$$\Omega_n^{(\alpha)}(t; \varphi) = \frac{[2^{-1}(1-i\operatorname{ctg}\varphi)]^{-\frac{1+\alpha}{2}-it}}{\sqrt{2\pi}} U_n^{(\alpha)}(t; \varphi), \quad (4.8)$$

где

$$U_n^{(\alpha)}(t; \varphi) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(2\sin\varphi)^k\, \Gamma(1+\alpha+n)}{k!\,(n-k)!\,\Gamma(1+\alpha+k)} e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)k} \times$$

$$\times \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2} + k + it\right). \quad (4.9)$$

Доказательство. 1°. Ввиду свойств замкнутости и формул ортогональности (4.3) системы функций Лаггера (4.4), имеющих место, очевидно, и для системы $\{l_n^{(\alpha)}(\tau; \varphi)\}_0^\infty$, наши утверждения непосредственно следуют из теорем Б и Г (2°).

2°. Заметив, что

$$\int_0^\infty e^{-\frac{\tau}{2}(1-i\operatorname{ctg}\varphi)} \tau^{\frac{\alpha-1}{2}+k+it} d\tau =$$

$$= [2^{-1}(1-i\operatorname{ctg}\varphi)]^{-\frac{1+\alpha}{2}-k-it}\, \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}+k+it\right), \quad -\infty < t < +\infty,$$

из представления (4.3) полинома $L_n^{(\alpha)}(x)$ легко получим представление (4.8)—(4.9) леммы.

(в) Теперь введем в рассмотрение последовательность полиномов $\{\varkappa_k^{(\alpha)}(t)\}_0^{\infty}$

$$\varkappa_0^{(\alpha)}(t) \equiv 1, \quad \varkappa_k^{(\alpha)}(t) = \prod_{j=1}^{k} \left(\frac{2j-1+\alpha}{2} + it \right) \quad (0 \leqslant k < +\infty), \tag{4.10}$$

заметив, что

$$\varkappa_k^{(\alpha)}(t) = e^{i\frac{\pi}{2}k} \lambda_k^{(\alpha)}(t) \quad (1 \leqslant k < +\infty), \tag{4.10'}$$

где

$$\lambda_0^{(\alpha)}(t) \equiv 1, \quad \lambda_k^{(\alpha)}(t) = \prod_{j=1}^{k} \left(t - i\,\frac{2j-1+\alpha}{2} \right) \quad (1 \leqslant k < + < \infty) \tag{4.11}$$

— полином степени k со старшим коэффициентом при t^k, равным единице.

Но тогда в силу формул

$$\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2} + k + it \right) = \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2} + it \right) \varkappa_k^{(\alpha)}(t) \quad (0 \leqslant k < +\infty),$$

а также (4.10′) и (4.11), функцию (4.9) леммы 3 мы можем записать также в виде

$$U_n^{(\alpha)}(t;\varphi) = e^{-in\varphi}\, \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2} + it \right) R_n^{(\alpha)}(t;\varphi), \tag{4.9'}$$

где

$$R_n^{(\alpha)}(t;\varphi) = \sum_{k=0}^{n} (2\sin\varphi)^k\, \frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{k!\,(n-k)!}\, e^{i(n-k)\varphi}\, \lambda_k(t) \tag{4.9''}$$

— *полином степени n с положительным старшим коэффициентом, равным* $(2\sin\varphi)^n\,(\Gamma(1+\alpha+n)/\Gamma(1+n)$.

Лемма 4. *Система полиномов $\{R_n^{(\alpha)}(t;\varphi)\}_0^{\infty}$ ортогональна на $(-\infty, +\infty)$, причем*

$$(2\sin\varphi)^{1+\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2} + it \right) \right|^2 e^{-(\pi-2\varphi)t}\, R_n^{(\alpha)}(t;\varphi)\, R_m^{(\alpha)}(t;\varphi)\, dt =$$

$$= \frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+n)}\, \delta_{nm} \quad (n;\ m = 0, 1, 2, \cdots). \tag{4.11}$$

Доказательство. Согласно формулам ортогональности (4.7) леммы 3

$$(2\sin\varphi)^{1+\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\pi-2\varphi)} U_n^{(\alpha)}(t;\varphi)\, \overline{U_m^{(\alpha)}(t;\varphi)}\, dt = \frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+n)}\, \delta_{nm}$$

$$(n;\ m = 0, 1, 2, \cdots).$$

откуда ввиду (4.9) и (4.10) получим требуемые соотношения (4.11), если учтем то обстоятельство, что будучи с весом ортогональными, полиномы $\{R_n^{(\alpha)}(t;\ \varphi)\}_0^\infty$, наряду со старшими должны иметь только вещественные коэффициенты.

(г) Введем теперь в рассмотрение функцию

$$w^{(\alpha)}(t;\ \varphi)=\frac{2^\alpha}{\pi}(\sin\varphi)^{1+\alpha}\left|\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}+it\right)\right|^2 e^{-(\pi-2\varphi)t},\quad -\infty<t<+\infty, \tag{4.12}$$

предполагая, что $\varphi\in(0,\pi)$ и $\alpha\in(-1,+\infty)$ — произвольные параметры. Пользуясь формулой Стирлинга нетрудно убедиться в том, что при $t\to\pm\infty$

$$\log w^{(\alpha)}(t;\ \varphi)\sim -C_\pm(\varphi;\ \alpha)\,|t|, \tag{4.13}$$

притом значения постоянных $C_+(\varphi;\ \alpha)>0$ и $C_-(\varphi;\ \alpha)>0$ могут быть записаны в явной форме.

Следуя Поллачеку, обозначим через $\{P_k^{(\alpha)}(t;\ \varphi)\}_0^\infty$ систему полиномов, являющуюся результатом ортогонализации с весом $w^{(\alpha)}(t;\ \varphi)$ на $(-\infty,+\infty)$ последовательности степеней аргумента $\{t^k\}_0^\infty$ по известному методу Грамма-Шмидта, с условиями нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w^{(\alpha)}(t;\ \varphi)\,P_n^{(\alpha)}(t;\ \varphi)\,P_m^{(\alpha)}(t;\ \varphi)\,dt=\frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+n)}\,\delta_{nm} \tag{4.14}$$

$$(n;\ m=0,1,2,\cdots).$$

Как хорошо известно, если предположить еще, что при любом k $(0\leqslant k<+\infty)$ у полинома $P_k^{(\alpha)}(t;\ \varphi)$ коэффициент при старшем его члене имеет положительный знак, то тогда наша система определится единственным образом.

Докажем теперь теорему об интегральном представлении полиномов Поллачека.

Теорема 8. *Полиномы $P_n^{(\alpha)}(t;\ \varphi)$ допускают интегральное представление в виде*

$$P_n^{(\alpha)}(t;\ \varphi)=$$

$$=e^{in\varphi}\frac{[2^{-1}(1-i\operatorname{ctg}\varphi)]^{\frac{1+\alpha}{2}+it}}{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}+it\right)}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}(1-i\operatorname{ctg}\varphi)x}L_n^{(\alpha)}(x)\,x^{\frac{\alpha-1}{2}+it}\,dx \tag{4.15}$$

$$(n=0,1,2,\cdots),$$

где $L_n^{(\alpha)}(x)$ — обобщенный полином Лагерра (4.1).

Доказательство. Во-первых, убедимся в том, что полиномы Поллачека допускают явное представление вида

$$P_n^{(\alpha)}(t;\ \varphi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}R_n^{(\alpha)}(t;\ \varphi)=$$

$$= \frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{n} (2\sin\varphi)^k \frac{e^{i(n-k)\varphi}}{k!\,(n-k)!} \lambda_k^{(\alpha)}(t;\varphi). \tag{4.16}$$

Действительно, пользуясь обозначением (4.12) весовой функции $w^{(\alpha)}(t;\varphi)$, формулы (4.11) леммы 4 запишутся именно в виде (4.14), и, кроме того, коэффициент при старшей степени t^n у полинома $P_n^{(\alpha)}(t;\varphi)$ имеет положительный знак.

Во-вторых, из соотношений и формул (4.16), (4.9) и (4.8) вытекает представление (4.15) теоремы.

Приведем теперь теорему о замкнутости.

Теорема 9. 1°. *Система функций* $\{\sqrt{w^{(\alpha)}(t;\varphi)}\, P_n^{(\alpha)}(t;\varphi)\}_0^\infty$ *замкнута в* $L_2(-\infty, +\infty)$.

2°. *Система полиномов* $\{P_n^{(\alpha)}(t;\varphi)\}_0^\infty$ *замкнута в классе* $L_2\{(-\infty, +\infty); w^{(\alpha)}(t;\varphi)\,dt\}$ *функций, для которых*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w^{(\alpha)}(t;\varphi)\,|f(t)|^2\,dt < +\infty. \tag{4.17}$$

Иначе говоря, для любой функции $f(t)$ *из указанного класса, положив*

$$c_k^{(\alpha)}(f) = \left\{\frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+\alpha+k)}\right\}^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} w^{(\alpha)}(\tau;\varphi)\, f(\tau)\, P_k^{(\alpha)}(\tau;\varphi)\,d\tau \tag{4.18}$$

$$(0 \leqslant k < +\infty)$$

и

$$S_n^{(\alpha)}(t;f) = \sum_{k=0}^{n} c_k(f) \frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+\alpha+k)} P_k^{(\alpha)}(t;\varphi) \quad (0 \leqslant n < +\infty),$$

будем иметь

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} w^{(\alpha)}(t;\varphi)\,|f(t) - S_n^{(\alpha)}(t;f)|^2\,dt = 0. \tag{4.19}$$

Доказательство. Оба утверждения непосредственно следуют из леммы 3 (1°) на основании введенных нами в последующем изложении обозначений (4.8), (4.9), (4.9'), а затем (4.12) и (4.16).

В заключение этого пункта отметим, что сопоставляя, например, теоремы 6 и 8, легко видеть, что система полиномов $\{P_n(t;\varphi)\}_0^\infty$, построенная в § 3, и система Поллачека при значении параметра $\alpha = 0$, т. е. система $\{P_n^{(0)}(t;\varphi)\}_0^\infty$ просто тождественны.

4.2. (а) Установим теперь формулу типа Радрига для полиномов $\{P_n^{(\alpha)}(t;\varphi)\}_0^\infty$.

Из самого определения (4.2) обобщенных полиномов Лаггера $\{L_n^{(\alpha)}(x)\}_0^\infty$ следует представление

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{x^{-\alpha} e^{x}}{2\pi i} \int\limits_{l(x)} \frac{\zeta^{n+\alpha}\, e^{-\zeta}}{(\zeta - x)^{n+1}}\, d\zeta, \quad x \in (0, +\infty)\,(0 \leqslant n < +\infty), \tag{4.20}$$

где $l(x)$ — произвольный замкнутый контур, охватывающий точку x и лежащий в полуплоскости $\operatorname{Re} \zeta > 0$, а $\zeta^{n+\alpha}$ — главная ветвь этой, вообще говоря, многозначной функции.

Заменой переменного $\zeta = (1/2 + w)\, x$ формулу (4.20) можно записать также в виде

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{e^{x/2}}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho} \frac{\left(w + \frac{1}{2}\right)^{n+\alpha}}{\left(w - \frac{1}{2}\right)^{n+1}}\, e^{-xw}\, dw \quad (0 \leqslant n < +\infty), \tag{4.20'}$$

где за контур C_ρ можно брать любую окружность $|w - 1/2| = \rho < 1/2$.

Из (4.20′) имеем

$$\int\limits_0^\infty e^{-\frac{1}{2}(1 - i \operatorname{ctg} \varphi)\, x}\, L_n^{(\alpha)}(x)\, x^{\frac{\alpha-1}{2} + it}\, dt =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(1 - i \operatorname{ctg} \varphi)\, x}\, x^{\frac{\alpha-1}{2} + it} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho} \frac{\left(w + \frac{1}{2}\right)^{n+\alpha}}{\left(w - \frac{1}{2}\right)^{n+1}}\, e^{-\left(w - \frac{1}{2}\right) x}\, dw \right\} dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho} \frac{\left(w + \frac{1}{2}\right)^{n+\alpha}}{\left(w - \frac{1}{2}\right)^{n+1}} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} e^{-x\left(w - \frac{i}{2} \operatorname{ctg} \varphi\right)}\, x^{\frac{\alpha-1}{2} + it}\, dx \right\} dw. \tag{4.21}$$

при этом замена порядка интегрирования, как легко видеть, допустима ввиду того, что

$$\left| \exp\left\{ -\left(w - \frac{1}{2}\right) x \right\} \right| \leqslant \exp\left\{ \left(\frac{1}{2} - \rho\right) x \right\}, \quad w \in C_\rho.$$

Далее, поскольку

$$\operatorname{Re}\left\{ w + \frac{i}{2} \operatorname{ctg} \varphi \right\} = \operatorname{Re} w \geqslant \frac{1}{2} - \rho > 0, \quad w \in C_\rho,$$

то справедлива формула

$$\int\limits_0^\infty e^{-x\left(w - \frac{i}{2} \operatorname{ctg} \varphi\right)}\, x^{\frac{\alpha-1}{2} + it}\, dx = \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2} + it\right) \left(w - \frac{i}{2} \operatorname{ctg} \varphi\right)^{-\frac{1+\alpha}{2} - it}. \tag{4.22}$$

На основании интегрального представления (4.15) теоремы 8 и в силу формул (4.21)—(4.22) мы приходим к следующей теореме.

Теорема 10. *Для полиномов* $\{P_n^{(\alpha)}(t;\varphi)\}_0^\infty$ *имеет место представление*

$$P_n^{(\alpha)}(t;\varphi)=e^{in\varphi}\frac{[2^{-1}(1-i\operatorname{ctg}\varphi)]^{\frac{1-\alpha}{2}+it}}{2\pi i}\times$$

$$\times\int\limits_{\left|w-\frac{1}{2}\right|=\rho}\frac{\left(w+\frac{1}{2}\right)^{n+\alpha}\left(w-\frac{i}{2}\operatorname{ctg}\varphi\right)^{-\frac{1+\alpha}{2}-it}}{\left(w-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}\,dw,\qquad(4.23)$$

$$(n=0,\ 1,\ 2,\cdots)$$

где $\rho\in(0,\ 1/2)$ *любое*

(б) Установим теперь формулу Ф. Поллачека для производящей функции

$$G^{(\alpha)}(t,\ z;\ \varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n P_n^{(\alpha)}(t;\varphi)\qquad(4.24)$$

системы $\{P_n^{(\alpha)}(t;\varphi)\}_0^\infty$.

Теорема 11. *При любых* $\alpha\in(-1,+\infty)$, $\varphi\in(0,\pi)$ *и* $t\in\in(-\infty,+\infty)$

$$G^{(\alpha)}(t,\ z;\ \varphi)=(1-ze^{i\varphi})^{-\frac{1+\alpha}{2}+it}(1-ze^{-i\varphi})^{-\frac{1+\alpha}{2}-it},\ |z|<1.\qquad(4.25)$$

Доказательство. Заметим сначала, что

$$\left|\left(w+\frac{1}{2}\right)\left(w-\frac{1}{2}\right)^{-1}\right|<\frac{3}{2\rho},\ \text{при}\ \left|w-\frac{1}{2}\right|=\rho.$$

Поэтому при условии $w\in C_\rho$ и $|z|<2\rho/3$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[e^{i\varphi}z\,\frac{w+\frac{1}{2}}{w-\frac{1}{2}}\right]^n=\frac{w-\frac{1}{2}}{w(1-ze^{i\varphi})-1/2\,(1+ze^{i\varphi})},$$

притом ряд снова будет равномерно сходящимся относительно обеих переменных w и z на каждом компакте из областей их изменения.

Отсюда ввиду (4.23) получим следующее представление для производящей функции

$$G^{(\alpha)}(t;\ z;\ \varphi)=\frac{[2^{-1}(1-i\operatorname{ctg}\varphi)]^{\frac{1-\alpha}{2}+it}}{2\pi i}\times$$

$$\times\int\limits_{C_\rho}\frac{\left(w+\frac{1}{2}\right)^{\alpha}\left(w-\frac{i}{2}\operatorname{ctg}\varphi\right)^{-\frac{1+\alpha}{2}-it}}{w(1-ze^{i\varphi})-1/2\,(1+ze^{i\varphi})}\,dw,\ |z|\leqslant\frac{2\rho}{3}.\qquad(4.26)$$

Однако, в замкнутом круге $\left|w - \frac{1}{2}\right| \leqslant \rho < \frac{1}{2}$ мы имеем

$$\left|w + \frac{1}{2}\right| > 1 - \rho, \text{ а также } \left|w - \frac{i}{2}\operatorname{ctg}\varphi\right| \geqslant \frac{1/2 - \rho}{\sin\varphi} > 0.$$

Поэтому подынтегральная функция в (4.26) однозначна и аналитична в круге $|w - 1/2| \leqslant \rho$, кроме единственной особой точки — полюса первого порядка в точке $w_0 = (1 + ze^{i\varphi})/2\,(1 - ze^{i\varphi})$. Впрочем то обстоятельство, что точка w_0 при условии $|z| \leqslant \frac{2\rho}{3}$ лежит внутри окружности C, очевидно, так как при $\rho < \frac{1}{2}$

$$|w_0 - 1/2| = |ze^{i\varphi}(1 - ze^{i\varphi})^{-1}| \leqslant \frac{2\rho}{3 - 2\rho} < \rho.$$

Но простым подсчетом получим

$$\operatorname*{Res}_{w = w_0}\left\{\frac{\left(w + \frac{1}{2}\right)^{\alpha}(w - i/2\operatorname{ctg}\varphi)^{-\frac{1+\alpha}{2} - it}}{w\,(1 - ze^{i\varphi}) - 1/2\,(1 + ze^{i\varphi})}\right\} =$$

$$= \frac{(w_0 + 1/2)^{\alpha}(w_0 - i/_2\operatorname{ctg}\varphi)^{-\frac{1+\alpha}{2} - it}}{1 - ze^{i\varphi}} =$$

$$= \frac{(1 - ze^{i\varphi})^{-\frac{1+\alpha}{2} - it}(1 - ze^{-i\varphi})^{-\frac{1+\alpha}{2} - it}}{[2^{-1}(1 - i\operatorname{ctg}\varphi)]^{\frac{1+\alpha}{2} + it}},$$

откуда и из (4.26) следует формула (4.25), но пока при условии $|z| < \frac{2\rho}{3}$.

Наконец, так как сама производящая функция $G^{(\alpha)}(t, z; \varphi)$ аналитична во всем единичном круге, то очевидно, что и разложение (4.24) в степенной ряд справедливо не только при $|z| \leqslant 2\rho/3$, но и при $|z| < 1$.

(в) Приведем теперь рекуррентные соотношения для системы полиномов, также установленные Ф. Поллачеком.

Теорема 12. *Для системы полиномов* $\{P_n^{(\alpha)}(t; \varphi)\}_0^{\infty}$ *имеют место реккуррентные уравнения*

$$n\,P_n^{(\alpha)}(t; \varphi) - \{(2n + \alpha - 1)\cos\varphi + 2t\sin\varphi\}\,P_{n-1}^{(\alpha)}(t; \varphi) +$$
$$+ (n + \alpha - 1)\,P_{n-2}^{(\alpha)}(t; \varphi) = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots), \tag{4.27}$$

где следует положить $P_{-1}^{(\alpha)}(t; \varphi) \equiv 0$, $P_0^{(\alpha)}(t; \varphi) = 1$.

Доказательство. Из явного выражения (4.25) производящей функции $G^{(\alpha)}(t;\, z;\, \varphi)$ системы непосредственно следует, что справедливо тождество

$$(1-2z\cos\varphi+z^2)\frac{\partial G^{(\alpha)}}{\partial z}=\{(1+\alpha)\cos\varphi+2t\sin\varphi-(1+\alpha)\,z\}G^{(\alpha)}.$$

Подставляя сюда значения

$$G^{(\alpha)}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n P_n^{(\alpha)}(t;\,\varphi) \text{ и } \frac{\partial G^{(\alpha)}}{\partial z}=\sum_{n=1}^{\infty} n\, z^{n-1} P_n^{(\alpha)}(t;\,\varphi)$$

и приравнивая коэффициенты при z^{n-1} в обеих частях полученного таким образом тождества для степенных рядов, мы приходим к соотношениям (4.27). При этом, $P_0^{(\alpha)}(t;\,\varphi)\equiv 1$, что следует, например, из (4.24)—(4.25) и поэтому мы должны положить $P_{-1}^{(\alpha)}(t;\,\varphi)\equiv 0$.

4.3. Перейдем теперь к теории родственных с $\{P_n^{(\alpha)}(t;\,\varphi)\}_0^\infty$ систем полиномов для полуоси $(0,\,+\infty)$.

(a) Из явного выражения (4.25) производящей функции $G^{(\alpha)}(t,\,z;\,\varphi)$ следует, что справедливо тождество

$$G^{(\alpha)}(-t,\,-z;\,\pi-\varphi)\equiv G^{(\alpha)}(t,\,z;\,\varphi).$$

Подставляя сюда значения этих функций из (4.24) и приравнивая коэффициенты при z^n в обеих степенных рядах, мы приходим к тождествам

$$P_n^{(\alpha)}(-t,\,\pi-\varphi)=(-1)^n P_n^{(\alpha)}(t,\,\varphi)\quad (n=0,\,1,\,2,\cdots).$$

Отсюда при $\varphi=\pi/2$, в частности, вытекает

$$P_n^{(\alpha)}\left(-t,\,\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^n P_n^{(\alpha)}\left(t,\,\frac{\pi}{2}\right)\quad (n=0,\,1,\,2,\cdots)$$

и, следовательно, можно утверждать, что

$$P_{2n}^{(\alpha)}\left(t,\,\frac{\pi}{2}\right)=A_n^{(\alpha)}(t^2),\ P_{2n+1}^{(\alpha)}\left(t,\,\frac{\pi}{2}\right)=tB_n^{(\alpha)}(t^2)(n=0,\,1,\,2,\cdots),\quad (4.28)$$

где $A_n^{(\alpha)}(x)$ и $B_n^{(\alpha)}(x)$ — полиномы степени n с положительным старшим коэффициентом.

Докажем теперь теорему.

Теорема 13. 1°. *Системы полиномов* $\{A_n^{(\alpha)}(t)\}_0^\infty$ *и* $\{B_n^{(\alpha)}(t)\}_0^\infty$ *ортонормальны на полуоси* $(0,\,+\infty)$ *в смысле*

$$\int_0^\infty w_1^{(\alpha)}(t)\,A_n^{(\alpha)}(t)\,A_m^{(\alpha)}(t)\,dt=\frac{\Gamma(2n+1+\alpha)}{\Gamma(2n+1)}\,\delta_{nm}\quad (n;\,m=0,\,1,\,2,\cdots),\tag{4.29}$$

где

$$w_1^{(\alpha)}(t)=\frac{2^\alpha}{\pi}\left|\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}+i\sqrt{t}\right)\right|^2 t^{-\frac{1}{2}}\tag{4.29'}$$

и

$$\int_0^\infty w_2^{(\alpha)}(t)\, B_n^{(\alpha)}(t)\, B_m^{(\alpha)}(t)\, dt = \frac{\Gamma(2n+2+\alpha)}{\Gamma(2n+2)}\,\delta_{nm} \quad (n;\ m=0,\ 1,\ 2,\cdots), \tag{4.30}$$

где

$$w_2^{(\alpha)}(t) = \frac{2^\alpha}{\pi}\left|\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}+i\sqrt{t}\right)\right|^2 t^{1/2}. \tag{4.30'}$$

2°. *Справедливы интегральные представления*

$$A_n^{(\alpha)}(t) = e^{i\pi n}\,\frac{2^{-\frac{1+\alpha}{2}+i\sqrt{t}}}{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}+i\sqrt{t}\right)}\int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}}\,L_{2n}^{(\alpha)}(x)\,x^{\frac{\alpha-1}{2}+i\sqrt{t}}\,dx \tag{4.31}$$

$$(n=0,\ 1,\ 2,\cdots),$$

$$B_n^{(\alpha)}(t) = e^{i\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}\,\frac{2^{-\frac{1+\alpha}{2}+i\sqrt{t}}}{\sqrt{t}\,\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}+i\sqrt{t}\right)}\int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}}\,L_{2n+1}^{(\alpha)}(x)\,x^{\frac{\alpha-1}{2}+i\sqrt{t}}\,dx \tag{4.32}$$

$$(n=0,\ 1,\ 2,\cdots).$$

Доказательство. 1°. Согласно (4.12) и (4.14)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{2^\alpha\pi^{-1}\left|\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}+it\right)\right|^2\right\}P_n^{(\alpha)}\left(t;\ \frac{\pi}{2}\right)P_m^{(\alpha)}\left(t;\ \frac{\pi}{2}\right)dt =$$

$$= \frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+n)}\,\delta_{nm} \qquad (n;\ m=0,\ 1,\ 2,\cdots).$$

Отсюда, ввиду определения (4.28) систем полиномов $\{A_n^{(\alpha)}(t)\}_0^\infty$ и $\{B_n^{(\alpha)}(t)\}_0^\infty$ следует наше утверждение.

2°. Интегральные представления наших систем непосредственно вытекают из теоремы 8 в силу их определений (4.28).

(б) Теперь введем в рассмотрение производящие функции наших систем

$$G_A^{(\alpha)}(t,\ z) = \sum_{n=0}^\infty z^n\,A_n^{(\alpha)}(t) \text{ и } G_B^{(\alpha)}(t,\ z) = \sum_{n=0}^\infty z^n\,B_n^{(\alpha)}(t). \tag{4.33}$$

Теорема 14. *При любом* $\alpha\in(-1,\ +\infty)$

$$G_A^{(\alpha)}(t,\ z) = \frac{1}{2}(1+z)^{-\frac{1+\alpha}{2}-i\sqrt{t}}\,\{(1-i\sqrt{z})^{2i\sqrt{t}}+(1+i\sqrt{z})^{2i\sqrt{t}}\},$$

$$G_B^{(\alpha)}(t,\ z) = \frac{1}{2\sqrt{tz}}(1+z)^{-\frac{1+\alpha}{2}-i\sqrt{t}}\,\{(1+i\sqrt{z})^{2i\sqrt{t}}-(1+i\sqrt{z})^{2i\sqrt{t}}\}. \tag{4.34}$$

Доказательство. В силу определения (4.28) наших полиномов из (4.24) и (4.25), заменив t на $\sqrt{t}$ и положив $\varphi=\pi/2$, мы получим при $|z|<1$

$$(1+iz)^{-\frac{1+\alpha}{2}+i\sqrt{t}}(1-iz)^{-\frac{1+\alpha}{2}-i\sqrt{t}}=G^{(\alpha)}\left(\sqrt{t},\ z;\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} z^{2k}A_k^{(\alpha)}(t)+\sqrt{t}\sum_{k=0}^{\infty} z^{2k+1}B_k^{(\alpha)}(t),\quad 0<t<+\infty. \qquad (4.35')$$

Заменив здесь z на $-z$, при $|z|<1$ имеем также

$$(1-iz)^{-\frac{1+\alpha}{2}+i\sqrt{t}}(1+iz)^{-\frac{1+\alpha}{2}-i\sqrt{t}}=G^{(\alpha)}\left(\sqrt{t},-z;\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} z^{2k}A_k^{(\alpha)}(t)-\sqrt{t}\sum_{k=0}^{\infty} z^{2k+1}B_k^{(\alpha)}(t),\ 0<t<+\infty. \qquad (4.35'')$$

Наконец, заменив в (4.35′) и (4.35″) z на $\sqrt{z}$, и затем сложением и вычитанием полученных таким образом тождеств мы приходим к формулам (4.34) теоремы.

(в) Теорема 15. *Справедливы рекуррентные формулы*

$$2k(2k-1)A_k^{(\alpha)}(t)+[8k^2+4k(\alpha-3)-3\alpha+5-4t]A_{k-1}^{(\alpha)}(t)+$$
$$+(2k+\alpha-2)(2k+\alpha-3)A_{k-2}^{(\alpha)}(t)=0 \qquad (4.36)$$
$$(n=0,\ 1,\ 2,\cdots),$$

$$2k(2k+1)B_k^{(\alpha)}(t)+[8k^2+4k(\alpha-1)-\alpha+1-4t]\ B_{k-1}^{(\alpha)}(t)+$$
$$+(2k+\alpha-1)(2k+\alpha-2)B_{k-2}^{(\alpha)}(t)=0\quad (n=0,\ 1,\ 2,\cdots), \qquad (4.37)$$

где следует положить

$$A_{-1}^{(0)}(t)=B_{-1}^{(0)}(t)\equiv 0,\ A_0^{(\alpha)}(t)=1,\ B_0^{(\alpha)}(t)=2.$$

Доказательство. Запишем рекуррентную формулу (4.27) теоремы 12 для значения параметра $\varphi=\pi/2$, заменив в ней t на $\sqrt{t}$

$$nP_n^{(\alpha)}\left(\sqrt{t},\frac{\pi}{2}\right)-2\sqrt{t}\ P_{n-1}^{(\alpha)}\left(\sqrt{t},\frac{\pi}{2}\right)+(n+\alpha-1)\ P_{n-2}^{(\alpha)}\left(\sqrt{t},\ \frac{\pi}{2}\right)=0 \qquad (4.27')$$
$$(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots).$$

Теперь, заметив, что согласно (4.28)

$$A_k^{(\alpha)}(t)=P_{2k}^{(\alpha)}\left(\sqrt{t},\frac{\pi}{2}\right)\ \text{и}\ \sqrt{t}\ B_k^{(\alpha)}(t)=P_{2k+1}^{(\alpha)}\left(\sqrt{t},\frac{\pi}{2}\right)$$
$$(k=0,\ 1,\ 2,\cdots) \qquad (4.28'')$$

из (4.27′) соответственно положив $n=2k$, $n=2(k-1)$, $n=2k+1$ и $n=2k-1$ приходим к следующим соотношениям:

$$2kA_k^{(\alpha)}(t)-2tB_{k-1}^{(\alpha)}(t)+(2k+\alpha-1)A_{k-1}^{(\alpha)}(t)=0, \qquad (4.38)$$

$$(2k-2)A_{k-1}^{(\alpha)}(t)-2tB_{k-2}^{(\alpha)}(t)+(2k+\alpha-3)A_{k-2}^{(\alpha)}(t)=0, \qquad (4.39)$$

$$(2k+1)B_k^{(\alpha)}(t)-2A_k^{(\alpha)}(t)+(2k+\alpha)B_{k-1}^{(\alpha)}(t)=0, \qquad (4.40)$$

$$(2k-1)B_{k-1}^{(\alpha)}(t)-2A_{k-1}^{(\alpha)}(t)+(2k+\alpha-2)B_{k-2}^{(\alpha)}(t)=0. \qquad (4.41)$$

Но из (4.38) и (4.39) находим значения

$$B_{k-1}(t)=\frac{1}{2t}\{2k\,A_k^{(\alpha)}(t)+(2k+\alpha-1)\,A_{k-1}^{(\alpha)}(t)\},$$

$$B_{k-2}(t)=\frac{1}{2t}\{(2k-2)\,A_{k-1}^{(\alpha)}(t)+(2k+\alpha-3)\,A_{k-2}^{(\alpha)}(t)\}.$$

Подставляя эти значения в (4.41) после надлежащей группировки его членов приходим к формулам (4.36).

Аналогично из (4.40) и (4.41) находим

$$A_k^{(\alpha)}(t)=\frac{1}{2}\{(2k+1)\,B_k^{(\alpha)}(t)+(2k+\alpha)\,B_{k-1}^{(\alpha)}(t)\},$$

$$A_{k-1}^{(\alpha)}(t)=\frac{1}{2}\{(2k-1)\,B_{k-1}^{(\alpha)}(t)+(2k+\alpha-2)\,B_{k-2}^{(\alpha)}(t)\}$$

и подстановкой в (4.38) после необходимых упрощений получим формулу (4.37).

Наконец, ввиду того, что $P_{-1}^{(\alpha)}\left(t,\dfrac{\pi}{2}\right)=0$, $P_0^{(\alpha)}\left(t,\dfrac{\pi}{2}\right)=1$, из (4.28) имеем $A_0^{(\alpha)}(t)\equiv 1$ и $B_{-1}^{(\alpha)}(t)\equiv 0$.

Далее, из соотношений (4.38) и (4.40), положив $k=0$, мы получим еще $A_{-1}^{(\alpha)}(t)\equiv 0$ и $B_0^{(\alpha)}(t)\equiv 2$.

(г) В заключение докажем теорему о замкнутости наших систем.

Теорема 16. *Системы функций*

$$\{\sqrt{w_1^{(\alpha)}(x)}\,A_n^{(\alpha)}(x)\}_0^\infty \text{ и } \{\sqrt{w_2^{(\alpha)}(x)}\,B_n^{(\alpha)}(x)\}_0^\infty$$

замкнуты в $L_2(0,+\infty)$.

Доказательство. Из теоремы 9 при $\varphi=\pi/2$, в частности, следует, что система $\{\sqrt{w^{(\alpha)}(t;\pi/2)}\,P_n^{(\alpha)}(x;\pi/2)\}_0^\infty$ замкнута в $L_2(-\infty,+\infty)$, где по (4.12)

$$w^{(\alpha)}\left(x;\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2^\alpha}{\pi}\left|\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}+ix\right)\right|^2, \tag{4.42}$$

очевидно является четной функцией на всей оси $-\infty<x<+\infty$.

Далее, поскольку согласно (4.28) полиномы $\{P_{2n}^{(\alpha)}(x;\pi/2)\}_0^\infty$ и $\{P_{2n+1}^{(\alpha)}(x;\pi/2)\}_0^\infty$, соответственно, четной и нечетной степени, то легко видеть, что системы функций

$$\left\{\sqrt{w^{(\alpha)}(x;\pi/2)}\,P_{2n}^{(\alpha)}\left(x;\frac{\pi}{2}\right)\right\}_0^\infty \text{ и } \{\sqrt{w^{(\alpha)}(x;\pi/2)}\,P_{2n+1}^{(\alpha)}(x;\pi/2)\}_0^\infty$$

замкнуты в отдельности, соответственно, в классах *четных и нечетных* функций из $L_2(-\infty,+\infty)$.

Пусть теперь $F(x)\in L_2(0,+\infty)$. Определим на всей оси $(-\infty,+\infty)$ две функции — четную и нечетную, соответственно, положив

$$f_\pm(t) = \begin{cases} t^{\frac{1}{2}} F(t^2), & t \in (0, +\infty) \\ \pm |t|^{\frac{1}{2}} F(t^2), & t \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

и заметив при этом, что $f_\pm(t) \in L_2(-\infty, +\infty)$, поскольку

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_\pm(t)|^2 \, dt = \int_0^{+\infty} |F(x)|^2 \, dx.$$

Отметим далее, что в силу (4.29′), (4.30′) и (4.44)

$w^{(\alpha)}(t; \pi/2) = w_1^{(\alpha)}(t^2)\,|t| = w_2^{(\alpha)}(t)\,|t|^{-1}$, $-\infty < t < +\infty$ и принимая во внимание формулы (4.28), будем иметь

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| f_+(t) - \sum_{k=0}^{n} a_k \sqrt{w^{(\alpha)}(t; \pi/2)}\, P_{2k}^{(\alpha)}\left(t; \frac{\pi}{2}\right) \right|^2 dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| F(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \sqrt{w_1^{(\alpha)}(x)}\, A_k^{(\alpha)}(x) \right|^2 dx \tag{4.43′}$$

и аналогично

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| f_-(t) - \sum_{k=0}^{n} b_k \sqrt{w^{(\alpha)}(t; \pi/2)}\, P_{2k+1}^{(\alpha)}\left(t; \frac{\pi}{2}\right) \right|^2 dt =$$

$$= \int_0^{\infty} \left| F(x) - \sum_{k=0}^{n} b_k \sqrt{w_2^{(\alpha)}(x)}\, B_k^{(\alpha)}(x) \right|^2 dx \tag{4.43″}$$

для произвольных значений коэффициентов $\{a_k\}_0^n$ и $\{b_k\}_0^n$.

Наконец, поскольку нижние грани интегралов, стоящих в левых частях (4.43′) и (4.43″) равны нулю, то теорема доказана.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 29.XI.1979

Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ. Որոշ օրթոգոնալ սիստեմների ներկայացման և փակության մասին (ամփոփում)

Ինչպես լավ հայտնի է (տես [1], գլ. 2-րդ), փակության և օրթոգոնալության հատկությունները մնում են ինվարիանտ ամբողջ L_2 տարածության այնպիսի ձևափոխությունների ժամանակ, որոնց դեպքում պահպանվում է ցանկացած ֆունկցիայի մոդուլի քառակուսու ինտեգրալը։

Ներկա հոդվածը նվիրված է անալիտիկ ֆունկցիաների մի քանի սիստեմների ներկայացման և փակության հարցերի ուսումնասիրությանը նշված մոտեցմամբ։

Հատկապես, այդ եղանակի օգնությամբ այստեղ շարադրվում են հեղինակի մի քանի արդյունքներ, որոնք հրապարակված են եղել առանց ապացույցի նրա երկու վաղ հոդվածներում [2], [3]։

Բացի դրանից միևնույն եղանակով շարադրվում են նաև այլ հեղինակների մի քանի վաղեմի արդյունքներ. հնարավորին չափ ամենաընդհանուր ձևակերպումներով, սկսած Մյունց-Սասսի դասական թեորեմից ([4], [1]) և վերջացրած Պոլլաչեկի արդյունքներով ամբողջ իրական առանցքի վրա կշռի ներկայությամբ օրթոգոնալ բազմանդամների մասին ([5], [6])։

Վերջապես, նշենք, որ այլ հեղինակներին պատկանող արդյունքների ապացույցները, այստեղ շարադրված են հիմնականում զգալիորեն այլ եղանակներով։

M. M. DJRBASHIAN. *Representation and closedness of some orthogonal systems* (summary)

It is well khown ([1], chapter II) that the closedness and orthogonality properties are invariant with respect to any linear map of L_2 in itself, provided the modul square integral of each function is preserved.

The paper is devoted to further systematic applications of this approach to the study of the questions of representation and of closedness of a number of analytic fnnctions systems. A number of results announced earlier ([2], [3]) without proofs is presented from this point of view. A number of other results ranging from the classical Muntz Sass theorem ([4], [1]) to the results of Pollatcheck on polynoms which are weighted—orthogonal on real axis are also presented from the same standpoint. The results of other authers are proved in the paper mainly by different methods.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. Винер, Р. Пэли.* Преобразование Фурье в комплексной области, М., «Наука», 1964
2. *М. М. Джрбашян.* О пополнении и замыкании неполной системы функций $\{e^{-\lambda_k^r} x^{\lambda_k-1}\}$, ДАН СССР, 141, № 3, 1961.
   стем, ДАН Арм. ССР, 35, № 1, 1962.
4. *Q. Szasz.* Über die Approximation statiger Funktionen durch lineare Aggregate von Potenzen, Math. Annalen, Bd. 77, 1916.
5. *F. Pollaczek.* Sur une famille de polynomes ortogonaux oui continent les polynomes d'Hermite et de Lagnure comme cas limites, Comptes Rendus de l'Acad. des Sc., Paris, 230, 1950.
6. *I. Сегё.* Ортогональные многочлены. Добавление, т. 396, М., 1962.
7. *М. М. Джрбашян* и *А. Е. Аветисян.* Интегральные представления некоторых классов функций, аналитических в области угла, Сиб. мат. журнал, 1, № 3, 1960, 383—426.
8. *М. М. Джрбашян* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., «Наука», 1966.
9. *Clasine van Winter.* Fredholm equations on a Hilbert space of analytical functions, Trans. of the Amer. Math. Soc., 162, 104—124.
10. *F. Malmquist.* Sur la d'une classe de fonctions analytiques par leurs valeurs dans un ensemble donne de points. Comptes rendus sixieme congres (1925) des math Scand., Kopenhagen, 1926, 253—259.
11. *S. Takenaker.* On the orthogonal functions and a new formula of interpolation, Japan. J. Math., 2, 1925, 129—145.
12. *Дж. Уолш.* Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области, М., 1961.
13. *М. М. Джрбашян* О пополнении неполной системы Мальмквиста на вещественной оси, ДАН Арм. ССР, 35, № 2, 1962.

14. *М. М. Джрбашян*. Биортогональные системы рациональных функций и наилучшее приближение ядра Коши на вещественной оси. Мат. сб., 95 (137), № 3 (11), 1974, 418—444.
15. *К. Гофман*. Банаховы пространства аналитических функций. М., 1975.
16. *P. Duren*. Theory of H^p Spaces, Academic Press, New York—London, 1970.
17. *A. Erdely*. Note on inversion formula for the Laplace transformation. The Journal of the London Math. Soc., 38. 1943, 72—77.
18. *Г. В. Бадалян*. Обобщение многочленов Лежандра и некоторые их применения. Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат., ест. и техн. наук, VIII, № 5, 1955, и IX, № 1, 1956.
19. *А. О. Гельфонд*. О квазиполиномах наименее отклоняющихся от нуля на отрезке [0, 1]. Изв. АН СССР, сер. матем., 15, 1951, 9—16.
20. *А. О. Гельфонд*. К вопросу об обобщенных полиномах С. Н. Бернштейна, Изв. АН СССР, сер. матем., 14, 1950, 413—420.
21. *F. Hausdorf*. Summationmethoden und Momentenfolgen, 11, Math. Zeitshrift, 9, 1921, 11 280—299.
22. *Э. Апарасио Бернардо*. О наименьшем отклонении от нуля квазиполиномов с целыми алгебраическими коэффициентами, Вест. Московского ун-та, № 2, 1962, 21—32.
23. *C. H. Müntz*. Über Approximation von Weierstrass, Schwaz's Festschrift, Berlin, 1914, 303—312.
24. *O. Szasz*. On closed sets of rational functions, Annali di Matematica, 34, 1953, 422—445.
25. *H. Bateman*. Higer transcendental functions, 2, New York—Toronto—London, 1953, 220—221.
26. *G. Sansone*. Orthogonal Functions. Interscience publishers, LTD., London, 1959.