ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIV, № 6, 1979 Математика

И. Г. ХАЧАТРЯН

О СУЩЕСТВОВАНИИ ОПЕРАТОРА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ, СОХРАНЯЮЩЕГО АСИМПТОТИКУ РЕШЕНИЙ

В настоящей работе рассматриваются следующие дифференциальные уравнения порядка $n \geqslant 2$:

$$y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-2} p_{n-2-k}(x)\, y^{(k)} = \lambda^n y, \quad 0 < x < \infty, \tag{1}$$

$$\varphi^{(n)} = \lambda^n \varphi. \tag{2}$$

При некоторых ограничениях на коэффициенты $p_k(x)$ выводится формула

$$y(x, \lambda) = e^{\lambda x} + \int_x^\infty e^{\lambda t} L(x, t)\, dt, \ \operatorname{Re} \lambda \leqslant 0, \ 0 \leqslant x < \infty, \tag{3}$$

выражающая решение $y(x, \lambda)$ уравнения (1) через решение $e^{\lambda x}$ уравнения (2), где ядро $L(x, t)$ не зависит от параметра λ. В случае $n=2$ формула (3) была получена Б. Я. Левиным [1] (см. также [2]). При выводе формулы (3) здесь применяется метод, который был использован автором в работе [3] для получения оператора преобразования другого вида.

Введем следующие обозначения:

$$q_k(x) = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{k-\nu} C_{n-2-\nu}^{k-\nu}\, p_\nu^{(k-\nu)}(x), \ k = 0, 1, \cdots, n-2, \tag{4}$$

$$\omega_s = e^{i \frac{2\pi}{n} s}, \ s = 0, 1, \cdots, n-1, \tag{5}$$

$$\varphi(x, \lambda) = \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-1} e^{\omega_s \lambda x}. \tag{6}$$

Функция $\varphi(x, \lambda)$ — решение уравнения (2), удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \ \varphi^{(\nu)}(0, \lambda) = 0, \ \nu = 1, 2, \cdots, n-1. \tag{7}$$

Лемма. *Пусть коэффициенты уравнения* (1) *такие, что функции $q_k(x)$, определенные формулой* (4), *удовлетворяют условиям*

$$\int_0^{\infty} x^{k+1} |q_k(x)|\, dx < \infty, \; k = 0, 1, \cdots, n-2. \tag{8}$$

Тогда при всех значениях параметра λ из сектора

$$S = \left\{ \lambda;\ |\arg \lambda| \geqslant \pi - \frac{\pi}{n} \right\} \tag{9}$$

уравнение (1) *имеет решение* $y(x, \lambda)$, *удовлетворяющее интегральному уравнению*

$$y(x, \lambda) = e^{\lambda x} + \frac{1}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-2} \int_x^{\infty} \varphi^{(n-1-k)}(x - t, \lambda)\, q_k(t)\, y(t, \lambda)\, dt. \tag{10}$$

Функция $y(x, \lambda)$ *при каждом фиксированном* x $(0 \leqslant x < \infty)$ *регулярна по* λ *в секторе* S *и непрерывна вплоть до границы. Кроме того, равномерно относительно* $\lambda \in S$

$$\lim_{x \to \infty} y(x, \lambda)\, e^{-\lambda x} = 1. \tag{11}$$

Доказательство. Применив метод последовательных приближений к уравнению (10), получим

$$y(x, \lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} R_j(x, \lambda), \tag{12}$$

где функции $R_j(x, \lambda)$ определяются из рекуррентных соотношений

$$R_0(x, \lambda) = e^{\lambda x},$$

$$R_{j+1}(x, \lambda) = \frac{1}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-2} \int_x^{\infty} \varphi^{(n-1-k)}(x - t, \lambda)\, q_k(t)\, R_j(t, \lambda)\, dt, \; j = 0, 1, 2, \cdots. \tag{13}$$

Покажем, что ряд (12) сходится равномерно в области $0 \leqslant x < \infty$, $\lambda \in S$. Если обозначить

$$\tilde{R}_j(x, \lambda) = e^{-\lambda x} R_j(x, \lambda), \; j = 0, 1, 2, \cdots$$

и учесть формулы

$$\frac{1}{\lambda^n} \varphi^{(n-1-k)}(x, \lambda) = \frac{1}{k!} \int_0^x (x - u)^k \varphi(u, \lambda)\, du, \; k = 0, 1, \cdots, n-2,$$

то из (13) получим

$$\tilde{R}_{j+1}(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} \int_x^{\infty} q_k(t) \tilde{R}_j(t, \lambda)\, e^{\lambda(t-x)} \int_0^{x-t} (x-t-u)^k \varphi(u, \lambda)\, du dt. \tag{14}$$

Однако при $0 \leqslant v \leqslant x$ и $\lambda \in S$

$$\operatorname{Re} [\lambda (x - v\omega_s)] \leqslant 0, \ s = 0, 1, \cdots, n-1,$$

поэтому в (14)

$$|\varphi (u, \lambda) e^{\lambda (t-x)}| \leqslant 1. \tag{15}$$

В силу (15) из формулы (14) находим

$$|\widetilde{R}_{j+1} (x, \lambda)| \leqslant \int_x^{\infty} q (t) |\widetilde{R}_j (t, \lambda)| \, dt, \ j = 0, 1, 2, \cdots, \tag{16}$$

где

$$q (x) = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} |q_k (x)|.$$

Поскольку $\widetilde{R}_0 (x, \lambda) = 1$, то из (16) по индукции получим

$$|\widetilde{R}_j (x, \lambda)| \leqslant \frac{1}{j!} \left\{ \int_x^{\infty} q (t) \, dt \right\}^j, \ j = 0, 1, 2, \cdots.$$

Поэтому ряд (12) сходится равномерно и определяет решение $y (x, \lambda)$ интегрального уравнения (10), которое удовлетворяет также соотношению (11). Теперь убедимся, что функция $y (x, \lambda)$ удовлетворяет уравнению (1). Действительно, если тождество (10) продифференцировать n раз и учесть, что функция $\varphi (x, \lambda)$ является решением уравнения (2) с начальными условиями (7), то получим формулу

$$y^{(n)} (x, \lambda) = - \sum_{k=0}^{n-2} y^{(n-2-k)} (x, \lambda) \sum_{\nu=0}^{k} C_{n-2-\nu}^{k-\nu} q_\nu^{(k-\nu)} (x) +$$

$$+ \lambda^n e^{\lambda x} + \sum_{k=0}^{n-2} \int_x^{\infty} \varphi^{(n-1-k)} (x-t, \lambda) \, q_k (t) \, y (t, \lambda) \, dt. \tag{17}$$

Однако

$$p_k (x) = \sum_{\nu=0}^{k} C_{n-2-\nu}^{k-\nu} q_\nu^{(k-\nu)} (x), \ k = 0, 1, \cdots, n-2. \tag{18}$$

В силу (10) и (18) формула (17) принимает вид (1). Лемма доказана.

Пусть T — открытый сектор на комплексной плоскости, а l — луч, лежащий в T и проходящий через вершину сектора. Обозначим через $H_1 (T)$ класс функций $f (z)$, регулярных в секторе T и удовлетворяющих условию

$$\sup_l \int_l |f (z)| \, |dz| < \infty.$$

Ниже используются следующие свойства функций класса $H_1(T)$ (см. [4]—[7]): пусть $f(z) \in H_1(T)$, тогда почти всюду на границе Γ сектора T существуют граничные значения функции $f(z)$, которые на Γ определяют суммируемую функцию $f(\zeta)$ $(\zeta \in \Gamma)$, причем

$$\int_{\Gamma} f(\zeta)\, d\zeta = 0, \tag{19}$$

кроме того, справедлива интегральная формула Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad z \in T. \tag{20}$$

Предположим теперь, что функции $q_k(z)$, определенные формулой (4), регулярны в секторе

$$D = \left\{ z;\ |\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} \right\} \tag{21}$$

и удовлетворяют условиям

$$\int_0^\infty \sigma_k(x)\, dx < \infty, \quad k = 0, 1, \cdots, n-2, \tag{22}$$

где

$$\sigma_k(x) = \sup_{\tau \in D;\ \mathrm{Re}\,\tau = 1} \int_x^\infty (u - x)^k\, |q_k(u\tau)|\, du.$$

Введем монотонно убывающие функции

$$\sigma(x) = \frac{n-1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{2^{k+1}}{k! \left(\sin \frac{\pi}{n}\right)^{k+1}}\, \sigma_k(x),$$

$$\bar{\sigma}(x) = \int_x^\infty \sigma(u)\, du.$$

Некоторые утверждения будут установлены при более ограничительных условиях

$$\int_0^\infty x^{k+1} \beta_k(x)\, dx < \infty, \quad k = 0, 1, \cdots, n-2, \tag{23}$$

где

$$\beta_k(x) = \sup_{\tau \in D;\ \mathrm{Re}\,\tau = 1} |q_k(x\tau)|. \tag{24}$$

Очевидно, что имеют место неравенства

$$\sigma_k(x) \leqslant \int_x^\infty (u - x)^k\, \beta_k(u)\, du, \tag{25}$$

$$\sup_{\tau\in D;\ \operatorname{Re}\tau=1}\int_{0}^{\infty} x^{k+1}|q_k(x\tau)|\,dx\leqslant(k+1)\int_{0}^{\infty}\sigma_k(x)\,dx\leqslant\int_{0}^{\infty}x^{k+1}\beta_k(x)\,dx,$$

$$k=0,\ 1,\cdots,\ n-2,$$

поэтому при условиях (22) или (23) условия (8) доказанной леммы заведомо выполнены.

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 1. *Пусть коэффициенты уравнения* (1) *такие, что функции $q_k(x)$, определенные формулой* (4), *регулярны в секторе D и удовлетворяют условиям* (22). *Тогда при всех значениях параметра λ из полуплоскости $\Lambda=\{\lambda;\ \operatorname{Re}\lambda<0\}$ уравнение* (1) *имеет решение $y(x,\lambda)$, представимое в виде*

$$y(x,\lambda)=e^{\lambda x}+\int_{x}^{\infty}e^{\lambda t}K(x,\ t-x)\,dt,\ 0\leqslant x<\infty,\tag{26}$$

где ядро $K(z,\xi)$ $(z\in D;\ 0\leqslant\xi<\infty)$ при каждом фиксированном ξ регулярно по z в секторе D и удовлетворяет неравенству

$$|K(z,\xi)|\leqslant\frac{1}{2}\,\sigma\left(\operatorname{Re}z+\frac{\xi}{2}\right)\exp\left\{\tilde\sigma(\operatorname{Re}z)-\tilde\sigma\left(\operatorname{Re}z+\frac{\xi}{2}\right)\right\}.\tag{27}$$

Если же выполнены условия (23), *то функция $y(x,\lambda)$ при каждом фиксированном x $(0\leqslant x<\infty)$ имеет непрерывную производную по λ во всех точках полуплоскости Λ за исключением, быть может, точки $\lambda=0$.*

Замечание 1. Согласно вышеуказанным свойствам ядра $K(z,\xi)$ формулу (26) можно написать в виде

$$y(z,\lambda)=e^{\lambda z}\left\{1+\int_{0}^{\infty}e^{\lambda\xi}K(z,\xi)\,d\xi\right\},\ z\in D.\tag{28}$$

В силу условий (22) из оценки (27) следует, что

$$\int_{0}^{\infty}|K(z,\xi)|\,d\xi<\infty.\tag{29}$$

Ниже, при условиях (23), устанавливается также неравенство

$$\int_{0}^{\infty}\left|\frac{\partial}{\partial\xi}K(z,\xi)\right|\xi d\xi<\infty.\tag{30}$$

Доказывается, что равномерно относительно $z\in D$

$$\lim_{\xi\to\infty}\xi K(z,\xi)=0,\tag{31}$$

$$\lim_{\xi\to 0} \xi K(z, \xi) = 0. \tag{32}$$

Кроме того, используя неравенства (29), (30) и соотношения (31), (32), из (28) выводится формула

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} y(z, \lambda) = ze^{\lambda z} \left\{1 + \int_0^\infty e^{\lambda\xi} K(z, \xi)\, d\xi \right\} -$$

$$-\frac{1}{\lambda} e^{\lambda z} \int_0^\infty e^{\lambda\xi} \left\{K(z; \xi) + \xi \frac{\partial}{\partial\xi} K(z, \xi)\right\} d\xi. \tag{33}$$

Отметим, что последнее утверждение теоремы непосредственно следует из формулы (33).

Замечание 2. При $n = 2$ сектор D превращается в полуось $[0, \infty)$, а уравнение (1) и условия (22), (23) соответственно принимают вид

$$y'' + p(x)\, y = \lambda^2 y,\ 0 \leqslant x < \infty, \tag{*}$$

$$\int_0^\infty x\,|p(x)|\, dx < \infty. \tag{**}$$

Для уравнения (*) при условии (**) вывод формулы (26) и неравенства (27) содержится также в монографии В. А. Марченко [2]. Однако здесь дополнительно устанавливается неравенство (30) и выводится формула (33).

Замечание 3. При $\lambda \in S$ в виде (26) представляется именно то решение уравнения (1), которое удовлетворяет также интегральному уравнению (10). В связи с этим отметим, что представление (26) достаточно установить для $\lambda \in S$ (при $n=2$ сектор S и полуплоскость Λ совпадают). Действительно, тогда в силу (29) правая часть формулы (26) определяет функцию $y(x, \lambda)$, регулярную по λ в Λ и непрерывную вплоть до границы. Однако функция $K(z, \xi)$ по переменной z принадлежит классу $H_1(D)$, поэтому, согласно (20), при $n > 2$ имеем

$$K(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{K(\zeta, t)}{\zeta - x}\, d\zeta,\ 0 < x < \infty, \tag{34}$$

где Γ — граница сектора D. Используя неравенство (27), из формулы (34) легко получаются оценки

$$\left|\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} K(x, t)\right| \leqslant \frac{c_\nu}{x^\nu}\, \sigma\left(\frac{t}{2}\right),\ \nu = 1, 2, 3, \cdots,$$

где c_ν — некоторые постоянные. Следовательно, при $x > 0$

$$\int_0^\infty \left|\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} K(x, t)\right| dt < \infty,\ \nu = 1, 2, 3, \cdots. \tag{35}$$

В силу (35) из формулы (28) следует, что функции $y^{(\nu)}(x, \lambda)$ при $0 < x < \infty$ тоже регулярны по λ в Λ и непрерывны вплоть до границы. Поэтому так определенная функция $y(x, \lambda)$ удовлетворяет уравнению (1) при всех $\lambda \in \Lambda$.

Доказательство теоремы. Пусть $y(x, \lambda)$—решение уравнения (1), удовлетворяющее интегральному уравнению (10). Тогда функцию $y(x, \lambda)$ можно представить в виде ряда (12). Методом индукции докажем, что функции $R_j(x, \lambda)$ допускают представление

$$R_j(x, \lambda) = \int_x^{\infty} e^{\lambda t} K_j(x, t-x)\, dt, \quad j = 1, 2, 3, \cdots, \tag{36}$$

где ядра $K_j(z, \xi)$ $(z \in D;\ 0 \leqslant \xi < \infty)$ регулярны по z в секторе D и удовлетворяют неравенствам

$$|K_j(z, \xi)| \leqslant \frac{1}{2}\sigma\left(\operatorname{Re} z + \frac{\xi}{2}\right)\frac{1}{(j-1)!}\left\{\bar{\sigma}(\operatorname{Re} z) - \bar{\sigma}\left(\operatorname{Re} z + \frac{\xi}{2}\right)\right\}^{j-1}, \tag{37}$$

$$j = 1, 2, 3, \cdots.$$

С учетом формул

$$\frac{1}{\lambda^n} e^{\lambda t} \varphi^{(n-1-k)}(x-t, \lambda) =$$

$$= \frac{1}{k!\, n}\sum_{s=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\omega_s} - 1\right)^{k+1}\int_x^t (t-u)^k\, e^{\lambda[x\omega_s + u(1-\omega_s)]}\, du, \tag{38}$$

$$k = 0, 1, \cdots, n-2,$$

из (13) при $j = 0$ имеем

$$R_1(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!\, n}\sum_{s=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\omega_s} - 1\right)^{k+1} \times$$

$$\times \int_x^{\infty} q_k(t) \int_x^t (t-u)^k\, e^{\lambda[x\omega_s + u(1-\omega_s)]}\, du\, dt. \tag{39}$$

Если в (39) поменять порядок интегрирования и сделать замену переменного $\zeta = x\omega_s + u(1-\omega_s)$, то получим

$$R_1(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!\, n}\sum_{s=1}^{n-1}\frac{(1-\omega_s)^k}{\omega_s^{k+1}} \times$$

$$\times \int_{l_s(x)} e^{\lambda\zeta} \int_{\frac{\zeta - x\omega_s}{1-\omega_s}}^{\infty}\left(t - \frac{\zeta - x\omega_s}{1-\omega_s}\right)^k q_k(t)\, dt\, d\zeta, \tag{40}$$

где $l_s(x)$ — луч $\zeta = x + \alpha(1-\omega_s)$ $(0 \leqslant \alpha < \infty)$. Заметим, что лучи $l_s(x)$ $(s = 1, 2, \cdots, n-1)$ содержатся в секторе D. Обозначим через $T_s(x)$ сектор, содержащийся в D, ограниченный лучом $l_s(x)$ и частью $[x, \infty)$ вещественной оси. Если $\zeta \in D$ и $\lambda \in S$, то $\mathrm{Re}\,(\lambda\zeta) \leqslant 0$. Кроме того, если $\zeta \in T_s(x)$, то $(1-\omega_s)^{-1}(\zeta - x\omega_s) \in T_{n-s}(x)$. Поэтому, в силу (22), относительно переменной ζ имеем*

$$\left\{ e^{\lambda\zeta} \int\limits_{\frac{\zeta - x\omega_s}{1-\omega_s}}^{x} \left(t - \frac{\zeta - x\omega_s}{1-\omega_s}\right)^k q_k(t)\,dt \right\} \in H_1(T_s(x)).$$

Но тогда, согласно (19), формулу (40) можно привести к виду

$$R_1(x, \lambda) = \int\limits_x^{\infty} e^{\lambda t} K_1(x, t-x)\,dt,$$

где ядро $K_1(z, \xi)$ $(z \in D;\ 0 \leqslant \xi < \infty)$ определяется по формуле

$$K_1(z, \xi) = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!\,n} \sum_{s=1}^{n-1} \frac{(1-\omega_s)^k}{\omega_s^{k+1}} \int\limits_{\frac{\xi}{1-\omega_s}+z}^{\infty} \left(\zeta - z - \frac{\xi}{1-\omega_s}\right)^k q_k(\zeta)\,d\zeta. \qquad (41)$$

Заметим, что $|1-\omega_s| \leqslant 2$, $\mathrm{Re}\,(1-\omega_s)^{-1} = \dfrac{1}{2}$ и при $z \in D$, $0 \leqslant \xi < \infty$

$$\left| z + \frac{\xi}{1-\omega_s} \right| \left(\mathrm{Re}\, z + \frac{\xi}{2} \right)^{-1} \leqslant \frac{1}{\sin\dfrac{\pi}{n}}, \quad s = 1, 2, \cdots, n-1. \qquad (42)$$

Поэтому из (41) заменой переменного

$$\zeta = u\left(z + \frac{\xi}{1-\omega_s}\right)\left(\mathrm{Re}\, z + \frac{\xi}{2}\right)^{-1}$$

легко получается оценка

$$|K_1(z, \xi)| \leqslant \frac{1}{2}\,\sigma\left(\mathrm{Re}\, z + \frac{\xi}{2}\right).$$

Предположим теперь, что при некотором j $(j \geqslant 1)$ формула (36) и неравенство (37) верны. Тогда, согласно (13), (36) и (38) имеем

$$R_{j+1}(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!\,n} \sum_{s=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\omega_s} - 1\right)^{k+1} G_{k,s}(x, \lambda), \qquad (43)$$

---

* Впредь в интегралах вида $\int\limits_z^{\infty} f(w)\,dw$ переменная интегрирования w меняется вдоль луча $w = \alpha z$ $(1 \leqslant \alpha < \infty)$.

где

$$G_{k,s}(x,\lambda)=\int_x^{\infty}q_k(t)\int_0^{\infty}K_j(t,v)\int_x^t(t-u)^k\,e^{\lambda[x\omega_s+u(1-\omega_s)+v]}\,dudvdt. \qquad (44)$$

Меняя в (44) порядок интегрирования, получим

$$G_{k,s}(x,\lambda)=\int_0^{\infty}\int_x^{\infty}e^{\lambda[x\omega_s+u(1-\omega_s)+v]}\int_u^{\infty}(t-u)^k\,q_k(t)\,K_j(t,v)\,dtdudv. \qquad (45)$$

Если в (45) сделать замену переменного $\zeta=x\omega_s+u(1-\omega_s)+v$ и повторить сделанные выше рассуждения, то формула (45) приводится к виду

$$G_{k,s}(x,\lambda)=\frac{1}{1-\omega_s}\int_0^{\infty}\int_{x+v}^{\infty}e^{\lambda\zeta}\int_{\frac{\zeta-v-x\omega_s}{1-\omega_s}}^{\infty}\left(t-\frac{\zeta-v-x\omega_s}{1-\omega_s}\right)^k q_k(t)K_j(t,v)\,dtd\zeta dv. \qquad (46)$$

Меняя в (46) порядок интегрирования и учитывая (43), для функции $R_{j+1}(x,\lambda)$ получим формулу

$$R_{j+1}(x,\lambda)=\int_x^{\infty}e^{\lambda t}K_{j+1}(x,t-x)\,dt.$$

где ядро $K_{j+1}(z,\xi)$ $(z\in D;\ 0\leqslant\xi<\infty)$ определяется по формуле

$$K_{j+1}(z,\xi)=\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!\,n}\sum_{s=1}^{n-1}\frac{(1-\omega_s)^k}{\omega_s^{k+1}}\int_0^{\xi}\int_{\frac{\xi-u}{1-\omega_s}+z}^{\infty}\left(\zeta-z-\frac{\xi-u}{1-\omega_s}\right)^k\times$$

$$\times\, q_k(\zeta)\,K_j(u,\zeta)\,d\zeta du. \qquad (47)$$

Согласно предположению, функция $K_j(z,\xi)$ удовлетворяет неравенству (37), поэтому при $v\geqslant \operatorname{Re} z+\frac{1}{2}(\xi-u)$ и $\tau\in D$, $\operatorname{Re}\tau=1$ имеем

$$|K_j(v\tau,u)|\leqslant\frac{1}{2}\,\sigma\left(v+\frac{u}{2}\right)\frac{1}{(j-1)!}\left\{\bar\sigma(v)-\bar\sigma\left(v+\frac{u}{2}\right)\right\}^{j-1}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\,\sigma\left(\operatorname{Re} z+\frac{\xi}{2}\right)\frac{1}{(j-1)!}\left\{\bar\sigma\left(\operatorname{Re} z+\frac{\xi-u}{2}\right)-\bar\sigma\left(\operatorname{Re} z+\frac{\xi}{2}\right)\right\}^{j-1}. \qquad (48)$$

Если в (47) сделать замену переменного

$$\zeta=v\left(z+\frac{\xi-u}{1-\omega_s}\right)\left(\operatorname{Re} z+\frac{\xi-u}{2}\right)^{-1}$$

и учесть неравенства (42), (48), то для функции $K_{j+1}(z, \xi)$ получим оценку

$$|K_{j+1}(z, \xi)| \leqslant \frac{1}{2}\sigma\left(\operatorname{Re} z+\frac{\xi}{2}\right)\frac{1}{(j-1)!}\int\limits_{\operatorname{Re} z}^{\frac{\xi}{2}+\operatorname{Re} z}\sigma(u)\left\{\tilde{\sigma}(u)-\right.$$

$$\left.-\tilde{\sigma}\left(\operatorname{Re} z+\frac{\xi}{2}\right)\right\}^{j-1}du=\frac{1}{2}\sigma\left(\operatorname{Re} z+\frac{\xi}{2}\right)\frac{1}{j!}\times$$

$$\times\left\{\tilde{\sigma}(\operatorname{Re} z)-\tilde{\sigma}\left(\operatorname{Re} z+\frac{\xi}{2}\right)\right\}^{j}.$$

Таким образом, формулы (36) и неравенства (37) доказаны. Если формулы (36) просуммировать по значениям j и положить

$$K(z, \xi)=\sum_{j=1}^{\infty}K_j(z, \xi), \tag{49}$$

а также учесть (12), то получим формулу (26). Неравенство (27) получается суммированием неравенств (37). Суммируя также формулы (47) и учитывая (41), (49), для функции $K(z, \xi)$ получим следующее интегральное уравнение:

$$K(z, \xi)=\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!\,n}\sum_{s=1}^{n-1}\frac{(1-\omega_s)^k}{\omega_s^{k+1}}\int\limits_{\frac{\xi}{1-\omega_s}+z}^{\infty}\left(\zeta-z-\frac{\xi}{1-\omega_s}\right)^k q_k(\zeta)\,d\zeta+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!\,n}\sum_{s=1}^{n-1}\frac{(1-\omega_s)^k}{\omega_s^{k+1}}\int\limits_0^{\xi}\int\limits_{\frac{\xi-u}{1-\omega_s}+z}^{\infty}\left(\zeta-z-\frac{\xi-u}{1-\omega_s}\right)^k q_k(\zeta)\,K(\zeta, u)\,d\zeta du. \tag{50}$$

Теперь установим неравенство (30), предполагая, что выполнены условия (23). Обозначим

$$M(z, \xi)=\frac{\partial}{\partial\xi}K(z, \xi)+\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n-1}\frac{1}{\omega_s(1-\omega_s)}\,q_0\left(z+\frac{\xi}{1-\omega_s}\right). \tag{51}$$

Если в уравнении (50) в повторном интеграле сделать замену переменного $u=\xi-v$ и полученную формулу продифференцировать по ξ, а затем снова сделать замену переменного $v=\xi-u$, то для функции $M(z, \xi)$ получим следующее интегральное уравнение:

$$M(z, \xi)=N(z, \xi)+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!\,n}\sum_{s=1}^{n-1}\frac{(1-\omega_s)^k}{\omega_s^{k+1}}\int\limits_0^{\xi}\int\limits_{\frac{\xi-u}{1-\omega_s}+z}^{\infty}\left(\zeta-z-\frac{\xi-u}{1-\omega_s}\right)^k q_k(\zeta)\,M(\zeta, u)\,d\zeta du, \tag{52}$$

где

$$N(z,\xi)=\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{(k-1)!\,n}\sum_{s=1}^{n-1}\frac{(1-\omega_s)^{k-1}}{\omega_s^{k+1}}\int\limits_{\frac{\xi}{1-\omega_s}+z}^{\infty}\left(\zeta-z-\frac{\xi}{1-\omega_s}\right)^{k-1}q_k(\zeta)\,d\zeta+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!\,n}\sum_{s=1}^{n-1}\frac{(1-\omega_s)^k}{\omega_s^{k+1}}\left\{\int\limits_{\frac{\xi}{1-\omega_s}+z}^{\infty}\left(\zeta-z-\frac{\xi}{1-\omega_s}\right)^k q_k(\zeta)\,K(\zeta,0)\,d\zeta-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{\omega_j(1-\omega_j)}\int\limits_0^{\xi}\int\limits_{\frac{\xi-u}{1-\omega_s}+z}^{\infty}\left(\zeta-z-\frac{\xi-u}{1-\omega_s}\right)^k q_k(\zeta)\,q_0\left(\zeta+\frac{u}{1-\omega_j}\right)d\zeta\,du\right\}. \tag{53}$$

Функцию $\alpha(x,t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2x;\ 0\leqslant x<\infty)$ определим по формуле

$$\alpha(x,t)=\frac{n-1}{n}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{2^{k-1}}{(k-1)!\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^k}\int\limits_x^{\infty}(u-x)^{k-1}\beta_k(u)\,du+$$

$$+\frac{n-1}{n}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{2^{k-1}}{k!\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^{k+1}}\int\limits_x^{\infty}(u-x)^k\beta_k(u)\,\sigma(u)\,du+$$

$$+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\sum_{k=0}^{n-2}\frac{2^{k-1}}{k!\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^{k+2}}\int\limits_0^t\int\limits_x^{\infty}(u-x)^k\beta_k\left(u-\frac{v}{2}\right)\beta_0(u)\,du\,dv, \tag{54}$$

где функции $\beta_k(x)$ определены в (24). Очевидно, что функция $\alpha(x,t)$ по первому аргументу монотонно убывает, а по второму аргументу монотонно возрастает. Используя неравенства (27), (42) и

$$|1-\omega_j|=2\sin\frac{\pi}{n}j\geqslant 2\sin\frac{\pi}{n},\quad j=1,2,\cdots,n-1,$$

из (53) получим

$$|N(z,\xi)|\leqslant\alpha\left(\operatorname{Re}z+\frac{\xi}{2},\xi\right).$$

Если к уравнению (52) применить метод последовательных приближений, то, как и при выводе неравенства (27), для функции $M(z,\zeta)$ получим оценку

$$|M(z,\xi)|\leqslant\alpha\left(\operatorname{Re}z+\frac{\xi}{2},\xi\right)\exp\left\{\tilde\sigma(\operatorname{Re}z)-\tilde\sigma\left(\operatorname{Re}z+\frac{\xi}{2}\right)\right\}.$$

Отсюда, с учетом (51), имеем

$$\left|\frac{\partial}{\partial\xi}K(z,\xi)\right| < \frac{n-1}{2n\sin\dfrac{\pi}{n}}\beta_0\left(\operatorname{Re} z+\frac{\xi}{2}\right)+a\left(\operatorname{Re} z+\frac{\xi}{2},\xi\right)e^{\overline{\sigma}(\operatorname{Re} z)}. \tag{55}$$

Нетрудно убедиться в справедливости следующих формул:

$$\int_0^\infty \xi \int_{\frac{\xi}{2}+x}^\infty \left(u-x-\frac{\xi}{2}\right)^{k-1}\beta_k(u)\,du\,d\xi = \frac{4}{k(k+1)}\int_x^\infty (u-x)^{k+1}\beta_k^*(u)\,du, \tag{56}$$

$$\int_0^\infty \xi \int_{\frac{\xi}{2}+x}^\infty \left(u-x-\frac{\xi}{2}\right)^{k}\beta_k(u)\,\sigma(u)\,du\,d\xi =$$

$$= \frac{4}{(k+1)(k+2)}\int_x^\infty (u-x)^{k+2}\beta_k(u)\,\sigma(u)\,du, \tag{57}$$

$$\int_0^\infty \xi\int_0^\xi \int_{\frac{\xi}{2}+x}^\infty \left(u-x-\frac{\xi}{2}\right)^k \beta_k\left(u-\frac{v}{2}\right)\beta_0(u)\,du\,dv\,d\xi =$$

$$= \frac{8}{k+1}\int_0^\infty \beta_0(u+x)\int_0^u \beta_k(v+x)\,v^{k+1}\left(u-\frac{k+1}{k+2}v\right)dv\,du \leqslant$$

$$\leqslant \frac{8}{k+1}\left\{\int_x^\infty (u-x)^{k+1}\beta_k(u)\,du\right\}\left\{\int_x^\infty (u-x)\,\beta_0(u)\,du\right\}. \tag{58}$$

Из неравенств (25) и

$$(u-x)\int_u^\infty (v-u)^k\beta_k(v)\,dv \leqslant \int_x^\infty (v-x)^{k+1}\beta_k(v)\,dv$$

следует, что

$$(u-x)\,\sigma(u) \leqslant \sum_{k=0}^{n-2}(k+1)\,\overline{\beta}_k(x), \tag{59}$$

где

$$\overline{\beta}_k(x) = \frac{n-1}{n}\,\frac{2^{k+1}}{(k+1!)\left(\sin\dfrac{\pi}{n}\right)^{k+1}}\int_x^\infty (u-x)^{k+1}\beta_k(u)\,du,\quad k=0,1,\cdots,n-2.$$

Из соотношений (57) и (59) имеем

$$\int_0^\infty \xi \int_{\frac{\xi}{2}+x}^\infty \left(u-x-\frac{\xi}{2}\right)^k \beta_k(u)\,\sigma(u)\,du\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{(k+1)(k+2)}\left\{\sum_{\nu=0}^{n-2}(\nu+1)\,\widetilde{\beta}_\nu(x)\right\}\int_x^\infty (u-x)^{k+1}\beta_k(u)\,du. \tag{60}$$

Используя соотношения (54), (56), (58) и (60), из (55) получим оценку

$$\int_0^\infty \left|\frac{\partial}{\partial\xi}K(z,\xi)\right|\xi\,d\xi \leqslant \widetilde{\beta}_0(x) + e^{\widetilde{\sigma}(x)}\left\{\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)\sum_{k=1}^{n-2}\widehat{\beta}_k(x) + \right.$$

$$\left. + \widetilde{\beta}_0(x)\sum_{k=0}^{n-2}\widehat{\beta}_k(x) + \left[\sum_{k=0}^{n-2}(k+1)\,\widetilde{\beta}_k(x)\right]\left[\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k+2}\,\widetilde{\beta}(x)\right]\right\},$$

где $x = \operatorname{Re} z$. Отсюда, в силу условий (23), следует неравенство (30).

Убедимся также в справедливости соотношений (31), (32). Соотношение (31) непосредственно следует из очевидных неравенств

$$\xi\sigma_k\left(\operatorname{Re} z + \frac{\xi}{2}\right) \leqslant 2\int_{\frac{\xi}{2}}^\infty u^{k+1}\beta_k(u)\,du, \quad k=0, 1, \cdots, n-2.$$

Для доказательства (32) используем неравенства

$$\xi\sigma_k\left(\operatorname{Re} z + \frac{\xi}{2}\right) \leqslant \int_0^\infty \frac{\xi}{u}\chi_\xi(u)\,u^{k+1}\beta_k(u)\,du, \quad k = 0, 1, \cdots, n-2, \tag{61}$$

где $\chi_\xi(u)$ — характеристическая функция интервала $\left(\frac{\xi}{2}, \infty\right)$. Поскольку

$$\frac{\xi}{u}\chi_\xi(u) \leqslant 2, \quad \lim_{\xi\to 0}\frac{\xi}{u}\chi_\xi(u) = 0,$$

то, согласно теореме Лебега, из (61) имеем

$$\lim_{\xi\to 0}\xi\sigma_k\left(\operatorname{Re} z + \frac{\xi}{2}\right) = 0, \quad k = 0, 1, \cdots, n-2.$$

Отсюда, в силу (27), получаем соотношение (32).

Выведем формулу (33). Из (28) имеем

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}y(z,\lambda) = ze^{\lambda z}\left\{1 + \int_0^\infty e^{\lambda\xi}K(z,\xi)\,d\xi\right\} +$$

$$+e^{\lambda z}\frac{\partial}{\partial\lambda}\int_0^\infty e^{\lambda\xi}K(z,\xi)\,d\xi. \tag{62}$$

Однако

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\int_0^\infty e^{\lambda\xi}K(z,\xi)\,d\xi=\lim_{\rho\xi\in\Lambda;\ \rho\to 0}\int_0^\infty\frac{1}{\rho}\left(e^{\rho\xi}-1\right)e^{\lambda\xi}K(z,\xi)\,d\xi. \tag{63}$$

Если интеграл, стоящий в правой части (63), проинтегрировать по частям и учесть соотношения (31), (32), то получим

$$\int_0^\infty\frac{1}{\rho}\left(e^{\rho\xi}-1\right)e^{\lambda\xi}K(z,\xi)\,d\xi=-\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{(\lambda+\rho)\xi}K(z,\xi)\,d\xi-$$

$$-\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty\frac{1}{\rho}\left(e^{\rho\xi}-1\right)e^{\lambda\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}K(z,\xi)\,d\xi. \tag{64}$$

Заметим, что при $\rho\xi\in\Lambda$

$$\left|\frac{1}{\rho\xi}\left(e^{\rho\xi}-1\right)\right|\leqslant 1,\ \lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\rho\xi}\left(e^{\rho\xi}-1\right)=1.$$

Поэтому, согласно теореме Лебега, из (63) и (64) имеем

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\int_0^\infty e^{\lambda\xi}K(z,\xi)\,d\xi=-\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{\lambda\xi}\left\{K(z,\xi)+\xi\frac{\partial}{\partial\xi}K(z,\xi)\right\}d\xi. \tag{65}$$

Из (62) и (65) получаем формулу (33). Теорема 1 доказана.

Замечание 4. Если обозначить $L(x,t)=K(x,t-x)$, то функция $L(x,t)$ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}L(x,t)+\sum_{k=0}^{n-2}p_{n-2-k}(x)\frac{\partial^k}{\partial x^k}L(x,t)-(-1)^n\frac{\partial^n}{\partial t^n}L(x,t)=0, \tag{66}$$

$$p_0(x)=n\frac{d}{dx}L(x,x), \tag{67}$$

$$p_{k+1}(x)=\sum_{\nu=0}^{k}p_\nu(x)\sum_{s=\nu}^{k}C_{n-3-s}^{k-s}\left\{\frac{\partial^{s-\nu}}{\partial x^{s-\nu}}L(x,t)\Big|_{t=x}\right\}^{(k-s)}+$$

$$+\sum_{\nu=0}^{k+2}C_{n-1-\nu}^{k+2-\nu}\left\{\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu}L(x,t)\Big|_{t=x}\right\}^{(k+2-\nu)}-(-1)^k\frac{\partial^{k+2}}{\partial t^{k+2}}L(x,t)\Big|_{t=x}, \tag{68}$$

$$k=0,1,\cdots,n-3.$$

Эти формулы можно получить из интегрального уравнения (50) или же подстановкой функции $y(x,\lambda)$ из (26) в уравнение (1) (при $n=2$ формула (66) имеет смысл, когда коэффициент уравнения является дифференцируемым).

Замечание 5. Условие регулярности коэффициентов в секторе D не является необходимым условием для того, чтобы уравнение порядка $n>2$ имело решение, представимое в виде (26). Действительно, пусть $Ly\equiv y''+p(x)\,y$, где $p(x)$ удовлетворяет условию $xp(x)\in L_1(0,\infty)$ и не является аналитической функцией. Согласно теореме 1 уравнение $Ly=\lambda^2 y$ имеет решение $y(x,\lambda)$, представимое в виде (26). Однако функция $y(x,\lambda)$ одновременно является решением уравнения $L^k y=\lambda^{2k} y$ при $k>1$.

Приведем еще пример уравнения, коэффициенты которого имеют особенности в секторе D, но решение допускает представление (26). Пусть $\omega\neq 1$—некоторый корень n-ой степени из единицы. Выберем число a так, чтобы $\operatorname{Re} a>0$ и

$$\frac{\pi}{2}<|\arg(1-\omega)\,a|<\pi-\frac{\pi}{n}\,. \qquad (*)$$

Положим

$$F(x,t)=e^{a(t-\omega x)},$$

а функцию $L(x,t)$ определим из уравнения

$$L(x,t)+F(x,t)+\int_x^\infty L(x,u)\,F(u,t)\,du=0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$L(x,t)=-e^{a(t-\omega x)}\left\{1-\frac{1}{a(1-\omega)}\,e^{(1-\omega)\,ax}\right\}^{-1}.$$

Теперь из соотношений (67), (68) определим коэффициенты $p_k(x)$ $(k=0,1,\cdots,n-2)$ и составим уравнение (1). Тогда функция

$$y(x,\lambda)=e^{\lambda x}+\int_x^\infty e^{\lambda t}L(x,t)\,dt$$

является решением построенного уравнения (1) (это легко проверить в случае $n=3$). Однако

$$p_0(x)=-na(1-\omega)\,e^{(1-\omega)\,ax}\left\{1-\frac{1}{a(1-\omega)}\,e^{(1-\omega)\,ax}\right\}^{-1},$$

поэтому функция $p_0(z)$ имеет полюсы

$$z_m=\frac{1}{a(1-\omega)}\,\{\ln|a(1-\omega)|+i[2\pi m+\arg(1-\omega)\,a]\},\quad m=0,\pm1,\pm2,\cdots,$$

которые, в силу неравенства $(*)$, при достаточно больших по абсолютной величине значениях m, имеющих одинаковый знак с $\arg(1-$ $-\omega)\,a$, находятся в секторе D.

Замечание 6. Как было показано выше, при условиях (22) решение $y(x, \lambda)$ уравнения (1), представимое в виде (25), в точке $x=0$ имеет конечное значение $y(0, \lambda)$, которое является регулярной функцией по λ в Λ, непрерывной вплоть до границы. Однако при условиях (22) или (23) существование конечных производных по x функции $y(x, \lambda)$ в точке $x=0$ гарантировать нельзя. Ниже приводятся условия, которые обеспечивают существование производных $y^{(\nu)}(0, \lambda)$ $(\nu = 0, 1, \cdots, n-2)$, регулярных в Λ и непрерывных вплоть до границы.

Предположим теперь, что коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям

$$\int_0^\infty x\gamma_k(x)\,dx < \infty, \quad \int_0^\infty x^{n-1}\gamma_k(x)\,dx < \infty, \tag{69}$$

$$k=0, 1, \cdots, n-2,$$

где

$$\gamma_k(x) = \sup_{\tau \in D;\ |\tau|=1} |p_k(x\tau)|.$$

Обозначим

$$\gamma(x) = \frac{n-1}{n} \sum_{k,\nu=0}^{n-2} \frac{2^{\nu+1}}{\nu!\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^{\nu+1}} \int_x^\infty (u-x)^\nu \gamma_k(u)\,du,$$

$$\tilde{\gamma}(x) = \int_x^\infty \gamma(u)\,du.$$

Теорема 2. *Пусть коэффициенты уравнения* (1) *регулярны в секторе D и удовлетворяют условиям* (69). *Тогда при всех значениях $\lambda \in \Lambda$ уравнение* (1) *имеет решение $y(x, \lambda)$ такое, что функции $y^{(\nu)}(x, \lambda)$ $(\nu = 0, 1, \cdots, n-2)$ представляются в виде*

$$y^{(\nu)}(x, \lambda) = \lambda^\nu e^{\lambda x} + \sum_{m=0}^{\nu} \lambda^m \int_x^\infty e^{\lambda t} K_{\nu, m}(x, t-x)\,dt, \quad 0 \leqslant x < \infty, \tag{70}$$

где ядра $K_{\nu, m}(z, \xi)$ $(z \in D;\ 0 \leqslant \xi < \infty)$ при каждом фиксированном ξ регулярны по z в секторе D и удовлетворяют неравенствам

$$|K_{\nu, m}(z, \xi)| \leqslant \frac{1}{2}\gamma\left(\operatorname{Re} z + \frac{\xi}{2}\right) \exp\left\{\tilde{\gamma}(\operatorname{Re} z) - \tilde{\gamma}\left(\operatorname{Re} z + \frac{\xi}{2}\right)\right\}.$$

Кроме того, функции $y^{(\nu)}(x, \lambda)$ $(\nu = 0, 1, \cdots, n-2)$ при каждом фиксированном x $(0 \leqslant x < \infty)$ имеют непрерывную производную по λ во всех точках полуплоскости Λ за исключением, быть может, точки $\lambda = 0$.

Доказательство. Рассмотрим следующую систему интегральных уравнений для функций $y^{(\nu)}(x, \lambda)$ $(\lambda \in S)$:

$$y^{(\nu)}(x, \lambda) = \lambda^{\nu} e^{\lambda x} + \frac{1}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-2} \int_x^{\infty} \varphi^{(\nu+1)}(x-t, \lambda)\, p_{n-2-k}(t)\, y^{(k)}(t, \lambda)\, dt, \quad (71)$$

$$\nu = 0, 1, \cdots, n-2.$$

Применив метод последовательных приближений к системе уравнений (71), получим

$$y^{(\nu)}(x, \lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} R_j^{(\nu)}(x, \lambda), \quad \nu = 0, 1, \cdots, n-2,$$

где функции $R_j^{(\nu)}(x, \lambda)$ определяются из рекуррентных соотношений

$$R_0^{(\nu)}(x, \lambda) = \lambda^{\nu} e^{\lambda x},$$

$$R_{j+1}^{(\nu)}(x, \lambda) = \frac{1}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-2} \int_x^{\infty} \varphi^{(\nu+1)}(x-t, \lambda)\, p_{n-2-k}(t)\, R_j^{(k)}(t, \lambda)\, dt,$$

$$j = 0, 1, 2, \cdots; \ \nu = 0, 1, \cdots, n-2. \quad (72)$$

Методом индукции можно показать, что функции $R_j^{(\nu)}(x, \lambda)$ допускают представление

$$R_j^{(\nu)}(x, \lambda) = \sum_{m=0}^{\nu} \lambda^m \int_x^{\infty} e^{\lambda t} K_{\nu, m}^{(j)}(x, t-x)\, dt, \ j = 1, 2, 3, \cdots, \quad (73)$$

$$\nu = 0, 1, \cdots, n-2,$$

где ядра $K_{\nu, m}^{(j)}(z, \xi)$ $(z \in D;\ 0 \leqslant \xi < \infty)$ регулярны по z в секторе D и удовлетворяют неравенствам

$$|K_{\nu, m}^{(j)}(z, \xi)| \leqslant \frac{1}{2} \gamma\left(\operatorname{Re} z + \frac{\xi}{2}\right) \frac{1}{(j-1)!} \left\{\tilde{\gamma}(\operatorname{Re} z) - \tilde{\gamma}\left(\operatorname{Re} z + \frac{\xi}{2}\right)\right\}^{j-1},$$

$$m = 0, 1, \cdots, \nu; \ \nu = 0, 1, \cdots, n-2; \ j = 1, 2, 3, \cdots.$$

Действительно, из (72) при $j = 0$ имеем

$$R_1^{(\nu)}(x, \lambda) = \sum_{m=0}^{\nu-1} \lambda^m G_m^{(\nu)}(x, \lambda) + \lambda^{\nu} \sum_{m=\nu}^{n-2} \lambda^{m-\nu} G_m^{(\nu)}(x, \lambda), \quad (74)$$

где

$$G_m^{(\nu)}(x, \lambda) = \frac{1}{\lambda^n} \int_x^{\infty} e^{\lambda t} \varphi^{(\nu+1)}(x-t, \lambda)\, p_{n-2-m}(t)\, dt.$$

Используя формулы

$$\frac{1}{\lambda^{n-\nu}} e^{\lambda t} \varphi^{(n-1-\nu)}(x-t, \lambda) =$$

$$= \frac{1}{(\nu-k)!\, n} \sum_{s=1}^{n-1} \frac{(1-\omega_s)^{\nu-k+1}}{\omega_s^{\nu+1}} \int_x^t (t-u)^{\nu-k} e^{\lambda [t\omega_s + u(1-\omega_s)]}\, du,$$

$$k = 0, 1, \cdots, \nu; \quad \nu = 0, 1, \cdots, n-2,$$

и повторяя рассуждения, сделанные в доказательстве теоремы 1, получим

$$G_m^{(\nu)}(x, \lambda) = \int_x^\infty e^{\lambda t} K_{\nu, m}^{(1)}(x, t-x)\, dt, \quad 0 \leqslant m \leqslant \nu - 1,$$

$$\sum_{m=\nu}^{n-2} \lambda^{m-\nu} G_m^{(\nu)}(x, \lambda) = \int_x^\infty e^{\lambda t} K_{\nu, \nu}^{(1)}(x, t-x)\, dt.$$

Поэтому формула (74) приводится к виду (73) при $j = 1$. Предполагая, что при некотором j формулы (73) верны, функцию $R_{j+1}^{(\nu)}(x, \lambda)$ запишем в виде

$$R_{j+1}^{(\nu)}(x, \lambda) = \sum_{m=0}^{\nu-1} \lambda^m \sum_{k=m}^{n-2} G_{k, m}^{(\nu)}(x, \lambda) + \lambda^\nu \sum_{m=\nu}^{n-2} \lambda^{m-\nu} \sum_{k=m}^{n-2} G_{k, m}^{(\nu)}(x, \lambda), \qquad (75)$$

где

$$G_{k, m}^{(\nu)}(x, \lambda) = \frac{1}{\lambda^n} \int_x^\infty e^{\lambda t} \varphi^{(\nu+1)}(x-t, \lambda)\, p_{n-2-k}(t) \int_0^\infty e^{\lambda v} K_{k, m}^{(j)}(t, v)\, dv\, dt.$$

Если вышеуказанным способом вывести также формулы

$$\sum_{k=m}^{n-2} G_{k, m}^{(\nu)}(x, \lambda) = \int_x^\infty e^{\lambda t} K_{\nu, m}^{(j+1)}(x, t-x)\, dt, \quad 0 \leqslant m \leqslant \nu - 1,$$

$$\sum_{m=\nu}^{n-2} \lambda^{m-\nu} \sum_{k=m}^{n-2} G_{k, m}^{(\nu)}(x, \lambda) = \int_x^\infty e^{\lambda t} K_{\nu, \nu}^{(j+1)}(x, t-x)\, dt,$$

то из (75) получим представление (73) для функции $R_{j+1}^{(\nu)}(x, \lambda)$. Далее доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1. Приведем лишь систему интегральных уравнений, которой удовлетворяют функции $\widetilde{K}_{\nu, m}(z, \xi) = K_{n-2-\nu, n-2-m}(z, \xi)$:

$$\widetilde{K}_{\nu, \nu}(z, \xi) = \sum_{k=0}^{\nu} \frac{1}{k!\, n} \sum_{s=1}^{n-1} \frac{(1-\omega_s)^k}{\omega_s^{k+1}} \int_{\frac{\xi}{1-\omega_s}+z}^{\infty} \left(\zeta - z - \frac{\xi}{1-\omega_s}\right)^k p_k(\zeta)\, d\zeta +$$

$$+ \sum_{j=0}^{\nu} \frac{1}{j!\, n} \sum_{k=0}^{j} \sum_{s=1}^{n-1} \frac{(1-\omega_s)^j}{\omega_s^{\nu+1}} \int_0^\xi \int_{\frac{\xi-u}{1-\omega_s}+z}^{\infty} \left(\zeta - z - \frac{\xi-u}{1-\omega_s}\right)^j p_k(\zeta)\, \widetilde{K}_{k, j}(\zeta, u)\, d\zeta\, du,$$

$$\widetilde{K}_{\nu, m}(z, \xi)=\frac{1}{\nu!\, n}\sum_{s=1}^{n-1}\frac{(1-\omega_s)^\nu}{\omega_s^{\nu+1}}\int\limits_{\frac{\xi}{1-\omega_s}+z}^{\infty}\left(\zeta-z-\frac{\xi}{1-\omega_s}\right)^\nu p_m(\zeta)\,d\zeta+$$

$$+\frac{1}{\nu!\, n}\sum_{k=0}^{m}\sum_{s=1}^{n-1}\frac{(1-\omega_s)^\nu}{\omega_s^{\nu+1}}\int\limits_0^{\xi}\int\limits_{\frac{\xi-u}{1-\omega_s}+z}^{\infty}\left(\zeta-z-\frac{\xi-u}{1-\omega_s}\right)^\nu p_k(\zeta)\,\widetilde{K}_{k, m}(\zeta, u)\,d\zeta\, du, \tag{76}$$

$$m=\nu+1,\ \nu+2, \cdots, n-2;\quad \nu=0,\ 1, \cdots, n-2.$$

Замечание 7. Из системы интегральных уравнений (76) видно, что формулы (70) справедливы также при условиях

$$\int\limits_0^{\infty} x^\nu\left\{\sup_{\tau\in D;\ \mathrm{Re}\,\tau=1}\int\limits_x^{\infty}|p_k(u\tau)|\,du\right\}dx<\infty,\quad k,\ \nu=0,\ 1, \cdots, n-2.$$

Замечание 8. Очевидно, что имеют место формулы

$$y^{(\nu)}(x, \lambda)=\lambda^\nu e^{\lambda x}+\sum_{m=0}^{\nu}\lambda^m\int\limits_x^{\infty}e^{\lambda t}\left\{C_\nu^m\frac{\partial^{\nu-m}}{\partial z^{\nu-m}}K_{0, 0}(x, t-x)\right\}dt,\ 0<x<\infty.$$

Однако при $\nu+m\neq 0$ функции $K_{\nu, m}(z, \xi)$ и

$$C_\nu^m\frac{\partial^{\nu-m}}{\partial z^{\nu-m}}K_{0, 0}(z, \xi),$$

вообще говоря, не совпадают.

Сформулируем аналогичную теорему также для уравнений

$$(-1)^n y^{(2n)}+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left[p_{n-1-k}(x)\, y^{(k)}\right]^{(k)}=\lambda^{2n} y,\quad 0<x<\infty, \tag{77}$$

$$(-1)^n \varphi^{(2n)}=\lambda^{2n}\varphi.$$

Обозначения ω_s, $\varphi(x, \lambda)$, S, D будем использовать и в этом случае, только в соответствующих формулах (5), (6), (9), (21) число n нужно заменить на $2n$. На коэффициенты $p_k(x)$ накладываются следующие условия:

$$\int\limits_0^{\infty}x^{k+1}\eta_k(x)\,dx<\infty,\quad \int\limits_0^{\infty}x^{k+n}\eta_k(x)\,dx<\infty, \tag{78}$$

$$k=0,\ 1, \cdots, n-1,$$

где

$$\eta_k(x)=\sup_{\tau\in D,\ \mathrm{Re}\,\tau=1}|p_k(x\tau)|.$$

Обозначим

$$\eta(x) = \frac{2n-1}{n} \sum_{k,\,\nu=0}^{n-1} \frac{2^{\nu+k}}{(\nu+k)!\left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)^{\nu+k+1}} \int_x^{\infty} (u-x)^{\nu+k}\, \eta_k(u)\, du,$$

$$\tilde{\eta}(x) = \int_x^{\infty} \eta(u)\, du.$$

Теорема 3. *Пусть коэффициенты уравнения (77) регулярны в секторе D и удовлетворяют условиям (78). Тогда при всех значениях параметра λ из замкнутой верхней полуплоскости уравнение (77) имеет решение $y(x, \lambda)$ такое, что функции $y^{(\nu)}(x, \lambda)$ $(\nu = 0, 1, \cdots, n-1)$ представляются в виде*

$$y^{(\nu)}(x, \lambda) = (i\lambda)^{\nu} e^{i\lambda x} + \sum_{m=0}^{\nu} (i\lambda)^m \int_x^{\infty} e^{i\lambda t} K_{\nu,m}(x, t-x)\, dt, \quad 0 \leqslant x < \infty, \tag{79}$$

где ядра $K_{\nu,m}(z, \xi)$ $(z \in D;\ 0 \leqslant \xi < \infty)$ при каждом фиксированном ξ регулярны по z в секторе D и удовлетворяют неравенствам

$$|K_{\nu,m}(z, \xi)| \leqslant \frac{1}{2}\, \eta\left(\operatorname{Re} z + \frac{\xi}{2}\right) \exp\left\{\tilde{\eta}(\operatorname{Re} z) - \tilde{\eta}\left(\operatorname{Re} z + \frac{\xi}{2}\right)\right\}.$$

Кроме того, функции $y^{(\nu)}(x, \lambda)$ $(\nu = 0, 1, \cdots, n-1)$ при каждом фиксированном x $(0 \leqslant x < \infty)$ имеют непрерывную производную по λ во всех точках замкнутой верхней полуплоскости за исключением, быть может, точки $\lambda = 0$.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 2, только в этом случае нужно исходить из следующей системы интегральных уравнений для функций $y^{(\nu)}(x, \lambda)$ $(i\lambda \in S)$:

$$y^{(\nu)}(x, \lambda) = (i\lambda)^{\nu} e^{i\lambda x} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k}}{(i\lambda)^{2n}} \int_x^{\infty} \varphi^{(\nu+k+1)}(x-t, i\lambda) \times$$
$$\times\, p_{n-1-k}(t)\, y^{(k)}(t, \lambda)\, dt,$$
$$\nu = 0, 1, \cdots, n-1.$$

Функции $\tilde{K}_{\nu,m}(z, \xi) = K_{n-1-\nu,\,n-1-m}(z, \xi)$ удовлетворяют следующей системе интегральных уравнений:

$$\tilde{K}_{\nu,\nu}(z, \xi) = -\sum_{k=0}^{\nu} \frac{(-1)^k}{(2k)!\,2n} \sum_{s=1}^{2n-1} \frac{(1-\omega_s)^{2k}}{\omega_s^{\nu+k+1}} \times$$

$$\times \int_{\frac{\xi}{1-\omega_s}+z}^{\infty} \left(\zeta - z - \frac{\xi}{1-\omega_s}\right)^{2k} p_k(\zeta)\, d\zeta - \sum_{j=0}^{\nu} \sum_{k=0}^{j} \frac{(-1)^k}{(j+k)!\,2n} \sum_{s=1}^{2n-1} \frac{(1-\omega_s)^{j+k}}{\omega_s^{\nu+k+1}} \times$$

$$\times \int\limits_0^{\xi} \int\limits_{\frac{\xi-u}{1-\omega_s}+z}^{\infty} \left(\zeta - z - \frac{\xi-u}{1-\omega_s}\right)^{j+k} p_k(\zeta)\, \widetilde{K}_{k,j}(\zeta, u)\, d\zeta du,$$

$$\widetilde{K}_{\nu,m}(z, \xi) = -\frac{(-1)^m}{(\nu+m)!\,2n} \sum_{s=1}^{2n-1} \frac{(1-\omega_s)^{\nu+m}}{\omega_s^{\nu+m+1}} \times$$

$$\times \int\limits_{\frac{\xi}{1-\omega_s}+z}^{\infty} \left(\zeta - z - \frac{\xi}{1-\omega_s}\right)^{\nu+m} p_m(\zeta)\, d\zeta - \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{(\nu+k)!\,2n} \sum_{s=1}^{2n-1} \frac{(1-\omega_s)^{\nu+k}}{\omega_s^{\nu+k+1}} \times$$

$$\times \int\limits_0^{\xi} \int\limits_{\frac{\xi-u}{1-\omega_s}+z}^{\infty} \left(\zeta - z - \frac{\xi}{1-\omega_s}\right)^{\nu+k} p_k(\zeta)\, \widetilde{K}_{k,m}(\zeta, u)\, d\zeta du, \qquad (80)$$

$$m = \nu+1, \nu+2, \cdots, n-1; \ \nu = 0, 1, \cdots, n-1.$$

Замечание 9. Формулы (79) справедливы также при условиях

$$\int\limits_0^{\infty} x^{\nu} \left\{ \sup_{\tau \in D;\ \mathrm{Re}\,\tau=1} \int\limits_x^{\infty} (u-x)^k |p_k(u\tau)|\, du \right\} dx < \infty, \ k, \nu = 0, 1, \cdots, n-1.$$

Это видно из системы интегральных уравнений (80).

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 24.IV.1978

Ի. Գ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ. Բարձր կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների համար լուծումների ասիմպտոտիկան պահպանող ձևափոխության օպերատորի գոյության մասին *(ամփոփում)*

Անալիտիկ գործակիցներով սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների համար կառուցված է ձևափոխության օպերատոր, որը անվերջությունում պահպանում է լուծումների ասիմպտոտիկան։

I. G. KHACHATRIAN. *On the existence of a transformation operator for high order differential equations, which preserves the asymptotics of solutions* (summary)

For ordinary differential equations with analytic coefficients the transformation operator, preserving the asymptotic behaviour of solutions at infinity, is constructed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Б. Я. Левин.* Преобразование типа Фурье и Лапласа при помощи решений дифференциального уравнения второго порядка, ДАН СССР, 106, № 2, 1956, 187—190.
2. *В. А. Марченко.* Спектральная теория операторов Штурма—Лиувилля, Киев, 1972.

3. *И. Г. Хачатрян*. Об операторах преобразования для дифференциальных уравнений высших порядков, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 13, № 3, 1978, 215—237.
4. *А. М. Седлецкий*. Эквивалентное определение пространств H^p в полуплоскости и некоторые приложения, Матем. сб., 96, № 1, 1975, 75—82.
5. *К. Гофман*. Банаховы пространства аналитических функций, М., 1963.
6. *М. М. Джрбашян*. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., 1966.
7. *P. L. Duren*. Theory of H^p spaces, New York, 1970.