ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XIV, № 5, 1979 Математика

Г. Р. ОГАНЕСЯН

СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СЛАБО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Теория корректности общих граничных задач для строго гиперболических уравнений и систем получила уже почти полное завершение в работах [1]—[4]. С другой стороны в работа [5]—[11] указаны широкие классы вырождающихся уравнений высоких порядков, для которых задача Коши хорошо поставлена. Возникает задача описания корректных смешанных задач для слабо гиперболических уравнений и систем с переменными коэффициентами.

Первым результатом в этом направлении была, по-видимому, работа Билса [12], в которой рассмотрены смешанные задачи для некоторых классов многомерных слабо гиперболических уравнений в классах Жевре без условий на младшие симмволы соответствующих операторов (типа обобщенных условий Э. Э. Леви). Для некоторых классов несимметризуемых многомерных систем и слабо гиперболических уравнений с характеристиками, стремящимися к нулю при приближении к начальному многообразию, смешанные задачи изучены в [13]—[17].

В настоящей статье (для случая двух независимых переменных) описаны более общие классы операторов P с характеристиками переменной кратности, для которых хорошо поставлены как задача Коши, так и общие граничные задачи. Основное условие корректности задачи Коши (монотонная гиперболичность) формулируется в виде (предложенном для симметрических по Фридрихсу слабо гиперболических систем А. Б. Нерсесяном [6]) неотрицательности некоторой матрицы H, построенной по оператору P; оно является обобщением классического определения гиперболичности уравнения второго порядка (положительность дискриминанта характеристического уравнения) и накладывает ограничения как на главный, так и на младшие символы (субглавный и другие инвариантные младшие символы, введенные в [18]—[21]) оператора P.

Класс монотонно гиперболических операторов включает в себя многие классы корректных операторов (классы операторов гиперболических по Петровскому, Э. Э. Леви, а также классы, описанные в [5]—[11] в случае двух независимых переменных).

При рассмотрении смешанных задач в полуполосе, кроме упомянутого условия монотонной гиперболичности, появляется условие типа Лопатинского на граничные операторы. Эти условия допускают нарушение обычного равномерного условия Лопатинского для строго гиперболических уравнений ([17], пример 1, § 9).

Доказательство основных энергетических оценок проводится методом Лере [23], [24], скомбинированного с методом обращения интегрального неравенства с неинтегрируемым ядром ([6]). Заметим, что выбор младших членов разделяющего оператора для операторов с кратными характеристиками уже не произволен (как в случае строго гиперболических уравнений) и сильно усложняется в случае переменных коэффициентов (случай постоянных коэффициентов рассмотрен Пайзером [27]).

§ 1. Обозначения. Некоторые функциональные пространства

Пусть $\Omega = \{(t, x) \in R^2, 0 < t < T, 0 < x < X\}$, $X \leqslant \infty$, $S = S_\tau = \{(t, x) \in \overline{\Omega}, t = \tau\}$, $B = \{(t, x) \in \overline{\Omega}, x = 0\}$.

Если $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1)$ — пара целых неотрицательных чисел — мультииндекс, то, как обычно

$$D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\alpha_0} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha_1}, \ |\alpha| = \alpha_0 + \alpha_1 \quad \text{и т. д.}$$

Обозначим через δ_{ij}, $Y(x)$ символ Кронекера и функцию Хевисайда соответственно:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad Y(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}, \quad \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Через C_0^∞ обозначим пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями. Если U является частью Ω, то через $H^{p, q}(U)$ обозначается пополнение C_0^∞ по норме

$$|D^{p, q} f, U|^2 = \int |D^{p, q} f(x)|^2 \, dU,$$

где интегрирование ведется по U, а $dU = dt dx$, если $U = \Omega$, $dU = dx$, если $U = S$ и, наконец, $dU = dt$, если $U = B$. $H^{p, p}(U)$ является гильбертовым пространством.

Через $L^{p, q}$ обозначим пополнение C_0^∞ по норме

$$|D^{p, q} f|_1 = \int_0^t |D^{p, q} f, S_\tau| \, d\tau,$$

где $L^{p, q}$ — сепарабельное банахово пространство.

Подпространство $B^{p, q}$ пространства $L^{p, q}$, определяемое условием

$$|D^{p, q} f|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{0 \leqslant \tau \leqslant t} |D^{p, q} f(\tau, x), S_\tau| < \infty,$$

также является сепарабельным банаховым пространством ([24]).

Темой настоящей работы является изучение смешанных задач для дифференциального оператора в частных производных $(m+1)$-го порядка с вещественными, гладкими (класса C_0^∞) коэффициентами в случае двух независимых переменных

$$P \equiv P(t,\ x,\ D) \equiv \sum a_\alpha D^\alpha,\ |\alpha| \leqslant m+1. \tag{1}$$

§ 2. Вспомогательные операторы

Введем вспомогательную последовательность разделяющих операторов

$$P^k \equiv \sum b^k_\alpha D^\alpha,\ |\alpha| \leqslant m+1-k,\ \alpha_2 \neq 0 \text{ при } \alpha_1 \leqslant m-k, \tag{2}$$

$$k = 1,\ 2, \cdots, m+1,\ \operatorname{ord} P^k = m+1-k.$$

Через P^k_0 обозначается главная часть оператора P^k:

$$P^k_0 = \sum b^k_\alpha D^\alpha,\ |\alpha| = m+1-k.$$

Мы предположим, что

$$a_{m+1,\,0} \equiv 1,\ b^k_{m+1-k,\,0} \equiv \frac{(m+1)!}{(m+1-k)!},\ k = 1, \cdots, m+1, \tag{3}$$

т. е. начальная полупрямая $S_0 = \{(t,\ x) \in \overline{\Omega},\ t = 0\}$ не является характеристической.

Составим оператор

$$P^0 \equiv P - \sum_{k=1}^{m+1} \frac{(m+1-k)!}{(m+1)!}\, a_{m+1-k,\,0} \cdot P^k = \sum_{|\alpha| \leqslant m+1} b^0_\alpha D^\alpha. \tag{4}$$

По определению

$$b^0_{s,\,0} \equiv 0,\ s = 0,\ 1, \cdots, m;\ b^0_{m+1,\,0} \equiv a_{m+1,\,0} = 1, \tag{5}$$

$$b^0_\alpha = a_\alpha \quad \text{при} \quad |\alpha| = m+1. \tag{6}$$

Пусть $\lambda^k_1,\ \lambda^k_2, \cdots, \lambda^k_{m+1-k}$ — корни характеристических уравнений операторов P^k $(k = 0,\ 1, \cdots, m+1)$

$$\sum_{\alpha_1=0}^{m+1-k} b^k_\alpha \lambda^{\alpha_1} = 0,\ |\alpha| = m+1-k. \tag{7}$$

По теореме Виета

$$b^k_{m+1-k-s,\,s} = \frac{(m+1)!}{(m+1-k)!} \sum_{i_1 < \cdots < i_s} (-\lambda^k_{i_1}) \cdots (-\lambda^k_{i_s}), \tag{8}$$

$$s = 0,1, \cdots, m-k+1;\ k = 0,1, \cdots, m.$$

Из (6) следует, что $\lambda^0_1,\ \lambda^0_2, \cdots, \lambda^0_{m+1}$ являются также характеристическими корнями искомого оператора $P(t,\ x,\ D)$. Выберем коэффициенты главных частей вспомогательных операторов так, чтобы

$$b^{k+1}_{m-k-s,\,s} = \sum_{j=1}^{m+1-k} d^k_j \sum_{\substack{i_1<\cdots<i_s \\ i_1,\ldots,i_s\neq j}} (-\lambda^k_{i_1})\cdots(-\lambda^k_{i_s}), \tag{9}$$

$$s = 0,1,\cdots,\ m-k;\ k = 0,1,\cdots,\ m,$$

где d^k_j — пока произвольные параметры (в дальнейшем положительные постоянные), удовлетворяющие ввиду (3) соотношениям

$$\sum_{j=1}^{m+1-k} d^k_j = \frac{(m+1)!}{(m-k)!},\ k = 0,1,\cdots,m. \tag{10}$$

Предполагая характеристические корни операторов (P^k, P^{k+1}) действительными, разделяющий оператор (P^{k+1}) по искомому оператору (P^k) мы построим так, чтобы

i) характеристические корни разделяющего оператора лежали между характеристическими корнями искомого оператора (см. [23], [24]),

ii) разделяющий оператор был бы c-гиперболичен (см. определение 2 § 4).

Условия i) и ii) накладывают, соответственно, ограничения на выбор старшего и младшего символов разделяющего оператора. Если выбор старшего символа (в соответствии с i)) уже сделан (см., например, [23]) и если младший символ выбран так, что разделяющий оператор представим в виде произведения строго гиперболических операторов (в случае двух независимых переменных это всегда возможно), то в силу леммы 5 § 5 условия i), ii) выполнены.

В случае операторов с постоянными коэффициентами и гиперболических по Гордингу Г. Пайзер [27] указал другой выбор разделяющего оператора, а именно, $P^1(\xi_0, \xi_1) = \frac{\partial}{\partial\xi_0} P(\xi_0, \xi_1)$. Так как в случае двух независимых переменных гиперболичность по Гордингу совпадает с гиперболичностью по Э. Леви, то по лемме 4 § 5 гиперболический по Гордингу оператор также является c-гиперболическим. Ввиду того, что производная символа, гиперболического по Гордингу, является символом, гиперболическим по Гордингу (см. [27]), то выбор Г. Пайзера вкладывается в условия i), ii).

Условие i) допускает некоторый произвол в выборе старшего символа разделяющего оператора, которым мы воспользуемся при доказательстве леммы 5 и при выборе параметров d^k_j (см. лемму 7 § 7).

Если

$$d^k_j = \frac{(m+1)!}{(m+1-k)!}, \tag{11}$$

то

$$P^{k+1}_0(t, x, \xi_0, \xi_1) = \frac{\partial}{\partial\xi_0} P^k_0(t, x, \xi_0, \xi_1). \tag{12}$$

Введем вспомогательные векторы размерности $l = 1 + \frac{m(m+1)}{2}$,

$$\eta = (D^{m,0}\, u,\ D^{m-1,1}\, u, \cdots,\ D^{0,m}\, u,\ D^{m-2,1}\, u, \cdots$$
$$\cdots,\ D^{0,m-1}\, u,\ D^{m-3,1}\, u, \cdots,\ D^{0,1}\, u).$$

$$\overset{*}{b}{}^0 = (\overset{*}{b}{}^0_1, \cdots, \overset{*}{b}{}_l) = (0,\ b^0_{m-1,1}, \cdots,\ b^0_{0m},\ b^0_{m-2,1}, \cdots,\ b^0_{0,m-1},\ b^0_{m-3,1}, \cdots,\ b^0_{01}),$$

$$\overset{*}{b}{}^1 = (\overset{*}{b}{}^1_1, \cdots, \overset{*}{b}{}^1_l) = (b^1_{m0}, \cdots,\ b^1_{0m},\ b^1_{m-2,1}, \cdots,\ b^1_{0,m-1},\ b^1_{m-3,1}, \cdots,\ b^1_{01}).$$

§ 3. Дивергентное тождество и основные матрицы

Нетрудно показать, что имеет место следующее дивергентное тождество (см., например, [24], [28]):

$$2P^k u\, P^{k+1} u = (\eta A^0(k)\, \eta^T)_t + (\eta A(k)\, \eta^T)_x + \eta\, [L(k) - A^0_t(k) - A_x(k)]\, \eta^T, \tag{13}$$

где η^T — транспонированный вектор η, $A_x = \frac{\partial}{\partial x} A$, $A^0_t = \frac{\partial}{\partial t} A^0$, причем при $k = 0$ симметрические матрицы

$$A^0 \equiv A^0(k)_{k=0} = A^0(P^k,\ P^{k+1})_{k=0},\ A = A(0),\ L = L(0)$$

имеют вид

$$A^0_{ij} = Y(p-m-1)\left(A^0_{ii}\, \delta_{ij} + \frac{1-\delta_{ij}}{m+1}\, \overset{*}{b}{}^1_i\, \overset{*}{b}{}^1_j\right) +$$

$$+ Y(m+2-p) \sum_{k=1}^{i+j-1} \{[Y(q+1-k) + Y(k-p]\, \mathrm{sign}\,(i+j+1-2k) \times$$

$$\times\, b^1_{m+1+k-i-j}\, b^0_{m+2-k}\}, \tag{14}$$

$$A_{ij} = Y(p-m-1)\left[A_{ii}\, \delta_{ij} + (1-\delta_{ij})\ \overset{*}{b}{}^1_p \left(b^0_{m+1-q} - \frac{b^1_{m-q}}{m+1}\right)\right] +$$

$$+ Y(m+2-p) \sum_{k=1}^{m+1} \{[Y(m+2-p-k) + Y(k+q-m-1)] \times$$

$$\times\, \mathrm{sign}\,(2k+i+j-2m-3)\, b^1_{k-1}\, b^0_{2m+3+k-j-k}\}, \tag{15}$$

$$L_{ij} = \overset{*}{b}{}^0_i\, \overset{*}{b}{}^1_j + \overset{*}{b}{}^1_i\, \overset{*}{b}{}^0_j + (1+\delta_{ij}) \left[Y(p-2)\, \overset{*}{b}{}^1_{p+m-1} \times\right.$$

$$\left.\times \left(\frac{b^1_{m-q}}{m+1} - b^0_{m+1-q}\right) - Y(q-1)\, \frac{\overset{*}{b}{}^1_{m+q}\, b^1_{m+1-p}}{m+1}\right] - \tag{16}$$

$$- Y(q-1)\, A^0_{pp}\, \delta_{p,m-q} - Y(q-2)\, A_{pp}\, \delta_{p-1,m+q},$$

здесь $i, j = 1, 2, \cdots, l$,

$$b_k^0 \equiv b_{k,\,m+1-k}^0,\quad b_{k-1}^1 \equiv b_{k-1,\,m+1-k}^1,\ k = 1, \cdots, m+1,$$

$$p \equiv \max(i,\ j),\ q = \min(i,\ j),$$

$$b_s^0 \equiv 0, \text{ если } s < 0 \text{ или } s > m+1, \tag{17}$$

$$b_k^1 \equiv 0, \text{ если } k < 0 \text{ или } k > m, \tag{18}$$

A_{ij}^0, A_{ij} при $j = m+2,\ m+3, \cdots, l$ — пока произвольные функции. Из этих формул имеем, например

$$A_{i1}^0 = \dot{b}_i^1,\ i = 1,\ 2, \cdots, l. \tag{19}$$

§ 4. Основные предположения о характере слипания характеристик на начальной полупрямой

Пусть оператор P при $t = 0$ имеет $\bar{l}$ групп слипающихся характеристик

$$0 < \lambda_{s_i+1}(0,\ x) \equiv \lambda_{s_i+2}(0,\ x) \equiv \cdots \equiv \lambda_{s_i+r_i}(0,\ x), \tag{20}$$

$$0 \leqslant s_i \leqslant m,\ i = 1,\ 2, \cdots, \bar{l},\ r_1 + r_2 + \cdots + r_{\bar{l}} \leqslant m+1.$$

При этом дополнительно предполагается, что при $t > 0$ эти группы характеристик либо различны, либо, если слипаются, то всюду в $\bar{\Omega}$ (характеристики постоянной кратности).

Введем вспомогательные функции

$$\Delta_n^k(t,\ x) \equiv \det \| A_{ij}^0 (P^k,\ P^{k+1}) \|_{i,\,j=1}^n;\ n = 1,\ 2, \cdots, m+1-k;\ k = 0, \cdots, m. \tag{21}$$

Нетрудно показать, что при условиях (12) имеют место формулы (см. [8])

$$\Delta_n^k = \sum_{(p_1, \cdots, p_n) \in (1, \cdots, m+1-k)} \ \prod_{\substack{i<j \\ i,\,j = p_1, \cdots, p_n}} (\lambda_i^k - \lambda_j^k)^2, \tag{22}$$

$$k = 0,\ 1, \cdots, m;\ n = 1, \cdots, m+1-k.$$

Из этих формул видно, что условия (20) означают, что

$$\Delta_n^k(t,\ x) = o(1),\ t \to +0,$$

при $k = 0,\ 1, \cdots, N-1$; $n = m+2-N, \cdots, m-k,\ m+1-k$.

Мы скажем, что вектор-функция $\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_N, \Phi)$ принадлежит классу $\mathfrak{M}$, если функции $\mu_1(t), \cdots, \mu_N(t)$, $\Phi(t)$ неотрицательны, $\mu_1, \cdots, \mu_N$ непрерывно дифференцируемы, а $\Phi(t)$ аналитична на $[0, T]$ и

$$\mu_j(+0) = \Phi(T-0) = +0,\ \mu_j'(t) \geqslant 0,\ \Phi'(t) \leqslant 0,\ j = 1, \cdots, N, \tag{23}$$

$$\mu_j'(t)/\mu_j(t) \leqslant c \cdot \mu_{j+1}'(t)/\mu_{j+1}(t),\ j = 1, \cdots, N-1,\ t \in [0,\ T], \tag{24}$$

для любой положительной постоянной M найдутся постоянные $c>0$ и $t_0\in(0,\ T]$ такие, что

$$\mu_{j+1}(t)\leqslant c\,\mu_j^M(t),\ t\in[0,\ t_0],\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1. \tag{25}$$

Если $\Phi\equiv\mu_j\equiv 0$, то, по определению, полагаем $\mu'/\mu=\Phi'/\Phi=0$.

Условимся говорить, что слипание характеристик монотонное, если существует $\mu\in\mathfrak{M}$ такое, что

$$\frac{(\Delta^0_{m+1+j-N})'_t}{\Delta^0_{m+1+j-N}}\leqslant c\,\frac{\mu'_j(t)}{\mu_j(t)},\ j=1,\cdots,N;\ t\to+0;\ \Delta^0_{m+1}\leqslant c\cdot\Phi(t). \tag{26}$$

Заметим, что в качестве функции $\Phi(t)$ всегда можно выбрать постоянную (условие $\Phi(T-0)=$ при этом выпадает). В этом случае мы просто получим (более слабый, если $\Delta^0_{m+1}=+0$ при $t\to T-0$) вариант теоремы 2 (см. § 6).

Так как матрица A^0 симметрична, то при условии $\det A^0\neq 0$ матрицу A^0 треугольным преобразованием Λ ($\det\Lambda\equiv 1$) можно привести к диагональному виду, т. е. матрица $\Lambda A^0\Lambda^T$ диагональна. Пользуясь формулой (22) можно показать, что даже при $\det A^0\equiv 0$ (характеристики постоянной кратности) диагонализирующая матрица Λ (с $\det\Lambda\equiv 1$) существует.

Пусть

$$K_i(k,\ t)\equiv c+Y(j)\,Y(1-k)\,M_j\,\frac{\mu'_j(t)}{\mu_j(t)}+\frac{|\Phi'|}{\Phi},\ j\equiv N+s-m-1, \tag{27}$$

$$s=1,\ 2,\cdots,\ m+1,$$

$$K\equiv K(k,\ t)\equiv\Lambda^{-1}\|K_i\delta_{ij}\|(\Lambda^{-1})^T, \tag{28}$$

здесь M_i, c — положительные постоянные, а $\|K_i\delta_{ij}\|$ — диагональная $(m+1)\times(m+1)$ матрица с диагональными элементами $K_1,\ K_2,\cdots,\ K_{m+1}$.

Введем матрицы

$$\mathbf{H}(k)\equiv\mathbf{H}(K,\ P^k,\ P^{k-1})\equiv K\cdot A^0(P^k,\ P^{k-1})-$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}A^0(k)-\frac{\partial}{\partial x}A^0(k)+L(k);\ \mathbf{H}\equiv\mathbf{H}(0). \tag{29}$$

Определение 1. Оператор P назовем слабо гиперболическим, если

$$A^0>0 \tag{30}$$

Определение 2. Оператор назовем c-гиперболическим, если существует постоянная $c>0$ такая, что имеют место (30) и

$$\mathbf{H}(c,\ P^0,\ P^1)=cA^0-A^0_t-A_x+L>0. \tag{31}$$

Определение 3. Оператор P мы назовем монотонно гиперболическим, если он слабо гиперболичен слипание некоторых его характеристик монотонное и существуют положительные постоянные c, M_j, ε_j такие, что

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(K, P^0, P^1) > 0, \tag{32}$$

$$|D^\alpha(\lambda_k - \lambda_n)| \leqslant c \left| \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\alpha_0} \mu_j^{s_i}(t) \right|, \ |\alpha| \leqslant 1, \tag{33}$$

$$k, \ n = s_i + p_i, \cdots, s_i + r_i - 1, \ s_i + r_i; \ s_i \geqslant 0; \ k \neq n, \ i = 1, 2, \cdots, l,$$

$$p_i = 1, 2, \cdots, r_i - 1; \ j = 1, 2, \cdots, N.$$

Так как главная часть оператора P^1 зависит от выбора постоянных, то условия (32) зависят, вообще говоря, от этих постоянных. Однако можно показать, что в действительности (32) от выбора d_j^i не зависит

§ 5. Сравнение с классическими классами гиперболических операторов

Определение 4. Оператор P называется строго гиперболическим (или t-гиперболическим по Петровскому), если его характеристические корни $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{m-1}$ действительны и различны в $\overline{\Omega}$.

Лемма 1. *Для того чтобы оператор P был слабо гиперболичен необходимо и достаточно, чтобы его характеристические корни были действительны.*

Доказательство. Если по характеристическому полиному $P(\xi_0)$ выписать систему полиномов Штурма, то нетрудно проверить, что старшие коэффициенты полиномов этой системы совпадают с главными минорами матрицы A^0 (см. (22)). Поэтому необходимость утверждения леммы следует из теоремы Штурма о числе действительных корней полинома. Достаточность очевидна.

Отметим, что если не предполагать условий действительности характеристических корней разделяющего оператора (P^1) и i), то можно показать, аналогичным способом, что слабая гиперболичность оператора P эквивалентна следующим двум условиям: I) характеристические корни операторов P и P^1 действительны, II) характеристические корни разделяющего оператора лежат между характеристическими корнями оператора P.

Лемма 2. *Для того чтобы оператор P был строго гиперболическим необходимо и достаточно, чтобы матрица энергии была бы положительно определенной* ($A^0 > 0$),

Доказательство леммы 2 следует из формулы (22) и критерия Сильвестра положительной определенности матрицы.

Из леммы 2 непосредственно следует

Лемма 3. *Строго гиперболический оператор является с-гиперболическим.*

Определение 5. Оператор P называется гиперболическим по Э. Леви, если а) главный символ оператора P допускает факторизацию

$$P_0(t, x, \xi_0, \xi_1) = \prod_1 (\xi_0 - \lambda_\beta \xi_1)^{r_\beta},$$

здесь характеристические корни λ_β действительны и различны в $\overline{\Omega}$,

б) для любой функции $f(t, x)$ класса C^∞ и любой характеристической функции

$$\varphi(t, x) \in C^\infty, \ \varphi_t - \lambda_\beta \varphi_x = 0$$

имеет место соотношение

$$e^{-i\tau\varphi} P(f e^{i\tau\varphi}) = O(\tau^{m-1-r_\beta}), \ \tau \to \infty. \tag{34}$$

Лемма 4. *Гиперболический по Э. Леви оператор является с-гиперболическим.*

Доказательство. Для оператора гиперболического по Э. Леви для всех $i, j = 1, \cdots, l$, кроме $i = j = 1$, имеют место равенства

$$[\Lambda \mathbf{H}(k, P^0, P^1) \Lambda^T]_{ij} \equiv 0,$$

причем при

$$i, j = m+3-r, \cdots, \theta-1, \theta; \ r = \max r_\beta, \ \theta \equiv m+1+\frac{(r-2)(2m+1-r)}{2}$$

это следует из условия а); при $j = 1$, $i = m+3-r, \cdots, \theta-1, \theta$ это следует из б), а при $\theta < i, j \leqslant l$ это следует из подходящего выбора произвольных параметров A^0_{ll}, A_{ll}. Для завершения доказательства леммы остается применить следующее

Предложение ([30], стр. 278). *Для того чтобы симметричная квадратичная форма $a_{ij}\eta_i\eta_j$ $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ была неотрицательной необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры ее матрицы коэффициентов были неотрицательны:*

$$\det \|a_{k s}\|^p_{k, s=i_1} \geqslant 0 \ (1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leqslant n; \ p = 1, 2, \cdots, n).$$

Для упрощения проверки условий этого предложения удобно применять

Следствие. *Если диагональный элемент симметрической неотрицательной матрицы равен нулю, то и вся строка и весь столбец, содержащие этот диагональный элемент, равны нулю (т. е. $a_{pp} = 0$ влечет $a_{kp} = a_{pk} = 0$, $k = 1, 2, \cdots, n$).*

Лемма 5. *Оператор, представимый в виде произведения строго гиперболических операторов, является с-гиперболическим.*

Доказательство. За счет выбора разделяющего оператора и параметров A^0_{ll}, A_{ll} можно добиться выполнения равенств

$$[\Lambda \mathbf{H} \Lambda^T]_{ll} = 0, \ i = 1, 2, \cdots, l.$$

Заметим, что при этом корни разделяющего оператора уже не лежат строго между корнями искомого оператора (например, если $P = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x}\right)^2$, то $P^1 = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x}\right)^2$). Далее из приводимости оператора P непосредственно можно проверить, что $\|\Lambda \mathbf{H} \Lambda^T\|_{ij}=0$ (для всех $i, j=1, 2, \cdots, l$, кроме $i=j=1$) и $\mathbf{H} \geqslant 0$.

§ 6. Постановка задач и основные теоремы

Обозначим через ν число характеристик, которые исходя из начала координат входят в полуполосу Ω, точнее, пусть при $x=0$, $t \in [0, T]$

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_\nu < 0 < \lambda_{\nu+1} \leqslant \cdots \leqslant \lambda_{m+1}, \quad \nu < \min_i s_i . \tag{35}$$

Предполагается при этом, что ν постоянно (не зависит от t).

Нетрудно доказать, что имеет место формула (см. (46))

$$\nu = \frac{\operatorname{rang} \tilde{A} + \operatorname{sgn} \tilde{A}}{2}, \quad \bar{A} = \|A_{ij}\|_{i,\, j=1}^{m+1} . \tag{35'}$$

Рассмотрим смешанную задачу

$$Pu=f, \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^i u(0, x)=0, \quad i=0, 1, \cdots, m, \tag{36}$$

$$\Gamma_j u = \sum_{s=0}^{m+j-\nu} \gamma_{js} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m+j-s-\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^s u(t, 0)=0, \quad j=1, 2, \cdots, \nu. \tag{37}$$

Мы будем предполагать, что граничные операторы удовлетворяют условию типа Лопатинского

$$\det \left\| \sum_{s=0}^{m+p-\nu} \gamma_{ps}(t) (\lambda_{\nu+1-q})^{m-s} \right\|_{p,\, q=1}^{\nu} \neq 0 \tag{38}$$

при $x=0$ и для всех $t \in [0, T]$.

Сформулируем основные теоремы, доказываемые в настоящей статье.

Теорема 1. *Если оператор P является с-гиперболическим, то задача Коши* (36) *при* $f \in L(\Omega)$ *имеет единственное решение* $u \in B^{m-N}(\Omega)$, *причем имеет место неравенство*

$$|D^{m-N} u|_\infty \leqslant c\, |Pu|_1, \tag{39}$$

где постоянная $c>0$ не зависит от u.

Если оператор P строго гиперболичен, то $N=0$ и этот результат содержится в теореме 14.3 из [24].

Теорема 2. *Если оператор P является монотонно гиперболическим, то задача Коши* (36) при $f \in L^q(\Omega)$ *имеет единственное решение* $u \in B^{m-N}(\Omega)$, *причем для всех* $u \in B^{m-N}$, *удовлетворяющих нулевым данным Коши имеет место неравенство*

$$|D^{m-N} u|_\infty \leqslant c\, \|D^q Pu\|_1, \tag{40}$$

где постоянная $c>0$ не зависит от u, а постоянная $q>0$ зависит только от постоянных M_j, $j=1, 2, \cdots, N$, фигурирующих в (27) и функции Φ.

Теорема 3. *Если оператор P монотонно гиперболичен, а граничные операторы удовлетворяют условиям типа Лопатинского* (38), *то смешанная задача* (36), (37) *при $f \in L^q(\Omega)$ имеет единственное решение $u \in B^{m-N}(\Omega)$, причем для всех $u \in B^{m-N}(\Omega)$, удовлетворяющих нулевым данным Коши и граничным данным* (37), *имеет место неравенство*

$$|D^{m-N} u, \Omega| \leqslant c\,|D^q Pu, \Omega|. \tag{40'}$$

§ 7. Вспомогательные задачи для последовательности разделяющих операторов

Выберем постоянные d_j^k в определении последовательности разделяющих операторов P^k (2), (9) так, чтобы

$$\lambda_1^k < \lambda_2^k < \cdots < \lambda_{\nu-k}^k < 0 < \lambda_{\nu+1-k}^k < \cdots < \lambda_{m+1-k}^k, \tag{41}$$

при $x = 0$, $t \in [0, T]$, $k = 0, 1, \cdots, \nu - 1$.

Рассмотрим смешанные задачи для разделяющих операторов ($k = 0, 1, \cdots, \nu - 1$)

$$P^k u = f, \tag{42}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^i u(0, x) = 0,\ i = 0, 1, \cdots, m - k, \tag{43}$$

$$\tilde{\Gamma}_j^k u = \sum_{s=0}^{m+j-\nu} \gamma_{js}(t)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m+j-s-\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^s u(t, 0) = 0,\ j = 1, 2, \cdots, \nu - k. \tag{44}$$

По определению

$$\tilde{\Gamma}_j^k u = 0,\ j = 1, 2, \cdots, \nu - k \Rightarrow \tilde{\Gamma}_j^{k+1} u = 0,\ j = 1, 2, \cdots, \nu - 1 - k. \tag{45}$$

Это свойство играет важную роль в § 8.

Дифференцируя по t условия (44) $(\nu - j)$ раз получим новые граничные условия:

$$\Gamma_j^k u = \sum_{s=0}^{m+j-\nu} \gamma_{js}(t)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m-s}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^s u(t, 0) + \cdots, \tag{45'}$$

здесь точками обозначены слагаемые, содержащие производные порядка $\leqslant m - 1$.

Введем матрицы

$$(P_s^k)_{lj} \equiv Y(m + 2 - s)\,\delta_{1j}\Bigg|\sum_{\substack{l_1 < l_2 < \cdots \\ l_1, l_2, \cdots \neq s}} (-\lambda_{l_1})(-\lambda_{l_2})\cdots(-\lambda_{l_{m+1-s}}) +$$

$$+ Y(j - m - 1)\,\hat{b}_j^1\Bigg| + Y(s - m - 1)\,\delta_{l,\,m+2}\,\delta_{1j}\left(A_{ss}^0 - \frac{\hat{b}_s^1\,\hat{b}_s^1}{m+1}\right).$$

Справедливы следующие, легко проверяемые равенства

$$A^0(k) = \sum_{l=1}^{l} d_l^k P_l^k (P_l^k)^T,$$
$$A(k) = -\sum_{l=1}^{l} d_l^k \lambda_l^k P_l^k (P_l^k)^T, \tag{46}$$

причем, по определению $d^k_{m+2-k} = \cdots = d^k_{l-1} = d^k_l = 1$, а $\lambda^k_{m+2-k}, \cdots$ $\cdots, \lambda^k_{l-1}, \lambda^k_l$ зависят от $A_{m+2,m+2}, \cdots, A_{ll}$, соответственно, и выбираются таким образом, что выполнены равенства (46).

Обозначим

$$\hat{A}^0(k) = \sum_{l=1}^{l} P_l^k (P_l^k)^T, \quad \hat{A}(k) = -\sum_{l=1}^{m+1-k} \lambda_l^k P_l^k (P_l^k)^T,$$

$$\tilde{\omega}_k(t) = \frac{\prod\limits_{j<l<\nu-k} (\lambda_l^k - \lambda_j^k)(t,0)}{\prod\limits_{\nu-k\le j<l} (\lambda_l^k - \lambda_j^k)(t,0)},$$

$$\omega_k(t) = \prod_{j<l} (\lambda_l^k - \lambda_j^k)(t,0),$$

$$k = 0,1,\cdots, N-1;\ i,\ j = 1,\ 2,\cdots,\ m+1-k.$$

Лемма 6. *Если* ($k = 0,\ 1,\cdots,\ \nu-1$, k *фиксировано*)

$$\frac{1}{\omega_k \tilde{\omega}_k} \det \left\| \sum_{s=0}^{m+p-\nu} \gamma_{ps}(t) (\lambda^k_{\nu+1-k-q})^{m-s}(t,0) \right\|_{p,q=1}^{\nu-k} \neq 0 \tag{47}$$

для всех $t \in [0, T]$, *то справедлива оценка*

$$\sum_{j=1}^{\nu-k} \Gamma_j^k (\Gamma_j^k)^T + \sum_{j=\nu+1-k}^{l} P_j^k (P_j^k)^T \geqslant c \cdot \hat{A}^0(k). \tag{48}$$

Заметим, что ввиду того, что по предположению (35) слипающиеся характеристики, исходящие из начала координат, выходят из Ω, условие (47) при $k=0$ совпадает с (38). В том случае, когда слипающиеся характеристики входят в Ω, необходимы дополнительные условия согласования (см. [14], [17]).

Доказательство. Вводя матрицы

$$V_{ij}^k = \delta_{ij}\, Y(i+k-m-1)\sqrt{A_{ll}^0 - \frac{\hat{b}_l^1 \hat{b}_l^1}{m+1}} +$$
$$+ Y(m+2-k-j)\sqrt{d^k_{m+2-k-j}} \left| \sum_{\substack{s_1<s_2<\cdots \\ s_1, s_2, \cdots \neq m+2-j}} (-\lambda^k_{s_1})(-\lambda^k_{s_2}) \cdots \right.$$
$$\left. \cdots (-\lambda^k_{s_{l-1}}) + \frac{\hat{b}_l^1}{m+1} \right|,$$

$$\Xi = Y(\nu+1-k-i)\,Y(m+1+i-\nu-j)\,\gamma^k_{i,\,j-1} + Y(m+2-k-j) +$$

$$+ Y(m+2-k-i)\,Y(i+k-\nu)\sum_{s\neq i}(-\lambda^k_{s_1})\cdots(-\lambda^k_{s_{j-1}}) +$$

$$+ Y(i-m-1)\,\delta_{ij}\sqrt{A^0_{ii}-\frac{\hat{b}^1_i\,\hat{b}^1_i}{m+1}}.$$

$$i,\ j=1,\ 2,\cdots,\ l,$$

имеем

$$A^0(k)\equiv V^k\,(V^k)^T$$

$$(\Gamma^k_1\ u,\ \Gamma^k_2\ u,\cdots,\ \Gamma^k_{\nu-1-k}\ u,\ \cdots,\ P^k_{m+1-k}\ u,\cdots,\ P^k_l\ u)^T=$$

$$=\Xi\eta^T=\Xi\,(V^k)^{-1}\,V^k\,\eta^T.$$

Для выполнения оценки (48) достаточно потребовать, чтобы

$$\det\ \Xi\ (V^k)^{-1}\neq 0,\ \text{при}\ x=0,$$

Преобразуя это условие, получим (47).

Лемма 7. *Для любого (малого)* $\varepsilon>0$ *постоянные* $d^k_i\ (i=1,2,\cdots$ $\cdots,\nu-k)$ *можно выбрать так, что имеет место оценка*

$$\varepsilon\,\mathring{A}^0(k)-A(k)\geqslant c\sum_{j=\nu+1-k}^{l}P^k_j\,(P^k_j)^T, \tag{49}$$

здесь постоянная c справа не зависит от ε.

Доказательство. Воспользовавшись равенствами (46) и предположением (41) имеем

$$\varepsilon\,\mathring{A}^0-A=\sum_{i=1}^{\nu-k}(\varepsilon+d^k_i\lambda^k_i)\,P^k_i\,(P^k_i)^T+$$

$$+\sum_{i=\nu+1-k}^{m+1-k}(\varepsilon+d^k_i\lambda^k_i)\,P^k_i\,(P^k_i)^T+\sum_{i=m+2-k}^{l}(\varepsilon+\lambda^k_i d^k_i)\,P^k_i\,(P^k_i)^T\geqslant$$

$$\geqslant c\sum_{j=\nu+1-k}^{l}P^k_j\,(P^k_j)^T,$$

здесь в первой сумме $\varepsilon+d^k_i\lambda^k_i>0$ (при $1\leqslant i\leqslant\nu-k$) за счет выбора малых $d^k_1,\ d^k_2,\cdots,\ d^k_{\nu-k}$; во второй сумме $\varepsilon+d^k_i\lambda^k_i>c>0$ (при $\nu+1-k\leqslant i\leqslant m+1-k$) ввиду того, что $\lambda^k_{\nu+1-k},\cdots,\lambda^k_{m+1-k}>0$ и, наконец, в третьей сумме $\varepsilon+d^k_i\lambda^k_i=\varepsilon+d^k_i>c$ (при $m+2-k\leqslant i\leqslant l$) за счет выбора $A_{m+2,\,m+2},\cdots,\ A_{l-1,\,l-1},\ A_{ll}$.

Лемма 8. *Если оператор P слабо гиперболичен, то*

$$\eta A^0(k)\eta^T\geqslant\frac{1}{m+1}\,|P^{k+1}\ u|^2. \tag{50}$$

Доказательство. Запишем выражение $|P^{k+1}u|^2$ в виде

$$|P^{k+1}u|^2 = \eta\, \Pi_{k+1}\, \eta^T,$$

где Π_{k+1} — симметричная матрица размера $l\times l$. Непосредственным вычислением легко проверить, что $(m+1)\,A^0(k)\geqslant \Pi_{k+1}$, если матрицы $A^0(k)(k=0,\ 1,\cdots,\ m+1)$ неотрицательны, а это следует из того, что оператор P слабо гиперболичен.

Лемма 9. *Если оператор P слабо гиперболичен и выполнены условия* (35), (48), (49) *и* $\mathbf{H}(k)\geqslant 0$ $(k=0,\ 1,\cdots,m)$ *то имеют место следующие энергетические оценки:*

а) *если оператор P^{k+1} c-гипербличен, то*

$$\frac{1}{m+1}\,|P^{k+1}u,\ S_t|^2 \leqslant \int \eta A^0(k)\,\eta^T dS_t \leqslant c\,|P^k u|_1^2, \tag{51}$$

б) *если оператор P^{k+1} монотонно гиперболичен и существует $\delta>0$ такое, что*

$$\eta\, A^0(k)\,\eta^T = O\,(\mu^{M+\delta}(t)),\ t\to +0, \tag{52}$$

то

$$\int_{t_0}^{T} d\tau \int dx\, |\Phi_t|\,\eta A^0(k)\,\eta^T \leqslant \int |P^k u|^2\, d\Omega + \int \eta A^0(k)\,\eta^T\, dS_{t_0} \tag{53}$$

и

$$\int \eta\, A^0(k)\,\eta^T\, dS_{t_0} \leqslant c\,\mu^{2(M+\delta)}(t_0)\,|P^k u/\mu^{M+\delta}|_1^2. \tag{54}$$

Оценки (51)—(54) *справедливы для всех* $u\in H_0^{m+1}(\Omega)$ *и удовлетворяющих условиям* (43), (44).

Доказательство. Пусть $\Omega_1=\Omega\cap\{t<t_0\}$, $\Omega_2=\Omega\cap\{t>t_0\}$, $u\in H_0^{m+1}(\Omega)$ (u финитна), и u удовлетворяет нулевым начальным и граничным данным (43), (44). Тогда если P^k c-гиперболичен, то (51) получается интегрированием по Ω дивергентного тождества (13) и применением леммы Гронуолла (см., например, [24]).

Если же P^k монотонно гиперболичен, то интегрируя по областям Ω_1 и Ω_2 равенства (13) и соответственно (13) умноженное на функцию $\Psi=e^{-\theta t}\Phi(t)\ \theta>0$, получим

$$\int \eta\, A^0(k)\,\eta^T dS_{t_0} - \int_{x=0} \eta\, A(k)\,\eta^T dB_1 + \int \eta\, \mathbf{H}(k)\,\eta^T\cdot d\Omega_1 =$$

$$= \int K(\tau)\,\eta\, A^0(k)\,\eta^T\, d\Omega_1 + 2\int P^{k+1}u\ P^k u\, d\Omega_1,$$

$$\int \eta\, A^0\,\eta^T\cdot |\Psi_t|\, d\Omega_2 - \int_{x=0} \eta\,(\Psi A)\,\eta^T\, dB_2 + \int \eta\,(\Psi\mathbf{H})\,\eta^T\, d\Omega =$$

$$= \int \eta\,(\Psi A^0)\,\eta^T\, dS_{t_0} + \int \eta\,(K\Psi A^0)\,\eta^T\cdot d\Omega_2 + 2\int \Psi\, P^k u\, P^{k+1}u\, d\Omega_2.$$

Так как из (48), (49) следует оценка

$$\sum_{j=1}^{r-k} \Gamma_j^k (\Gamma_j^k)^T - A \geqslant c \dot{A}^0 \geqslant 0 \tag{55}$$

и $K\Psi \leqslant (c+|\Phi'|/\Phi)\,\Psi \leqslant \left(\theta + \frac{|\Phi'|}{\Phi}\right)\Psi = |\Psi_t|$ при достаточно большом $\theta > 0$, то получаем следующие неравенства:

$$\int \eta A^0(k)\,\eta^T\, dS_{t_0} \leqslant \int K(\tau)\,\eta A^0(k)\,\eta^T\, d\Omega_1 + 2\int |P^k u\; P^{k-1} u|\, d\Omega_1, \tag{56}$$

$$\int |\Psi_t|\,\eta A^0(k)\,\eta^T d\Omega_2 \leqslant \int \eta A^0 \eta^T \Psi\, dS_{t_0} + 2\int \Psi P^k u\; P^{k-1} u\, d\Omega_2. \tag{57}$$

Неравенство (53) следует непосредственно из (57), а оценка (54) вытекает из (56) и условия (52) применением леммы 2.1.2 из [6].

§ 8. Получение априорных оценок

Этот параграф посвящен получению априорной оценки (40) с потерей гладкости (для монотонно гиперболических операторов) из неестественных оценок (56), (57).

С целью преобразования оценки (56) рассмотрим, для простоты, случай одной группы слипающихся характеристик, точнее, пусть $l=1$, $N=r-1$, а оператор P^{r-1} строго гиперболичен.

Введем новые вспомогательные операторы E_j^k ($j=1, 2, \cdots, r-1$) порядка $m+1-k$ с характеристическими корнями $\nu_q(t, x)$ ($q=1, 2, \cdots, m+1$), которые задаются следующими соотношениями:

$$\begin{gathered} \nu_1 \equiv \lambda_1^k(t, x), \cdots, \nu_{s+j-1} \equiv \lambda_{s+j-1}^k(t, x), \\ \nu_{s+j} \equiv \nu_{s+j+1} \equiv \cdots \equiv \nu_{s+r} = \lambda_{s+r}^k(t, x), \\ \nu_{s+r+1-k} \equiv \lambda_{s+r+1-k}^k(t, x), \cdots, \nu_{m+1-k} \equiv \lambda_{m+1-k}^k(t, x). \end{gathered} \tag{58}$$

Младшие символы операторов E_j^k, k, $j>0$ (E_j^0, $j>1$) выбираем так, чтобы операторы E_1^k, $k>0$ (E_j^1, $j>1$) были бы c-гиперболичны (монотонно гиперболичны. Заметим, что такой выбор, очевидно, всегда возможен. Через E_r^k обозначим (для удобства) оператор P^k. По определению, E_1^k — оператор с характеристикой ν_{s+1} постоянной кратности $r \geqslant 1$.

Пусть функции $u_{i+1}(t, x)$ являются решениями смешанных задач

$$E_j^0 u_{i+1} = f_i, \quad i=0,1,\cdots, q_j \tag{59}$$

с нулевыми начальными и граничными условиями (43), (44) при $k=0$.

Функции $f_i(t, x)$ определяются из рекуррентных соотношений

$$f_0 \equiv f(t, x), \quad f_i \equiv (E_j^0 - E_{j-1}^0)\, u, \quad j=1, 2, \cdots, q_j. \tag{60}$$

Вычитая из уравнения $E^0_{j+1}u=f$ уравнения (59), получим

$$E^0_{j+1}\,\overset{*}{u}=f_{q_j},\ \overset{*}{u}\equiv u-u_1-u_2-\cdots-u_{q_j}. \tag{61}$$

Лемма 10. *Пусть* $\overset{*}{u}\in H_0^{m+2}(\Omega_1)$, *P — монотонно гиперболичен*, $\bar{l}=1$, P^{r-1} — *строго гиперболичен и*

$$\int_0^{t_0}|E^0_{j-1}\,u,\ S_\tau|/\tilde{\mu}_j^{-1}(\tau)\,d\tau<\infty,\ \tilde{\mu}_j\equiv\mu_j^{M+3}. \tag{62}$$

Тогда младшие члены операторов E^1_j можно выбрать так, что

$$\mathbf{H}(K_j,\ E^0_{j+1},\ E^0_j)>0,\ K_j\equiv c+M_j\,\mu_j'/\mu_j;\ j=0,\cdots,r-1, \tag{63}$$

$$\mu_0\equiv 1,\ K_0\equiv c=\mathrm{const},$$

$$\eta\overset{*}{A}{}^0(K_j,\ E^0_{j+1},\ E^1_{j+1})\,\eta^T=O(\tilde{\mu}_j),\ t\to+0, \tag{64}$$

$$|E^1_{j+1}\,\overset{*}{u},\ S_\tau|\leqslant c\cdot\tilde{\mu}_j(\tau)\,|E^0_{j+1}\,\overset{*}{u}/\tilde{\mu}_j|_1,\ 0<\tau<t_0. \tag{65}$$

Доказательство. Неравенство (63) вытекает из монотонной гиперболичности P, т. е. из неравенства $\mathbf{H}(K,\ P^0,\ P^1)>0$. Если $j=0$ ($\tilde{\mu}_0\equiv 1$) оценки (64), (65), очевидно, справедливы. Пусть

$$\overset{*}{\eta}A^0(K_{j-1},\ E^0_j,\ E^1_j)\,\overset{*}{\eta}{}^T\leqslant c\cdot\tilde{\mu}_{j-1}\,|E^0_j\,\overset{*}{u}/\tilde{\mu}_{j-1}|_1,$$

тогда

$$\overset{*}{\eta}A^0(K_{j-1},\ E^0_j,\ E^1_j)\,\overset{*}{\eta}{}^T\leqslant c\,\tilde{\mu}_{j-1}\left\{\left|\frac{E^0_{j+1}\overset{*}{u}}{\tilde{\mu}_{j-1}}\right|_1+\left|\frac{(E^0_j-E^0_{j+1})\,\overset{*}{u}}{\tilde{\mu}_{j-1}}\right|_1\right\}\leqslant$$

$$\leqslant c\,(\tilde{\mu}_j+\mu_j^{\theta/}).$$

Легко проверить, что

$$(E^0_{j+1}-E^0_j)\,\hat{u}=O((\mu_j^{\theta/})_t),$$

$$A^0(K_{j-1},\ E^0_j,\ E^1_j)-A^0(K_j,\ E^0_{j+1},\ E^1_{j+1})=O(\mu_j),\ t\to+0,$$

поэтому

$$\overset{*}{\eta}A^0(K_{j-1},\ E^0_j,\ E^0_{j+1})\,\overset{*}{\eta}{}^T=O(\mu_j^{\theta/}),\ t\to+0,$$

отсюда

$$(E^0_{j+1}-E^0_j)\,\overset{*}{u}=O((\mu_j^{2\theta/})_t),\ t\to+0.$$

После многократного повторения этой процедуры получим

$$\overset{*}{\eta}A^0(K_{j-1},\ E^0_j,\ E^1_j)\,\overset{*}{\eta}{}^T=O(\tilde{\mu}_j),\ t\to+0, \tag{66}$$

$$\overset{k}{\eta}[A^0(K_j, E^0_{j+1}, E^1_{j+1}) - A^0(K_{j-1}, E^0_j, E^1_j)]\ \overset{k}{\eta}{}^T = O(\tilde{\mu}_j),\ t \to +0. \quad (67)$$

Из этих оценок получаем (64), а из леммы 9 следует (65).

Выбирая младшие члены операторов E^k_j (при $k > 0$) так, чтобы операторы $E^k_j (k > 0)$ были бы c-гиперболичны, получаем из леммы 9 оценки

$$|E^{k+1}_j u|_\infty \leqslant c\,|E^k_j u|_1, \quad (68)$$

$$|E^{k+1}_j u|_\infty \leqslant c \cdot t^k\,|E^1_j u|_\infty.$$

Лемма 11. *Если для всех $u \in C^\infty_0(\Omega)$, удовлетворяющих начальным и граничным условиям* (43), (44), *справедлива оценка*

$$|E^1_j u,\ S_t| \leqslant c\,|D^{\bar{q}_j} E_j u|_1, \quad (69)$$

то для тех же классов функций и справедлива оценка

$$|E^1_{j+1} u,\ S_t| \leqslant c\,|D^{\bar{q}_{j+1}} E^0_{j+1} u|_1, \quad (70)$$

причем

$$\bar{q}_{j+1} = [r + (r-1)\,\bar{q}_j]\, q_j,\quad q_j = 1 + \left[\frac{M_j}{\varepsilon_j}\right],\ \bar{q}_1 = 0,$$

$$\tilde{q}_{j+1} \leqslant r^{j+1} q_1 q_2 \cdots q_j \leqslant r^r \prod_{j=1}^{r}\left(1 + \left[\frac{M_j}{\varepsilon_j}\right]\right). \quad (71)$$

Здесь [ ] — целая часть числа.

Доказательство. Нетрудно показать, что

$$E^0_{j+1} - E^0_j = O(\lambda_{s+j,\,t} - \lambda_{s+r,\,t}) = O\left(\frac{\partial}{\partial t}\ \mu^k_j\right),$$

$$E_{j+1} - E_j = O\left(\frac{\partial}{\partial t}\ \mu^k_j\right),\ j = 1, \cdots, r-1, \quad (72)$$

$$\|\Lambda\mathbf{H}(K, F^0, P^1)\,\Lambda^T\|_1 = O\left(\frac{\partial}{\partial t}(\lambda_{s+1} - \lambda_{s+2})\right),$$

$$i = m + 3 - r, \cdots, \theta - 1,\ \theta,\ t \to +0.$$

По определению операторы E^{r-1}_i (порядка $m + 2 - r$) имеют кратность $r - (r-1) = 1$, т. е. строго гиперболичны. Поэтому (см., например, [24])

$$|D^{m+1-k} u,\ S_{t_1}| \leqslant c \int_0^{t_1} d\tau\,|D^{r-k} E^{r-1}_l u,\ S_\tau| \leqslant$$

$$\leqslant c \int_0^{t_1} (t-\tau)^{r-k-1}\,|D^{r-k} E^k_1 u,\ S_\tau|\,d\tau,\ t_1 \leqslant t_0.$$

Далее

$$|f_l, S| \leqslant c \cdot (\mu^{\varepsilon_j})_t \int_0^t (t-\tau)^{r-k-1} \, |D^{\overline{q_j+1}/q_j} f_{l-1}, S_\tau| \, d\tau,$$

$$\left|\frac{f_{q_j}}{\overline{\mu}_j}\right|_1 \leqslant c \, |D^{\overline{q_j+1}/q_j} f_{q_j-1} / \mu_j^{M_j+\delta-\varepsilon_j(1-\delta)}|_1, \; \delta > 0$$

и так как при $q_j = 1 + \left[\frac{M_j}{\varepsilon_j}\right]$ справедливо неравенство $M_j + \delta - q_j \varepsilon_j (1-\delta) > 0$, то

$$|f_{q_j} / \tilde{\mu}_j|_1 \leqslant c \, |D^{\tilde{q}_{j+1}} f|_1,$$

и применяя лемму 10, получаем

$$|E_{j+1}^{k+1} \hat{u}, S_t| \leqslant c \, |D^{\overline{q}_{j+1}} f|_1$$

или

$$|E_{j+1}^{k+1} \hat{u}, S_t| \leqslant c |D^{\tilde{q}_{j+1}} E_{j+1}^k u|_1 + \sum_{l=1}^{q_j} |E_j^{k+1} u_l, S_t|,$$

отсюда получаем (70), так как

$$|E_{j+1}^{k+1} u, S| < c \, |D^{\overline{q}_{j+1}} E_{j+1}^k u|_1.$$

Оценки (71) вытекают из неравенств $q_i > 1$, $r > 1$, $i = 1, 2, \cdots, r$.

Лемма 12. *В условиях леммы* 10 *и*

$$|t^{1-k} a_{m+1-k}| \leqslant \text{const}, \; k = 1, 2, \cdots, m+1 \tag{73}$$

имеют место неравенства

$$|E_{j+1}^1 u, S_t| \leqslant c \, \tilde{\mu}_j \left|\frac{E_{j+1} u}{\tilde{\mu}_j}\right|_1, \tag{74}$$

где с не зависит от и.

Доказательство. Из леммы 9 имеем

$$|E_{j+1} u, S|^2 \leqslant \int_0^t d\tau \left\{ K_j(\tau) \int dS_\tau A^0 (K_j, E_{j+1}^0, E_{j+1}^1) u \overline{u} \right\} +$$

$$+ |E_{j+1}^0 u|_1 \cdot |E_{j+1}^1 u|_\infty,$$

но

$$|E_{j+1}^0 u|_1 \leqslant |E_{j+1} u|_1 + c \sum_{k=1}^{r-1} t^{-k} |a_{m-k}| \cdot |E_j^{k+1} u|_1,$$

поэтому

$$|E_{j+1} u|_x \leqslant c\, |D^q E_{j+1} u|_1.$$

Отсюда при $j = r - 1$ получаем оценку в Ω_1

$$\int |P^{k+1} u\, | dS_t \leqslant c \int_0^{t_0} |D^{q-m} P^k u|_- \, dt$$

и

$$\int |D^m u|^2 \, dS_{t_0} \leqslant c \left| \int_0^{t_0} |D^q P^k u|_- \, dt \right|^2. \tag{75}$$

Из оценки (57), пользуясь тем, что функция $\Phi(t)$ имеет при $t = T - 0$ конечного порядка (Φ аналитична), по схеме, предложенной Олейник [5], нетрудно получить оценку

$$\int |P^{k+1} u|^2 \, d\Omega_2 \leqslant \int |D^m u|^2 \, dS_{t_0} + \int |D^q P^k u|^2 \, d\Omega_2. \tag{76}$$

Окончательная оценка (40) получается сложением неравенств (75) и (76). Теоремы 1--3 вытекают из априорных оценок (39), (40).

§ 9. Примеры

Нетрудно убедиться на примерах, что если все монотонно сливающиеся характеристики, исходящие из начала координат, выходят из области Ω, то обычное условие Лопатинского (L) является естественным для корректности смешанных задач для монотонно гиперболических уравнений.

В противном случае вырождение может привести к ослаблению условия (L) (см. [17]). Приведем пример такой ситуации.

Пример 1. Методом характеристик можно показать, что решением смешанной задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \; x > 0, \; t > 0,$$

$$u(0, x) = \mu(x), \; \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0, \; 0 < x < \infty,$$

$$\gamma_1(t) \frac{\partial u(t, 0)}{\partial t} + \gamma_2 \frac{\partial u(t, 0)}{\partial x} = \varphi(t); \; \varphi \in L_1[0, T]$$

является функция

$$u(t, x) = \begin{cases} \mu\left(x - \dfrac{t^2}{2}\right), & x > \dfrac{t^2}{2} \\ \mu(0) + \displaystyle\int_0^{\sqrt{t^2 - 2x}} \frac{\tau \varphi(\tau)\, d\tau}{\tau \gamma_1(\tau) - \gamma_2(\tau)}, & 0 < x \leqslant \dfrac{t^2}{2}, \end{cases}$$

Условие типа Лопатинского в этом случае (см. [17]) имеет вид

$$\frac{\tau\gamma_1(\tau) - \gamma_2(\tau)}{\tau} \neq 0, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant T,$$

и, как явствует из вида решения, является естественным.

Пример 2. Пусть $P = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant m+1} a_\alpha(t, x) D^\alpha$, $a_\alpha \in C^\infty$, оператор P строго гиперболичен всюду вне прямой $x = 1$, а на прямой $x = 1$ $(m + 1 - r)$ характеристик различны, а r характеристик слипаются, т. е.

$$|\lambda_i| \leqslant c \cdot |x-1|^p, \ |\lambda_i - \lambda_j| \geqslant c\,|x-1|^p, \ i \neq j, \ i, j = 1, \cdots, r. \tag{80}$$

Тогда, если младшие коэффициенты оператора удовлетворяют условиям

$$|a_\alpha| \leqslant c \cdot |x-1|^\omega, \ \alpha_0 \leqslant r-2, \ |\alpha| \leqslant m; \ \omega = p\,(r - 1 - \alpha_0 + |\alpha| - m), \tag{81}$$

то нетрудно проверить, что оператор P c-гиперболичен и по теоремам 1, 3 как задача Коши, так и смешанная задача для него хорошо поставлена. Необходимость условий (81) известна ([29]).

Пример 3. По теореме 3 задача Коши

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda_3 \frac{\partial}{\partial x}\right) u + \beta_{11} u_{tx} + \beta_{02} u_{xx} +$$

$$+ \beta_{01} u_x = f; \ u(0, x) = u_t(0, x) = u_{tt}(0, x) \tag{82}$$

$\lambda_i(t) = c_i (T-t)^k$, $i = 1, 2, 3$, c_i — постоянные, в области Ω корректна, если

$$8\,[(c_1-c_2)^2 + (c_1-c_3)^2 + (c_2-c_3)^2][c_1^2\,(c_2-c_3)^2 + c_2^2\,(c_1-c_3)^2 + c_3^2\,(c_1-c_2)^2] \geqslant$$

$$\geqslant 9\,[c_1\,(c_2-c_3)^2 + c_2\,(c_1-c_3)^2 + c_3\,(c_1-c_2)^2]^2, \tag{83}$$

$$|\beta_{11}| \leqslant c\,(T-t)^{k-1}, \ |\beta_{01}| \leqslant c\,(T-t)^{k-2}, \ |\beta_{02}| \leqslant c\,(T-t)^{2k-1}. \tag{84}$$

Необходимость условий (84) известна, в то время как вопрос о естественности условия (83) остается открытым.

Отметим также, что неясно справедлива ли теорема 3 в том случае, когда функция $\Phi(t)$ не является аналитической (т. е. сохраняют ли свой вид условия корректности при бесконечной скорости слипания характеристик внутри области)?

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 22.IV.1978

Գ. Ռ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ. Խառը խնդիրներ բարձր կարգի թույլ հիպերբոլական հավասարումների համար երկու անկախ փոփոխականների դեպքում (*ամփոփում*)

Դիցուք տրված է փոփոխական գործակիցներով P դիֆերենցիալ օպերատոր, որի բնութագրիչները իրական են և ունեն փոփոխական պատիկություն։ Հոդվածում ապացուցվում է, որ եթե P օպերատորով կազմված որոշակի H մատրիցան բացասական չէ, ապա P օպերատորի համար կոռեկտ է ոչ բնութագրիչ Կոշու խնդիրը։

Եթե սկզբնակետից ելնող հավող բնութագրիչները դուրս են գալիս առաջին քառորդից (որտեղ դիտարկվում է խնդիրը), իսկ եզրային և P օպերատորները բավարարում են համաձայնեցման պայմանին, ապա կոռեկտ է նաև խառը խնդիրը P օպերատորի համար։

G. R. HOVHANNISIAN. *Mixed problems for high order weakly hyperbolic equations in two independent variables* (summary)

In the paper conditions are found under which the non-characteristic Cauchy problem for a differential operator with real characteristics is well-posed.

Conditions for the mixed problem to be well-posed are also found. There are some examles and comparisons with classical classes of hyperbolic operators.

ЛИТЕРАТУРА

1. *R. Hersh.* Mixed problems in several variables, Journ. Math. Mech., 12, 1963, 317—334.
2. *H.—O. Kreiss.* Initial boundary value problems for hyperbolic systems, Comm. pure. Appl. Math., 23, 1970, 277—2`8.
3. *Р. Сакамото.* Смешанные задачи для гиперболических уравнений, «Матем..ика», Сб. пер. ин. статей, 16:1, 1972, 62—80.
4. *М. С. Агранович.* Одна теорема о матрице, зависящей от параметра и ее приложения к гиперболическим системам, Функц. анализ и его прил., 6:2, 1972, 1—11.
5. *O. A. Oleinik.* On the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations, Comm. pure Appl. Math., 23:4, 1970, 569—585.
6. *А. Б. Нерсесян.* Задача Коши для слабо гиперболических уравнений, Докторская диссертация, Киев, 1976.
7. *А. О. Оганесян.* О корректности задачи Коши для слабо гиперболических уравнений, Диссертация, Ереван, 1975.
8. *Г. Р. Оганесян.* Условия корректности задачи Коши для некоторых классов слабо гиперболических уравнений, Диссертация, Ереван, 1975.
9. *В. М. Петков.* О задаче Коши для симметризуемых систем и для нестрого гиперболических уравнений, УМН, 26:6, 1971, 251—252.
10. *A. Menikoff.* The Cauchy problem for weakly hyperbolic equations, Amer. J. of Math., 97:2, 1975, 548—558.
11. *Yu. Ohya.* Le probleme de Cauchy a caracteristiques multiples, C. R. Acad. Sci. Paris, 282:24, 1 76, A 1433—1436.
12. *R. Beals.* Hyperbolic equations and systems with multiple characteristics, Arch. Ration. Mech. And Anal., 48:2, 1972, 123—152.
13. *К. А. Ягджян.* Смешанная задача для некоторых классов несимметризуемых гиперболических систем, Изв. АН АрмССР, сер. матем., XI, № 5, 1976, 424—431.
14. *К. А. Ягджян.* Необходимые условия корректности смешанной задачи для нестрого гиперболических систем, ДАН АрмССР, LXIV, № 2, 1977, 91—95.
15. *Р. Г. Айрапетян.* Смешанная задача для гиперболических уравнений второго порядка, Изв. АН АрмССР, сер. матем., XII, № 1, 1977, 32—45.
16. *Р. Г. Айрапетян.* Смешанная задача для вырождающихся гиперболических уравнений второго порядка при нарушении равномерного условия Лопатинского, ДАН АрмССР, LXV, № 1, 1977, 3—9.
17. *Г. Р. Оганесян.* О некоторых смешанных задачах для слабо гиперболических уравнений, ДАН АрмССР, LXV, № 3, 1977, 132—135.
18. *Ж. Лере, Л. Гординг, Т. Котаке.* Задача Коши, М., Изд. «Мир», 1967.
19. *Г. Фляшка, Г. Стрэнг.* Корректность задачи Коши, «Математика», Сб. пер. ин. статей, 17:2, 1973, 74—97.

20. *S. Mizohata. Yu. Ohya.* Sur la condition de E. E. Levi concernant de equations hyperboliques, Publ. RIMS Kyoto Univ., A4, 1969, 511—526.
21. *Yu Ohya.* On E. E. Levi's functions for hyperbolic equations with triple characteristics, Comm Pure Appl. Math., 25, 1972, 252—263.
22. *J. Chazarain.* Operateur hyperboliques a caracteristiques de multiplicite constante, Ann. Inst. Fourier, 24:1, 1974.
23. *J. Leray.* Lectures on hyperbolic equations, Inst. for Advanced study, Princeton, 1952.
24. *Л. Гординг.* Задача Коши для гиперболических уравнений, М., ИИЛ, 1961.
25. *V. Thomee.* Estimates of Friedrichs—Lewy type for mixed problems in the theory of linear hyperbolic diff. equations in two independent variables, Math. Scand., 5, 1957, 93—113.
26. *G. Peyser.* Energy integrals for mixed problem in hyperbolic partial diff. equations of higher order, J. Math. and Mech., 6:5, 1957, 641—653.
27. *G. Peyser.* Hyperbolic systems with multiple characteristics, Journ. Diff. Eq., 9, 1971, 509—520.
28. *Л. Хёрмандер.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными, М., Изд. «Мир», 1965.
29. *В. Я. Иврий, В. М. Петков.* Необходимые условия корректности задачи Коши для нестрого гиперболических уравнений, УМН, 29: 5, 1974, 3—70.
30. *Ф. Р. Гантмахер.* Теория матриц, Изд. «Наука», 1967.