ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIV, № 5, 1979 Математика

В. С. ЗАХАРЯН, Л. А. СЕХПОСЯН

# ОЦЕНКА РОСТА ДЛЯ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ КЛАССА $N\{\omega\}$

1°. Введение. Обозначим через $\Omega$ множество функций $\omega(r)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $\omega(r)$ — положительна и непрерывна на $[0; 1)$;

2) $\omega(0)=1,\ \int\limits_0^1 \omega(x)\,dx < +\infty$;

3) в некоторой окрестности $0 \leqslant r < \delta < 1$ точки $0$ выполняется условие

$$|\omega(r)-1| = |\omega(r)-\omega(0)| < C(\delta)\cdot r.$$

В случае, когда функция $\omega(x)\in\Omega$ не убывает на $(0; 1)$, такие функции отнесем к классу $\Omega_0\subset\Omega$.

Обозначим через $\Omega_0^*$ подмножество функций $\omega(x)$ из класса $\Omega_0$, подчиненных дополнительному условию:

$$\lim_{x\to 1-0}\sup \frac{(1-x)\,\omega'(x)}{\omega(x)} < 1. \tag{1}$$

Доказано [1], что если $\omega(x)\in\Omega_0^*$, то при $r\in[0, 1)$

$$(1-r)\,\omega(r) \leqslant \int\limits_r^1 \omega(x)\,dx \leqslant \alpha(1-r)\,\omega(r), \tag{2}$$

где $\alpha > 1$ постоянная.

Отсюда видно, что при $r\to 1-0$

$$\int\limits_r^1 \omega(x)\,dx = O((1-r)\,\omega(r)), \tag{3}$$

которое нам понадобится в дальнейшем.

Введем, как и в работе [2], следующие функции:

$$C(z;\ \omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Delta_k},\quad S(z;\ \omega) = 1+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{\Delta_k}, \tag{4}$$

где

$$\Delta_0 = 1, \ \Delta_k = \int_0^1 \omega(x) x^{k-1} dx \quad (k = 1, 2, \cdots), \tag{5}$$

а функция $\omega(x) \in \Omega_0$.

Эти функции связаны соотношением

$$S(z; \omega) = 2C(z; \omega) - 1. \tag{6}$$

В дальнейшем существенно используется следующее доказанное в работе [1] неравенство

$$C(r; \omega) \leqslant \gamma \, |(1-r)\omega(r)|^{-1}, \tag{7}$$

где $\gamma$ $(0 < \gamma < +\infty)$ не зависит от $r$, а $\omega(x) \in \Omega_0^*$.

Пусть $\omega(x)$ — любая функция из класса $\Omega$ и $\{z_k\}_1^\infty$ $(0 < |z_k| \leqslant |z_{k+1}| < 1)$ — произвольная последовательность комплексных чисел.

Тогда, как известно [2], чтобы бесконечное произведение

$$B_\omega(z) \equiv B_\omega(z; z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{-W_\omega(z; z_k)}, \tag{8}$$

где

$$W_\omega(z; \zeta) = \int_{|\zeta|}^1 \frac{\omega(x)}{x} dx - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \zeta^{-k} \int_0^{|\zeta|} \omega(x) x^{k-1} dx - \right.$$

$$\left. - \bar{\zeta}^k \int_{|\zeta|}^1 \omega(x) x^{-k-1} dx \right\} \frac{z^k}{\Delta_k} \quad (|\zeta| < 1) \tag{9}$$

сходилось и определяло аналитическую в круге $|z| < 1$ функцию $B_\omega(z) \neq 0$, обращающуюся в нуль лишь на последовательности $\{z_k\}_1^\infty$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{|z_k|}^1 \omega(x) dx < +\infty. \tag{10}$$

Основная теорема М. М. Джрбашяна о факторизации классов $N\{\omega\}$ гласит [2]:

Класс $N\{\omega\}$ совпадает с множеством функций $F(z)$, которые в круге $|z| < 1$ допускают представление

$$F(z) = e^{i\gamma + \chi k_\omega} z^\chi \frac{B_\omega(z; a_\mu)}{B_\omega(z; b_\nu)} \exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(e^{-i\theta} z; \omega) d\psi(\theta) \right\}, \tag{11}$$

где $B_{\alpha}(z; a_n)$ и $B_{\alpha}(z; b_{\nu})$ — сходящиеся произведения вида (7), $\psi(\theta)$ — вещественная функция на $[0,2\pi]$ с конечным полным изменением, $\lambda \geq 0$ — любое целое, $\gamma$ — любое вещественное число, и наконец

$$k_{\omega} = \int_0^1 \frac{1-\omega(x)}{x}\,dx.$$

2°. В работе [3], опираясь на факторизацию функций классов $N_{\alpha}\ (-1<\alpha<+\infty)$, установлены интегральные оценки для функций этих классов и доказана их точность в надлежащем классе, получены также интегральные оценки для роста функций М. М. Джрбашяна $B_{\alpha}(z; a_n)$.

В § 1 настоящей статьи приводится ряд предварительных лемм, которые в дальнейшем используются.

В § 2 получены интегральные оценки для роста функций М. М. Джрбашяна $B_{\omega}(z; a_k)$, участвующих в представлении функций класса $N\{\omega\}$ и совпадающих с функцией Бляшке при $\omega(x) \equiv 1$.

В заключительном § 3 установлены оценки роста функций класса $N\{\omega\}$ при $\omega(x) \in \Omega_0^*$, откуда в частности получается теорема единственности для аналитических функций класса $N\{\omega\}$.

Условимся говорить, что произвольная непрерывная и не возрастающая на отрезке $[0,1)$ функция $h(t) \in H$, если $0 \leq h(t) \leq 1$ и

$$\int_0^1 \frac{h(t)}{1-t}\,dt < +\infty. \tag{12}$$

Основным результатом статьи является следующая

Теорема. *Пусть $\omega(x) \in \Omega_0^*$, а функция $W(z) \in N\{\omega\}$ и $W(z) \not\equiv 0$. Тогда при $h(x) \in H$ справедливо неравенство*

$$\int_L \omega(|z|)\, h(|z|)\, |\lg|W(z)||\, d|z| < +\infty,$$

где $L$ — спрямляемая кривая, соединяющая центр круга с окружностью $|z|=1$.

Заметим, что основные результаты в том случае, когда $\omega(x) = (1-x)^{\alpha}\ (-1<\alpha<0)$ получены в работе [3]. Данная статья существенно опирается на некоторые тонкие оценки работы [1].

## § 1. Предварительные леммы

Заметим, что как в работе [4], так и здесь вместо множества $[0,1)$ можно было рассмотреть произвольное измеримое множество $E$ на отрезке $[0,1)$ с положительной мерой. Но во избежание осложнений при выкладках в настоящей работе мы принимаем $E=[0,1)$.

Спроектируем с помощью круговых дуг точки отрезка $[0,1]$ на дугу $L$, которая соединяет центр круга с окружностью $|z|=1$. Для простоты будем считать, что окружности $|z| = \text{const}$ пересекают дугу $L$ в одной точке. Отметим, что в дальнейшем всюду предполагается, что $h(t) \in H$ и через $c_k$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ будем обозначать положительные постоянные.

Лемма 1.1. *При любом $0 < b < 1$ и $\omega(x) \in \Omega_0^*$ справедлива оценка*

$$J_\omega^{(1)}(b) = \int_b^1 \omega(x) h(x) \lg \frac{1}{x-b} dx \leqslant c_1 \int_b^1 \omega(x) dx, \tag{1.1}$$

*где $c_1 > 0$ не зависит от $b$.*

Доказательство. Так как $h(t) \geqslant 0$ не возрастает на $[0,1)$, то

$$c_0 = \int_0^1 \frac{h(x)}{1-x} dx \geqslant \int_0^b \frac{h(x)}{1-x} dx \geqslant h(b) \lg \frac{1}{1-b},$$

и, таким образом

$$h(b) \lg \frac{1}{1-b} \leqslant c_0. \tag{1.2}$$

Поскольку $\omega(x) \in \Omega_0^*$, то будем иметь

$$J_\omega^{(1)}(b) = \int_b^{\sqrt{b}} \omega(x) h(x) \lg \frac{1}{x-b} dx + \int_{\sqrt{b}}^1 \omega(x) h(x) \lg \frac{1}{x-b} dx \leqslant$$

$$\leqslant \omega(\sqrt{b}) \int_b^1 h(x) \lg \frac{1}{x-b} dx + \lg \frac{1}{\sqrt{b}-b} \int_{\sqrt{b}}^1 \omega(x) h(x) dx \leqslant$$

$$\leqslant \omega(\sqrt{b}) h(b)(1-b)\left[1 + \lg \frac{1}{1-b}\right] + h(\sqrt{b}) \lg \frac{1}{\sqrt{b}-b} \int_{\sqrt{b}}^1 \omega(x) dx.$$

Отсюда, используя неравенства (2) и (1.2), получаем

$$J_\omega^{(1)}(b) \leqslant c_1 \int_b^1 \omega(x) dx.$$

Лемма доказана.

Заметим, что из неравенств (1.1) в случае $\omega(x) \equiv 1$ будем иметь

$$J_1^{(1)}(b) < c_2(1-b). \tag{1.3}$$

Лемма 1.2. *Справедливо неравенство*

$$J_\omega^{(2)}(b) \equiv \int_0^b h(t) \lg \frac{b-t}{1-t} dt \leqslant c_3(1-b), \tag{1.4}$$

*где $c_3 > 0$ не зависит от $b$.*

Доказательство этого неравенства можно найти в работе [3].

Пусть при $0 \leqslant u < 1$ и $\frac{1}{2} < b \leqslant u < 1$ положено

$$E_{\infty}^{(1)}(u, b) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta_n} \left(\frac{u}{b}\right)^n \int_0^b \omega(x) x^{n-1} dx, \tag{1.5}$$

$$E_{\infty}^{(2)}(u, b) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta_n} (ub)^n \int_b^1 \omega(x) x^{-n-1} dx. \tag{1.6}$$

Лемма 1.3. *Для $\omega(x) \in \Omega_0^*$ имеют место неравенства*

$$\int_b^1 \omega(t) h(t) E_{\infty}^{(1)}(t, b) dt \leqslant c_1 \int_b^1 \omega(t) dt \tag{1.7}$$

*и*

$$\int_b^1 \omega(t) h(t) E_{\infty}^{(2)}(t, b) dt \leqslant c_5 \int_b^1 \omega(t) dt. \tag{1.8}$$

Доказательство. Сначала оценим $E_{\infty}^{(1)}(t, b)$

$$E_{\infty}^{(1)}(t, b) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{\Delta_n} \int_0^1 \omega(bx) x^{n-1} dx \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} = \lg \frac{1}{1-t} \cdot \tag{1.9}$$

Для $E_{\infty}^{(2)}(t, b)$ получим

$$E_{\infty}^{(2)}(t, b) < \frac{1}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{\Delta_n} \int_b^1 \omega(x) dx \leqslant 2C(t; \omega) \int_b^1 \omega(t) dt. \tag{1.10}$$

Имея ввиду неравенства (1.9) и (1.2), получим

$$\int_b^1 \omega(t) h(t) E_{\infty}^{(1)}(t, b) dt \leqslant \int_b^1 \omega(t) h(t) \lg \frac{1}{1-t} dt \leqslant C_4 \int_b^1 \omega(t) dt.$$

Для второго неравенства таким же путем имея ввиду (1.10) (7) и (12), будем иметь

$$\int_b^1 \omega(t) h(t) E_{\infty}^{(2)}(t, b) dt < 2 \int_b^1 \omega(t) h(t) C(t; \omega) \left\{ \int_b^1 \omega(t) dt \right\} dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\gamma \int_b^1 \omega(t) dt \int_b^1 \frac{h(t)}{1-t} dt \leqslant c_5 \int_b^1 \omega(t) dt.$$

Лемма доказана.

**Лемма 1.4.** *При $\omega(x)\in\Omega_0^*$ и $0<b<1$ для интеграла*

$$J_\omega^{(3)}(b)=\int_0^b \omega(t)\,h(t)\left\{\int_b^1 \omega(x)\left[C\left(\frac{t}{b}x;\omega\right)-1\right]\frac{dx}{x}\right\}dt$$

*справедлива оценка*

$$J_\omega^{(3)}(b)\leqslant c_6\int_b^1 \omega(t)\,dt, \tag{1.11}$$

*где $c_6>0$ не зависит от $b$.*

**Доказательство.** Сначала установим следующее неравенство, которое понадобится при доказательстве леммы:

$$\frac{\omega(x)}{\omega(dx)}\leqslant c\left(\frac{1-x}{1-dx}\right)^\alpha\ (-1<\alpha\leqslant 0,\ 0\leqslant d<x<1). \tag{1.12}$$

Действительно, заметим, что поскольку $\omega(x)\in\Omega_0^*$, то существуют такие $\beta$ $(0<\beta<1)$ и $x_0$ $(0<x_0<1)$, что

$$(1-x)\,\omega'(x)\leqslant\beta\omega(x),\ (x_0\leqslant x<1).$$

Из этой оценки можно получить следующее неравенство:

$$\omega'(x)(1-x)^\beta-\beta(1-x)^{\beta-1}\omega(x)\leqslant 0.$$

А это и означает, что производная первого порядка функции $f(x)=(1-x)^\beta\,\omega(x)$ неположительна, следовательно $f(x)$ — невозрастающая на отрезке $[0,1)$ функция и поэтому можно написать, что

$$\omega(x)(1-x)^\beta\leqslant c\omega(dx)(1-dx)^\beta.$$

В последнем неравенстве, принимая $\beta=-\alpha$ $(-1<\alpha<0)$ и преобразуя его, получим неравенство (1.12).

Теперь докажем лемму. Имея ввиду (7) и (1.12), получим

$$J_\omega^{(3)}(b)\leqslant\int_0^b \omega(t)\,h(t)\,dt\int_b^1 \omega(x)\,C\left(\frac{t}{b}x;\omega\right)\frac{dx}{x}\leqslant$$

$$\leqslant\gamma\int_0^b \omega(t)\,h(t)\,dt\int_b^1 \frac{\omega(x)}{\left(1-\frac{t}{b}x\right)\omega\left(\frac{t}{b}x\right)}\,\frac{dx}{x}\leqslant$$

$$\leqslant c\gamma\int_0^b \omega(t)\,h(t)\,dt\int_b^1 \frac{(1-x)^\alpha}{\left(1-\frac{t}{b}x\right)^{1+\alpha}}\cdot\frac{dx}{x}=$$

$$=c\gamma\int_0^b \omega(t)\,h(t)\,dt\int_0^{\frac{1-b}{1-t}} \frac{V^\alpha}{1-V}\,dV=$$

$$= c\gamma (1-b)\,\omega(b)\int_0^b \frac{h(t)}{1-t}\,dt\int_0^1 \frac{\tau^\alpha\, d\tau}{1-\frac{1-b}{1-t}\tau} =$$

$$= c\gamma (1-b)\,\omega(b)\left[\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\tau^\alpha\, d\tau}{1-\frac{1-b}{1-t}\tau}+\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\tau^\alpha\, d\tau}{1-\frac{1-b}{1-t}\tau}\right] <$$

$$\leqslant c\gamma\cdot(1-b)\,\omega(b)\int_0^b \frac{h(t)}{1-t}\,dt\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\tau^\alpha}{1-\tau}\,d\tau + 2^\alpha\cdot c\gamma\omega(b)\times$$

$$\times\int_0^b h(t)\lg\frac{b-t}{1-t}\,dt \leqslant c\gamma\cdot c_0\cdot(1-b)\,\omega(b)\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\tau^\alpha\, d\tau}{1-\tau}+$$

$$+ c\omega(b)\int_0^b h(t)\lg\frac{b-t}{1-t}\,dt.$$

Из неравенств (1.4) и (2) следует утверждение (1.11) леммы.

Лемма 1.5. *Пусть* $\omega(x)\in\Omega_0^*$ *и* $0<b<1$. *Обозначим*

$$J_\omega^{(4)}(b)\equiv\int_0^b \omega(t)\,h(t)\left\{\int_b^1 \omega(x)\left|C\left(\frac{tb}{x};\,\omega\right)-1\right|\frac{dx}{x}\right\}dt.$$

*Тогда справедлива следующая оценка:*

$$J_\omega^{(1)}(b)\leqslant c_7\int_0^1 \omega(x)\,dx. \tag{1.13}$$

Доказательство. Непосредственной оценкой внутреннего интеграла и имея ьвиду (7) получим

$$J_\omega^{(4)}(b)\leqslant\int_0^b \omega(t)\,h(t)\left\{\int_b^1 \omega(x)\,C\left(\frac{tb}{x};\,\omega\right)\frac{dx}{x}\right\}dt \leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{b}\int_0^b \omega(t)\,h(t)\,C(t;\,\omega)\,dt\int_b^1 \omega(x)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant\frac{\gamma}{b}\int_0^b \frac{h(t)}{1-t}\,dt\int_b^1 \omega(x)\,dx.$$

Отсюда и из неравенства (1.2) вытекает утверждение леммы.

## § 2. Интегральная оценка для функции Джрбашяна $B_\omega(z; a_\mu)$

2.1°. Доказательство основной теоремы. Рассмотрим теперь функцию М. М. Джрбашяна $B_\omega(z; z_k)$

$$B_\omega(z; z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} A_\omega(z; z_k), \tag{2.1}$$

где

$$A_\omega(z; \zeta) = \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) e^{-W_\omega(z; \zeta)}, \tag{2.2}$$

а функция $W_\omega(z; \zeta)$, как уже сказано во введении, имеет вид (9).

Замечая, что в силу (5)

$$\int_0^{|\zeta|} \omega(x)\, x^{k-1}\, dx = \frac{\Delta_k}{k} - \int_{|\zeta|}^1 \omega(x)\, x^{k-1}\, dx,$$

из (9) при условии $0 < |z| < |\zeta| < 1$, учитывая также (4), получим

$$W_\omega(z; \zeta) = \int_{|\zeta|}^1 \frac{\omega(x)}{x}\, dx + \int_{|\zeta|}^1 \omega(x) \left\{ C\left(\frac{z\bar{\zeta}}{x}; \omega\right) - 1 \right\} \frac{dx}{x} +$$

$$+ \lg\left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) \int_{|\zeta|}^1 \omega(x) \left\{ C\left(\frac{zx}{\zeta}; \omega\right) \right\} \frac{dx}{x}. \tag{2.3}$$

Установим теперь группу лемм, необходимую нам для доказательства основной теоремы этого параграфа.

Лемма 2.1. *При $|z| < |a| < 1$ и $\omega(x) \in \Omega_0$ имеет место оценка*

$$\lg |A_\omega(z; a)| \geqslant \lg |A_\omega(|z|, |a|)|. \tag{2.4}$$

Доказательство. Пусть $|z| < |a|$, тогда согласно (2.2) и (2.3) для функции $A_\omega(z; a)$ имеем

$$A_\omega(z; a) = \exp\left\{ -\int_{|a|}^1 \frac{\omega(x)}{x}\, dx - \int_{|a|}^1 \omega(x) \left[ C\left(\frac{\bar{a} z}{x}; \omega\right) - 1 \right] \frac{dx}{x} - \right.$$

$$\left. - \int_{|a|}^1 \omega(x) \left[ C\left(\frac{z}{a} x; \omega\right) - 1 \right] \frac{dx}{x} \right\}, \tag{2.5}$$

$$\log |A_\omega(z, a)| = - \int_{|a|}^1 \frac{\omega(x)}{x}\, dx -$$

$$-\operatorname{Re}\int\limits_{|a|}^{1}\omega(x)\left[C\left(\frac{\bar{a}z}{x};\omega\right)-1\right]\frac{dx}{x}-\operatorname{Re}\int\limits_{|a|}^{1}\omega(x)\left[C\left(\frac{z}{a}x,\omega\right)-1\right]\frac{dx}{x}>$$

$$\geqslant-\int\limits_{|a|}^{1}\frac{\omega(x)}{x}dx-\int\limits_{|a|}^{1}\omega(x)\left|C\left(\frac{|a|\,|z|}{x};\omega\right)-1\right|\frac{dx}{x}-$$

$$-\int\limits_{|a|}^{1}\omega(x)\left|C\left(\frac{|z|}{|a|}x;\omega\right)-1\right|\frac{dx}{x}=\lg|A_{\omega}(|z|;|a|)|.$$

Лемма 2.2. *При* $\frac{1}{2}\leqslant|a|<1$ *и* $\omega(x)\in\Omega_0^*$ *имеет место оценка*

$$J_{\omega}^{(4)}(a)\equiv\int\limits_{L\;\;|z|>|a|)}\omega(|z|)\,h(|z|)\,|\operatorname{Re}W_{\omega}(z;a)|\,d|z|\leqslant c_8\int\limits_{|a|}^{1}\omega(x)\,dx, \tag{2.6}$$

*где* $c_8>0$ *не зависит от* $a$.

Доказательство. Из представления (9) имеем

$$|\operatorname{Re}W_{\infty}(z;a)|\leqslant 2\int\limits_{|a|}^{1}\omega(x)\,dx+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^n}{\Delta_n}\left\{|a|^{-n}\int\limits_{0}^{|a|}\omega(x)\,x^{n-1}\,dx+|a|^n\int\limits_{a|}^{1}\omega(x)\,x^{-n-1}\,dx\right\}\equiv$$

$$\equiv 2\int\limits_{|a|}^{1}\omega(x)\,dx+E_{\omega}^{(1)}(|z|,|a|)+E_{\omega}^{(2)}|z|,|a|.$$

Следовательно

$$J_{\omega}^{(4)}(a)\leqslant 2\int\limits_{|a|}^{1}\omega(x)\,dx\int\limits_{|a|}^{1}\omega(|z|)\;h(|z|)\,d|z|+$$

$$+\int\limits_{|a|}^{1}\omega(|z|)\,h(|z|)\,E_{\omega}^{(1)}(|z|,|a|)\,d|z|+$$

$$+\int\limits_{|a|}^{1}\omega(|z|)\,h(|z|)\;E_{\omega}^{(2)}(|z|,|a|)\,d|z|,$$

откуда доказательство утверждения получится согласно лемме 1.3.

Лемма 2.3. *При* $\omega(x)\in\Omega_0^*$ *и* $0<|a|\leqslant\frac{1}{2}$ *для интеграла*

$$J_{\omega}^{(5)}(a)=\int\limits_{L}\omega(|z|)\,h(|z|)\lg|A_{\omega}(z;a)|\,d|z|$$

*справедлива оценка*

$$|J_{\omega}^{(5)}(a)|\leqslant c_9. \tag{2.7}$$

Доказательство. Разобьем интеграл на две части

$$J_{\omega}^{(5)}(a)=\int\limits_{L(|z|<|a|)}\omega(|z|)\,h(|z|)\lg|A_{\omega}(z;a)|\,d|z|+$$

$$+\int\limits_{L(|z|\geqslant|a|)}\omega(|z|)\,h(|z|)\lg|A_{\omega}(z,a)|=E_{\omega}^{(3)}(a)+E_{\omega}^{(4)}(a).$$

Пользуясь неравенством (2.4) и представлением (2.5) для $A_{\omega}(z,a)$, получим

$$|E_{\omega}^{(3)}(a)|\leqslant\int\limits_{0}^{|a|}\omega(|z|)\,h(|z|)\,d|z|\int\limits_{|a|}^{1}\frac{\omega(x)}{x}\,dx+$$

$$+\int\limits_{0}^{|a|}\omega(|z|)\,h(|z|)\,d|z|\int\limits_{|a|}^{1}\omega(x)\left\{C\left(\frac{|a||z|}{x};\omega\right)-1\right\}\frac{dx}{x}+$$

$$+\int\limits_{0}^{|a|}\omega(|z|)\,h(|z|)\,d|z|\int\limits_{|a|}^{1}\omega(x)\left\{C\left(\frac{|z|}{|a|}x;\omega\right)-1\right\}\frac{dx}{x}.$$

Откуда согласно леммам 1.4 и 1.5

$$|E_{\omega}^{(3)}(a)|\leqslant c_{10}. \tag{2.8}$$

Для $E_{\omega}^{(4)}(a)$ имеем

$$|E_{\omega}^{(4)}(a)|\leqslant\left|\int\limits_{L(|z|\geqslant|a|)}\omega(|z|)\,h(|z|)\lg\left|1-\frac{z}{a}\right|d|z|\right|+$$

$$+\left|\int\limits_{L(|z|\geqslant|a|)}\omega(|z|)\,h(|z|)\operatorname{Re}W_{\omega}(z;a)\,d|z|\right|.$$

Для оценки первого интеграла достаточно применить лемму 1.1 для второго интеграла находим

$$\left|\int\limits_{L(|z|\geqslant|a|)}\omega(|z|)\,h(|z|)\operatorname{Re}W_{\omega}(z;a)\,d|z|\right|\leqslant\frac{1}{|a|}\int\limits_{|a|}^{1}\omega(|z|)\,h(|z|)\,d|z|\times$$

$$\times\int\limits_{|a|}^{1}\omega(x)\,dx+\frac{1}{|a|}\int\limits_{|a|}^{1}\omega(|z|)\,h(|z|)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^n}{\Delta_n}\,d|z|\int\limits_{0}^{1}\omega(x)\,dx\leqslant$$

$$\leqslant c_{11} \int\limits_{|a|}^{1} \omega(|z|)\, h(|z|)\, C(|z|;\, \omega)\, d\,|z| \leqslant \gamma\, c_{11} \int\limits_{0}^{1} \frac{h(|z|)}{1-|z|}\, d\,|z|.$$

Здесь мы воспользовались также соотношением (7). Следовательно

$$|E_{\omega}^{(4)}(a)| \leqslant c_{12}. \tag{2.9}$$

Из неравенства (2.8) и (2.9) вытекает утверждение леммы.

Лемма 2.4. *При* $\omega(x) \in \Omega_0^*$ *и* $\frac{1}{2} \leqslant |a| < 1$ *справедливы оценки*

$$J_1(a) = \int\limits_{L\,(|z|)<|a|)} \omega(|z|)\, h(|z|) \lg|A_{\omega}(z;\, a)|\, d\,|z| \geqslant -c_{13} \int\limits_{|a|}^{1} \omega(x)\, dx, \tag{2.10}$$

$$J_2(a) = \int\limits_{L\,(|z|)>|a|)} \omega(|z|)\, h(|z|) \lg|A_{\omega}(z;\, a)|\, d\,|z| \geqslant -c_{14} \int\limits_{|a|}^{1} \omega(x)\, dx. \tag{2.11}$$

Доказательство. Так как $|z| < |a|$ в интеграле $J_1(a)$, то согласно лемме 2.1 будем иметь

$$J_1(a) \geqslant \int\limits_{0}^{|a|} \omega(t)\, h(t) \lg|A_{\omega}(t,\, |a|)|\, dt = -\int\limits_{0}^{|a|} \omega(t)\, h(t)\, dt \int\limits_{|a|}^{1} \frac{\omega(x)}{x}\, dx -$$

$$-\int\limits_{0}^{|a|} \omega(t)\, h(t)\, dt \int\limits_{|a|}^{1} \omega(x) \left\{ C\left(\frac{t\,|a|}{x};\, \omega\right) - 1 \right\} \frac{dx}{x} - \int\limits_{0}^{|a|} \omega(t)\, h(t)\, dt \times$$

$$\times \int\limits_{|0|}^{1} \omega(x) \left\{ C\left(\frac{xt}{|a|};\, \omega\right) - 1 \right\} \frac{dx}{x} \geqslant -\int\limits_{|a|}^{1} \omega(x)\, dx - J_{\omega}^{(4)}(a) - J_{\omega}^{(3)}(a).$$

Отсюда утверждение леммы получается в силу лемм 1.4 и 1.5.

Для доказательства второго неравенства разобьем $J_2(d)$ на сумму двух интегралов:

$$J_2(a) = \int\limits_{|a|}^{1} \omega(|z|)\, h(|z|) \lg\left|1 - \frac{|z|}{|a|}\right| d\,|z| - \int\limits_{L\,(|z|>|a|)} \omega(|z|)\, h(|z|)\, \mathrm{Re}\, W_{\omega}(z;\, a)\, d\,|z|.$$

Остальное вытекает из лемм 1.1 и 2.2.

Лемма 2.5. *При* $\omega(x) \in \Omega_0^*$ *и* $\frac{1}{2} \leqslant |a| < 1$ *для интеграла*

$$J(a) = \int\limits_{L} \omega(|z|)\, h(|z|) \lg|A_{\omega}(z;\, a)|\, d\,|z|$$

*справедлива оценка*

$$J(a) \geqslant -c_{15} \int_{|a|}^{1} \omega(x)\, dx. \qquad (2.12)$$

Доказательство. Разобьем $J(a)$ на два интеграла

$$J(a) = J_1(a) + J_2(a),$$

где

$$J_1(a) = \int_{L\,(|z|<|a|)} \omega(|z|)\, h(|z|) \lg |A_\mu(z;\, a)|\, d\,|z|,$$

$$J_2(a) = \int_{L\,(|z|>|a|)} \omega(|z|)\, h(|z|) \lg |A_\mu(z;\, a)|\, d\,|z|.$$

Тогда оценка (2.12) получится из леммы 2.4.

Теперь мы можем доказать основной результат настоящей статьи, в которой в качестве специального случая, когда $\omega(x) \equiv 1$, содержится теорема, установленная А. Л. Шагиняном для функции Бляшке [4], а при $\omega(x) = (1-x)^\alpha$ $(-1 < \alpha < 0)$ — результат работы [3] для произведения $B_\alpha(z;\, z_k)$.

Теорема 1. *При любом* $\omega(x) \in \Omega_0^*$ *для сходящегося произведения* $B_\omega(z;\, a_\mu)$ *справедливо неравенство*

$$\int_L \omega(|z|)\, h(|z|) \lg |B_\omega(z;\, a_\mu)|\, d\,|z| > -\infty. \qquad (2.13)$$

Доказательство. Имея ввиду (2.1), получим

$$\int_L \omega(|z|)\, h(|z|) \lg |B_\omega(z;\, a_\mu)|\, d\,|z| =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{\infty} \int_0^1 \omega(|z|)\, h(|z|) \lg |A_\omega(z;\, a_\mu)|\, d\,|z| \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{|a_\mu| \leqslant \frac{1}{2}} J(a_\mu) + \sum_{|a_\mu| > \frac{1}{2}} J(a_\mu) \geqslant$$

$$\geqslant -n\left(\frac{1}{2}\right) \max_{0<|a|\leqslant\frac{1}{2}} J_\omega^{(5)}(a) - c_{16} \sum_{|a_\mu|>\frac{1}{2}} \int_{|a_\mu|}^{1} \omega(x)\, dx,$$

где $n\left(\frac{1}{2}\right)$ — число нулей $a_\mu$ функции $B_\omega(z;\, a_\mu)$, удовлетворяющих неравенству $|a_\mu| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Согласно условию (10) сходимости произведения $B_\omega(z)$ и в силу леммы 2.3 получаем утверждение теоремы.

2.2. Неулучшаемость основной теоремы 1.

В данном пункте мы установим, что для справедливости неравенства типа (2.13) присутствие множителя типа функции $h(t) \in H$ необходимо.

А именно, полагая, что $\{a_\mu\}_1^\infty$, произвольная неубывающая последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \int_{|a_\mu|}^{1} \omega(x)\,dx < +\infty,$$

мы докажем, что для соответствующего произведения М. М. Джрбашяна $B_\omega(z; a_\mu)$ возможны случаи, когда

$$\int_{L} \omega(|z|) \lg |B_\omega(z; a_\mu)|\, d|z| = -\infty.$$

Обозначая для $\omega(x) \in \Omega_0^*$ и $0 < a < 1$

$$g_k(a) = a^{-k} \left\{ \frac{1}{k+1} \int_0^a \omega(t)\, t^{k-1}\, dt - \frac{1}{k} \int_0^{a^2} \omega(t)\, t^k\, dt \right\},$$

докажем сначала следующую лемму.

Лемма 2.6. *Для любого* $\omega(x) \in \Omega_0^*$ *при* $a \to 1-0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k(a) = O\left( \lg \frac{1}{1-a} \int_a^1 \omega(t)\, dt \right). \qquad (2.14)$$

Доказательство. Заметим сначала, что в случае $\omega(t) \equiv 1$, утверждение леммы очевидно.

В самом деле, при $\omega(t) = 1$ имеем

$$g_k(a) = \frac{1 - a^{k+2}}{k(k+1)}$$

и так как

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{k(k+1)} = 1 + \left(1 - \frac{1}{a}\right) \lg \frac{1}{1-a} \quad (0 < a < 1),$$

следовательно

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k(a) = 1 - a^2 + a(1-a) \lg \frac{1}{1-a} = O\left((1-a) \lg \frac{1}{1-a}\right).$$

Представим $g_k(a)$ в следующем виде:

$$g_k(a) = \frac{a^{-k}}{\Delta_k} \left\{ \int_0^a \omega(t)\, t^{k-1}\, dt \int_0^1 \omega(x)\, x^k\, dx - \right.$$

$$-\int_0^{a^2}\omega(t)\,t^k\,dt\int_0^1\omega(x)\,x^{k-1}\,dx\Bigg\}=\frac{a^{-k}}{\Delta_k}\Bigg\{\int_0^a\omega(t)\,t^{k-1}\,dt\int_{a^2}^1\omega(x)\,x^k\,dx-$$

$$-\int_0^{a^2}\omega(t)\,t^k\,dt\cdot\int_a^1\omega(x)\,x^{k-1}\,dx\Bigg\}. \qquad (2.15)$$

Отсюда вытекает следующая оценка:

$$-\frac{a^{-k}}{\Delta_k}\int_0^{a^2}\omega(t)\,t^k\,dt\int_{a^2}^1\omega(t)\,t^{k-1}\,dt\leqslant g_k(a)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{a^{-k}}{\Delta_k}\int_0^a\omega(t)\,t^{k-1}\,dt\int_{a^2}^1\omega(t)\,t^k\,dt. \qquad (2.16)$$

Поскольку $\omega(t)\in\Omega_0^*$, то $\omega(t)\geqslant 1$, тогда имея ввиду также, что $\omega(at)\leqslant\omega(t)$, получим

$$g_k(a)\leqslant\frac{1}{k}\,\frac{\int_0^1\omega(at)\,t^{k-1}\,dt}{\int_0^1\omega(t)\,t^{k-1}\,dt}\int_{a^2}^1\omega(t)\,t^k\,dt\leqslant\frac{1}{k}\int_{a^2}^1\omega(t)\,t^k\,dt. \qquad (2.17)$$

Используя левое из неравенств (2.16), получим

$$g_k(a)\geqslant-\frac{a}{k+1}\,\frac{\int_0^1\omega(at)\,t^k\,dt}{\int_0^1\omega(t)\,t^k\,dt}\int_{a^2}^1\omega(t)\,t^{k-1}\,dt\geqslant-\frac{a}{k+1}\int_{a^2}^1\omega(t)\,t^{k-1}\,dt. \qquad (2.18)$$

Из полученных неравенств (2.17) и (2.18) следует, что

$$g_k(a)=O\left(\frac{1}{k}\int_{a^2}^1\omega(t)\,t^k\,dt\right),\quad a\to 1-0,$$

следовательно

$$\sum_{k=1}^{\infty}g_k(a)=O\left(\int_{a^2}^1\omega(t)\lg\frac{1}{1-t}\,dt\right).$$

Имеем также следующие оценки:

$$\int_{a^2}^1\omega(t)\lg\frac{1}{1-t}\,dt=\int_{a^2}^a\omega(t)\lg\frac{1}{1-t}\,dt+\int_a^1\omega(t)\lg\frac{1}{1-t}\,dt=$$

$$= a\int_a^1 \omega(at)\lg\frac{1}{1-at}\,dt + \int_a^1 \omega(t)\lg\frac{1}{1-t}\,dt \leqslant a\int_a^1 \omega(t)\lg\frac{1}{1-t}\,dt +$$

$$+ \int_a^1 \omega(t)\lg\frac{1}{1-t}\,dt \leqslant (a+1)\int_a^1 \omega(t)\lg\frac{1}{1-t}\,dt$$

и

$$\int_{a^2}^1 \omega(t)\lg\frac{1}{1-t}\,dt \geqslant \int_a^1 \omega(t)\lg\frac{1}{1-t}\,dt.$$

Исходя из этих оценок, получим, что при $a \to 1-0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k(a) = O\left(\int_a^1 \omega(t)\lg\frac{1}{1-t}\,dt\right).$$

Теперь получим двусторонние оценки для интеграла

$$\int_a^1 \omega(t)\lg\frac{1}{1-t}\,dt.$$

Имеем

$$\int_a^1 \omega(t)\lg\frac{1}{1-t}\,dt \geqslant \lg\frac{1}{1-a}\int_a^1 \omega(t)\,dt. \tag{2.19}$$

Интегрированием по частям и учитывая (2), получим

$$\int_a^1 \omega(t)\lg\frac{1}{1-t}\,dt = -\int_a^1 \lg\frac{1}{1-t}\,d\left\{\int_t^1 \omega(x)\,dx\right\} = \lg\frac{1}{1-a}\int_a^1 \omega(x)\,dx +$$

$$+ \int_a^1 \left\{\int_t^1 \omega(x)\,dx\right\}\frac{dt}{1-t} \leqslant \lg\frac{1}{1-a}\int_a^1 \omega(x)\,dx +$$

$$+ \alpha\int_a^1 \frac{(1-t)\,\omega(t)}{1-t}\,dt \leqslant c_{16}\lg\frac{1}{1-a}\int_a^1 \omega(x)\,dx, \tag{2.20}$$

поскольку имеем также, что

$$\lim_{t\to 1}\lg\frac{1}{1-t}\int_t^1 \omega(x)\,dx = 0.$$

Действительно, положив в (1.12) $d=0$, получим

$$\int_t^1 \omega(x)\,dx \leqslant c\int_t^1 (1-x)^{\alpha}\,dx \leqslant \frac{c}{1+\alpha}(1-t)^{1+\alpha},$$

поэтому будем иметь

$$0 \leq \lg \frac{1}{1-t} \int_t^1 \omega(x)\, dx \leq c \lg \frac{1}{1-t} \cdot (1-t)^{1+\alpha}.$$

Очевидно, что

$$\lim_{t \to 1} \lg \frac{1}{1-t} (1-t)^{1+\alpha} = 0,$$

откуда получаем, что

$$\lim_{t \to 1} \lg \frac{1}{1-t} \int_t^1 \omega(x)\, dx = 0.$$

Из неравенств (2.19), (2.20) вытекает утверждение (2.14) леммы

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k(a) = O\left(\lg \frac{1}{1-a} \int_a^1 \omega(x)\, dx \right).$$

Теорема 2. *Если* $|a_\mu|_1^\infty$ $(0 < a_\mu < a_{\mu+1} \leq 1)$, *то при любом* $\omega(x) \in \Omega_0^*$ *для выполнения неравенства*

$$J_\omega = \int_0^1 \omega(x) \lg |B_\omega(x; a_\mu)|\, dx > -\infty \tag{2.21}$$

*необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \lg \frac{1}{1-a_\mu} \int_{a_\mu}^1 \omega(x)\, dx < +\infty. \tag{2.22}$$

Доказательство. Из определения функции $B_\omega(z; a_\mu)$ следует, что

$$J_\omega = \sum_{\mu=1}^{\infty} \int_0^1 \omega(x) \left\{ \lg \left| 1 - \frac{x}{a_\mu} \right| - \operatorname{Re} W_\omega(x; a_\mu) \right\} dx.$$

Рассмотрим интеграл

$$J_\omega^{(1)} = \int_0^1 \omega(x) \left\{ \lg \left| 1 - \frac{x}{a} \right| - \operatorname{Re} W_\omega(x; a) \right\} dx = J_\omega^{(2)} - J_\omega^{(3)} \quad (0 < a < 1). \tag{2.23}$$

Оценим сначала

$$J_\omega^{(2)} = \int_0^a \omega(x) \lg \left(1 - \frac{x}{a}\right) dx + \int_a^1 \omega(x) \lg \left(\frac{x}{a} - 1\right) dx = U_1 + U_2. \tag{2.24}$$

Найдем порядок $U_2$ при $a \to 1-0$:

$$U_2 = \int_a^1 \omega(x) \lg(x-a)\, dx - \lg a \int_a^1 \omega(x)\, dx, \tag{2.25}$$

Имеем

$$\int_a^1 \lg(x-a)\, \omega(x)\, dx \leqslant \lg(1-a) \int_a^1 \omega(x)\, dx, \tag{2.26}$$

а также, что

$$\int_a^1 \omega(x) \lg(x-a)\, dx = (1-a) \int_0^1 \omega[a+(1-a)t] \lg[(1-a)t]\, dt =$$

$$= \lg(1-a) \int_a^1 \omega(x)\, dx + (1-a) \int_0^1 \omega[a+(1-a)t] \lg t dt \geqslant$$

$$\geqslant \lg(1-a) \int_a^1 \omega(x)\, dx + (1-a)\, \omega(a) \int_a^1 \lg t\, dt =$$

$$= O\left(\lg \frac{1}{1-a} \int_a^1 \omega(x)\, dx\right), \tag{2.27}$$

поскольку согласно (3) имеем, что при $a \to 1-0$

$$\int_a^1 \omega(x)\, dx = O((1-a)\, \omega(a)).$$

Из неравенств (2.26) и (2.27) вытекает, что

$$\int_a^1 \omega(x) \lg(x-a)\, dx = O\left(\lg \frac{1}{1-a} \int_a^1 \omega(x)\, dx\right). \tag{2.28}$$

Отсюда следует, что при $a \to 1-0$

$$U_2 = O\left(\lg \frac{1}{1-a} \int_a^1 \omega(x)\, dx\right). \tag{2.29}$$

Заметим также, что

$$U_1 = \int_0^{a^2} \omega(x) \lg\left(1-\frac{x}{a}\right) dx + \int_{a^2}^a \omega(x) \lg\left(1-\frac{x}{a}\right) dx, \tag{2.30}$$

где

$$\int_{a^2}^a \omega(x) \lg\left(1-\frac{x}{a}\right) dx = O\left(\lg \frac{1}{1-a} \int_a^1 \omega(x)\, dx\right). \tag{2.31}$$

Тогда будем иметь

$$J_{\omega}^{(2)} = \int_0^{a^2} \omega(x) \lg\left(1 - \frac{x}{a}\right) dx + O\left(\lg \frac{1}{1-a} \int_a^1 \omega(x)\, dx\right). \tag{2.32}$$

Займемся теперь оценкой $J_{\omega}^{(3)}$. Заметим, что

$$J_{\omega}^{(3)} = \int_0^1 \omega(x)\, dx \int_a^1 \frac{\omega(x)}{x} dx + \int_0^1 \omega(x) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n a^{-n}}{\Delta_n} \int_0^a \omega(t) t^{n-1} dt \right\} dx -$$

$$- \int_0^1 \omega(x) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n a^n}{\Delta_n} \int_a^1 \omega(t) t^{-n-1} dt \right\} dx = k_1 + k_2 + k_3. \tag{2.33}$$

Имеем

$$k_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{-n}}{\Delta^n} \int_0^a \omega(x) x^{n-1} dx \int_0^1 \omega(x) x^n dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{-n}}{n+1} \int_0^a \omega(x) x^{n-1} dx. \tag{2.34}$$

Из (2.32), (2.34) и леммы 2.6, получим

$$J_{\omega}^{(2)} + k_2 = O\left(\lg \frac{1}{1-a} \int_a^1 \omega(x)\, dx\right) + \int_0^{a^2} \omega(x) \lg\left(1 - \frac{x}{a}\right) dx +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{-n}}{n+1} \int_0^a \omega(x) x^{n-1} dx = O\left(\lg \frac{1}{1-a} \int_a^1 \omega(x)\, dx\right) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} \left\{ \frac{1}{n+1} \int_0^a \omega(x) x^{n-1} dx - \frac{1}{n} \int_0^{a^2} \omega(x) x^n dx \right\} =$$

$$= O\left(\lg \frac{1}{1-a} \int_a^1 \omega(x)\, dx\right). \tag{2.35}$$

Для $k_3$ имеем

$$k_3 = -\int_0^1 \omega(x) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n a^n}{\Delta_n} \int_a^1 \omega(x) x^{-n-1} dx = \right.$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n+1} \int_a^1 \omega(x) x^{-n-1} dx. \tag{2.36}$$

Следовательно

$$k_3 = O\left(\int_a^1 \omega(x) \lg\left(1 - \frac{a}{x}\right) dx\right) = O\left(\lg \frac{1}{1-a} \int_a^1 \omega(x)\, dx\right). \tag{2.37}$$

Так как непосредственно видно, что

$$k_1 = \int_0^1 \omega(x)\, dx \int_a^1 \frac{\omega(x)}{x}\, dx = O\Big(\int_a^1 \omega(x)\, dx\Big), \tag{2.38}$$

то из (2.35) и (2.37) следует утверждение теоремы.

Теорема 2 показывает, что для неравенства типа (2.13) присутствие множителя $h(|z|)$ необходимо.

В самом деле, если

$$0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_\mu \leqslant \cdots \leqslant 1$$

и

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \int_{a_\mu}^1 \omega(x)\, dx < +\infty,$$

но тем не менее

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \lg \frac{1}{1-a_\mu} \int_{a_\mu}^1 \omega(x)\, dx = +\infty,$$

то из теоремы 2 следует, что

$$\int_0^1 \omega(x) \lg |B_\omega(x, n_\mu)|\, dx = -\infty.$$

## § 3. Интегральная оценка для функций классов $N\{\omega\}$

Согласно основной теореме М. М. Джрбашяна о параметрическом представлении классов $N\{\omega\}$ [2] имеем, что класс $N\{\omega\}$ совпадает с множеством функций, которые в круге $|z| < 1$ допускают представление вида (11).

Согласно представлению (11), если функция $F(z) \in N\{\omega\}$ и не имеет нулей и полюсов, то ее можно представить в таком виде:

$$F(z) = c \exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(e^{-i\theta} z; \omega)\, d\psi(\theta)\right\}. \tag{3.1}$$

Так как из (3.1), учитывая (7), будем иметь

$$|\lg |F(z)|| \leqslant \frac{c_{18}}{(1-|z|)\,\omega(|z|)},$$

то следующая теорема доказывается непосредственно.

Теорема 3. *Пусть $\omega(x) \in \Omega_1^*$, а $h(t)$ — непрерывная и не возрастающая на $[0,1]$ функция, удовлетворяющая условию*

$$\int_0^1 \frac{h(t)}{1-t}\,dt < +\infty,$$

*тогда для функции вида* (3.1) *имеем*

$$\int_L \omega(|z|)\, h(|z|) \lg |F(z)|\, d|z| > -\infty. \tag{3.2}$$

На основании представления (11) функции $W(z)$ класса $N\{\omega\}$ и теорем 1 и 2 получим основной результат настоящей статьи.

Теорема 4. *Пусть функция* $W(z) \in N\{\omega\}$, $\omega(x) \in \Omega_0^*$ и $W(z) \not\equiv 0$. *Тогда для любой* $h(x) \in H$ *справедливо следующее неравенство:*

$$\int_L \omega(|z|)\, h(|z|)\, |\lg |W(z)||\, d|z| < +\infty. \tag{3.3}$$

Если обозначим через $A\{\omega\}$ множество аналитических в круге $|z| < 1$ функций $f(z)$, принадлежащих классу $N\{\omega\}$, то из теоремы 4 непосредственно вытекает следующая теорема единственности для функций класса $A\{\omega\}$.

Теорема 5. *Пусть* $f(z) \in A\{\omega\}$, $\omega(x) \in \Omega_0^*$ *и* $h(x) \in H$. *Тогда если*

$$\int_L \omega(|z|)\, h(|z|) \lg |f(z)|\, d|z| = -\infty, \tag{3.4}$$

*то* $f(z) \equiv 0$.

В самом деле, если предположить, что $f(z) \not\equiv 0$, то согласно теореме 4, будем иметь

$$\int_L \omega(|z|)\, h(|z|)\, |\lg |f(z)||\, d|z| < +\infty,$$

что противоречит условию (3.4).

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса.
Армянский государственный педагогический
институт им. Х. Абовяна

Поступила 11.XII.1978

Վ. Ս. ԶԱՔԱՐՅԱՆ և Լ. Ա. ՍԵԽՊՈՍՅԱՆ. Աճի գնահատական $N\{\omega\}$ դասի մերոմորֆ ֆունկցիաների համար (*ամփոփում*)

*Ներկա հոդվածում հենվելով $N\{\omega\}$ դասերի ֆակտորիզացման ներկայացումների վրա [2] և [5] աշխատանքում պարունակվող գնահատման մեթոդներով հաստատվում են այդ ֆունկցիաների համար ինտեգրալ գնահատականներ և ապացուցվում վերջինների ճշտությանը համապատասխան դասում։*

*Հոդվածում հիմնվում ենք նաև (1) աշխատանքի գնահատականների վրա։*

*Ասում ենք, որ ֆունկցիա $h(t) \in H$, եթե $h(t)$-ն կամայական անընդհատ և չաճող ֆունկցիա է $[0,1)$ հատվածում, որի համար $0 < h(t) < 1$ և*

$$\int_0^1 \frac{h(t)}{1-t}\,dt < +\infty.$$

Հետևյալ պնդումը տալիս է ներկա աշխատանքի հիմնական արդյունքը։ Դիցուք

$$W(z) \in N\{\omega\}\ (\omega(x) \in \Omega_0^*),\ W(z) \not\equiv 0\ \text{և}\ h(t) \in H։$$

Ապա ճիշտ է

$$\int_L \omega(|z|)\, h(|z|)\, |\lg|W(z)||\, d|z| < +\infty,$$

որտեղ $L$-ը շրջանի կենտրոնը $|z| = 1$ շրջանի հետ միացնող ցանկացած ուղղելի կոր է։

Նկատենք, որ երբ $\omega(x) = (1-x)^\alpha\ (-1 < \alpha < 0)$, ապա ստանում ենք [3] աշխատանքի հիմնական արդյունքները։

V. S. ZAKHARIAN, K. A. SEKHPOSIAN. *A bound for the growth of functions from the* $N\{\omega\}$ *class* (summary)

In the present paper integral bounds for the functions from $N\{\omega\}$ are established, their exactness in an appropriate class is proved.

It is said, that $h(t) \in H$, if $0 < h(t) < 1$, $h(t)$ is continuous, nonincreasing on $[0, 1)$ and

$$\int_0^1 \frac{h(t)}{1-t}\,dt < +\infty.$$

The main result of the paper states, that for

$$W(z) \in N\{\omega\}\ (\omega(x) \in \Omega_0^*),\ W(z) \not\equiv 0 \text{ and } h(t) \in H$$

$$\int_L \omega(|z|)\, h(|z|)\, |\lg|W(z)||\, d|z| < +\infty,$$

where $L$ is any rechtifiable curve connecting the center of the circle $|z| = 1$ with its periphery. In the case where $\omega(x) = (1-x)^\alpha\ (-1 < \alpha < 0)$ we receive the main results of [3].

## ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян и В. С. Захарян.* Граничные свойства подклассов мероморфных функций ограниченного вида, Изв. АН СССР, сер. матем., 34, 1970, 1262—1339.
2. *М. М. Джрбашян.* Теория факторизации функций, мероморфных в круге, Матем. сб. 79 (121), 1969, 517—615.
3. *В. С. Захарян.* Оценка роста для мероморфных функций класса $N_\alpha$, Изв. АН Арм. ССР, сер. «Математика», IX, № 2, 1974, 85—106.
4. *А. Л. Шагинян.* Об одном основном неравенстве в теории функций и его приложениях, Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. наук, 12, № 1, 1959, 2—25.
5. *В. С. Захарян.* Теоремы единственности для некоторых классов функций, голоморфных в круге, Матем. сб., 63 (105), № 1, 1964, 3—22.