ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XIV, № 5, 1979 Математика

К. А. АБГАРЯН

РАСЩЕПЛЕНИЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ МНОГОТЕМПОВОЙ СИСТЕМЫ

1°. Рассматривается p-темповая система n-го порядка, представленная уранением

$$\varepsilon^H \frac{dx}{dt} = A^0(t, \varepsilon)\, x + \varphi(t, u, \varepsilon), \tag{1.1}$$

где $H = \operatorname{diag}(\mu_1 E_{n_1}, \mu_2 E_{n_2}, \cdots, \mu_p E_{n_p})$; μ_j $(j = 1, \cdots, p)$ — целые числа такие, что $\mu_1 > \mu_2 > \cdots > \mu_p \geqslant 0$; E_{n_j} — единичные матрицы порядков n_j $(j = 1, \cdots, p)$, $A^0(t, \varepsilon)$ — квадратная матрица n-го порядка; x и φ — столбцовые матрицы типа $n \times 1$; ε — положительный параметр. Матрица A^0 определена на интервале $I = [t_0, T]$, $T > t_0$, а φ — в области $I \times U \times \Omega$ (U — некоторая область m-мерного пространства координат—компонентов столбцовой матрицы u, $\Omega = \{\varepsilon : \varepsilon \leqslant \varepsilon_0\}$.

Предполагается, что матрица $A^0(t, \varepsilon)$ голоморфна по обеим переменным в области $I \times \Omega$ и имеет асимптотическое разложение

$$A^0(t, \varepsilon) = A(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k A^{(k)}(t) \text{ при } \varepsilon \to 0, \tag{1.2}$$

равномерное на I, а φ голоморфна по ε и удовлетворяет условиям существования и единственности решения задачи Коши в области $I \times U \times \Omega$.

Система (1.1) имеет в своем составе уравнения с полюсами разных порядков, что определяет разнотемповый характер изменения фазовых координат в окрестности точки $\varepsilon = 0$ и вызывает определенные трудности при построении асимптотических разложений этих координат.

В литературе подробно изучена однотемповая линейная система вида

$$\varepsilon^h \frac{dy}{dt} = A(t, \varepsilon)\, y \tag{1.3}$$

(см., например, [1,3—5].

Систему (1.1), как и любую линейную систему, можно записать в виде (1.3), если положение и порядок полюса не зависит от t. Показатель степени h является при этом максимальным порядком полюсов, имеющих место в n скалярных уравнениях, составляющих систему.

Однако при вынесении в качестве множителя наибольшей отрицательной степени ε из матрицы коэффициентов уравнений уничтожаются именно те свойства системы, которые важны в теории сингулярных возмущений, так как члены, которые оказывают решающее влияние на асимптотическое поведение решения при $\varepsilon \to 0$ могут стать малыми при умножении их на положительную степень ε.

Методы построения асимптотических разложений решений систем вида (1.3) непосредственно не переносятся на систему вида (1.1), вследствие главным образом того, что матрица ε^{H} в противоположность скалярному множителю ε^{h} не коммутирует с другими матрицами, кроме весьма специального класса матриц. В связи с этим разработка методов асимптотического интегрирования непосредственно для систем вида (1.1) с учетом их специфики представляется целесообразным. Решение многих задач связанных с рассмотрением многотемповых систем вида (1.1) значительно упростится, если с помощью подходящего преобразования привести ее к расщепленной системе, состоящей из однотемповых подсистем, каждая из которых содержит уже только уравнения с полюсами одного и того же порядка. С помощью такого преобразования исходная задача по сути дела расщепляется на систему задач с меньшим числом переменных в каждой и так, что в каждой задаче все уравнения имеют полюсы одного и того же порядка, что позволяет далее воспользоваться методами, разработанными для однотемповых систем (1.3).

В работе [1] в предположении, что $p-1$ миноров матрицы системы (1.1) при $\varepsilon = 0$, образованных первыми $\sum\limits_{j=1}^{k} n_j$ $(k = 1, 2, \cdots, p-1)$ строками и столбцами, не обращаются в нуль на I, указан один способ расщепления системы с последовательным выделением однотемповых подсистем. При этом для выделения каждой однотемповой подсистемы используются два преобразования специального вида, с помощью которых матрица системы сначала приводится к блочно-треугольному виду, а затем—к квазидиагональному.

Ниже предлагается другой, более непосредственный путь расщепления многотемповой системы на однотемповые подсистемы, основанный на изложенном в [2] методе асимптотического расщепления содержащих параметр линейных систем общего вида.

Отметим, что однотемповые системы принадлежат уже к относительно хорошо изученному классу систем дифференциальных уравнений с параметром. См. по этому поводу, например, уже цитированные выше работы [1,3–5], снабженные довольно подробными библиографиями.

2°. Система (1.1) может быть представлена в форме

$$\varepsilon^{(h)} \frac{dx}{dt} = E_n^{(\varepsilon)} A^0(t, \varepsilon)\, x + E_n^{(\varepsilon)} \varphi(t, u, \varepsilon), \tag{2.1}$$

где

$$E_n^{(\varepsilon)} = \operatorname{diag}(E_{n_1}, \ \varepsilon^{h_1-h_2} E_{n_2}, \cdots, \varepsilon^{h_1-h_p} \ E_{n_p}).$$

В соответствии с квазидиагональной структурой матрицы $E_n^{(\varepsilon)}$ введем блочное разбиение столбцов матриц x, φ и квадратных матриц $A(t)$ и $A^{(k)}(t)$ — коэффициентов разложения матрицы $A^0(t, \varepsilon)$:

$$x = (x_i)_{i=1,\cdots,p}, \ \varphi = (\varphi_i)_{i=1,\cdots,p}, \ A = (A_{ij})_{i,\,j=1,\cdots,p},$$
$$A^{(k)} = (A_{ij}^{(k)})_{i,\,j=1,\cdots,p}.$$

Здесь x_i и φ_i — матрицы типа $n_i \times 1$, а A_{ij} и $A_{ij}^{(k)}$ — матрицы типа $n_i \times n_j$.

В дальнейшем используются еще следующие обозначения:

$$A_1 = \begin{pmatrix} A_{11} \cdots A_{1p} \\ 0 \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ 0 \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ 0 \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ 0 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} 0 \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ 0 \\ A_{21} \cdots A_{2p} \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ 0 \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ 0 \end{pmatrix}, \ \cdots, A_p = \begin{pmatrix} 0 \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ 0 \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ 0 \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ 0 \\ A_{p1} \cdots A_{pp} \end{pmatrix},$$

$$A_1^{(k)} = \begin{pmatrix} A_{11}^{(k)} \cdots A_{1p}^{(k)} \\ 0 \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ 0 \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ 0 \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ 0 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} 0 \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ 0 \\ A_{21}^{(k)} \cdots A_{2p}^{k} \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ 0 \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ 0 \end{pmatrix}, \ \cdots, A_p^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ 0 \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ 0 \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ 0 \\ A_{p1}^{(k)} \cdots A_{pp}^{(k)} \end{pmatrix}.$$

Матрица линейной части уравнения (2.1) такова, что

$$E_n^{(\varepsilon)} A^0(t, 0) = A_1(t).$$

Пусть матрица $A(t)$ на I удовлетворяет условию

$$\left| \det \begin{pmatrix} A_{11} \cdots A_{1j} \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ A_{j1} \cdots A_{jj} \end{pmatrix} \right| \geqslant c > 0, \ j = 1, 2, \cdots, r \ 1 \leqslant r \leqslant p. \tag{2.2}$$

Покажем, что при условии (2.2) формальное решение уравнения (2.1) может быть представлено в виде

$$x = \tilde{K}_1(t, \varepsilon)\, y_1 + \tilde{K}_2(t, \varepsilon)\, y_2, \tag{2.3}$$

где y_1 и y_2 — решения векторно-матричных уравнений

$$\varepsilon^{h_1} \frac{dy_1}{dt} = \tilde{\Lambda}_1(t, \varepsilon)\, y_1 + \tilde{M}_1(t, \varepsilon)\, E_n^{(\varepsilon)} \varphi, \tag{2.4}$$

$$\varepsilon^{h_1} \frac{dy_2}{dt} = \tilde{\Lambda}_2(t, \varepsilon)\, y_2 + \tilde{M}_2(t, \varepsilon) \ E_n^{(\varepsilon)} \varphi, \tag{2.5}$$

а $\tilde{K}_1$, $\tilde{K}_2$, $\tilde{\Lambda}_1$, $\tilde{\Lambda}_2$, $\tilde{M}_1$, $\tilde{M}_2$ — матрицы типа соответственно $n \times n_1$, $n \times (n - n_1)$, $n_1 \times n_2$, $(n - n_1) \times (n - n_1)$, $n_1 \times n$, $(n - n_2) \times n$, представленные формальными рядами

$$\overline{K}_\sigma (t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k K_\sigma^{[k]} (t), \quad \overline{\Lambda}_\sigma (t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Lambda_\sigma^{[k]} (t), \tag{2.6}$$

$$\overline{M}_\sigma (t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k M_\sigma^{[k]} (t).$$

Подставляя (2.3) — (2.5) в (2.1) и приравнивая коэффициенты при y_δ и φ имеем

$$E_n^{(\varepsilon)} A^0 (t, \varepsilon) \overline{K}_\sigma (t, \varepsilon) = \widetilde{K}_\sigma (t, \varepsilon) \overline{\Lambda}_\sigma (t, \varepsilon) + \varepsilon^{\mu_\sigma} \frac{d\overline{K}_\sigma}{dt} (t, \varepsilon), \quad \sigma = 1, 2, \tag{2.7}$$

$$\sum_{\sigma=1}^{\sigma=2} \overline{K}_\sigma \overline{M}_\sigma = E_n. \tag{2.8}$$

Условие тождественного относительно ε выполнения соотношений (2.7) приводит к равенствам

$$A_1 K_\sigma^{[0]} = K_\sigma^{[0]} \Lambda_\sigma^{[0]}, \tag{2.9}$$

$$A_1 K_\sigma^{[k]} = K_\sigma^{[k]} \Lambda_\sigma^{[0]} + K_\sigma^{[0]} \Lambda_\sigma^{[k]} = D_\sigma^{[k-1]}, \tag{2.10}$$

где

$$D_\sigma^{[k-1]} = K_\sigma^{[k-1]} \Lambda_\sigma^{[1]} + \cdots + K_\sigma^{[1]} \Lambda_\sigma^{[k-1]} -$$

$$- A_1^{(1)} K_\sigma^{[k-1]} - A_1^{(2)} K_\sigma^{[k-2]} - \cdots - A_1^{(k)} K_\sigma^{[0]},$$

при $k = 1, 2, \cdots, \mu_1 - \mu_2 - 1$;

$$D_\sigma^{[k-1]} = K_\sigma^{[k-1]} \Lambda_\sigma^{[1]} + \cdots + K_\sigma^{[1]} \Lambda_\sigma^{[k-1]} -$$

$$- A_1^{(1)} K_\sigma^{[k-1]} - A_1^{(2)} K_\sigma^{[k-2]} - \cdots - A_1^{(k)} K_\sigma^{[0]} -$$

$$- A_2 K_\sigma^{[k-\mu_1+\mu_2]} - A_2^{(1)} K_\sigma^{[k-\mu_1+\mu_2-1]} - \cdots - A_2^{(k-\mu_1+\mu_2)} K_\sigma^{[0]}$$

при $k = \mu_1 - \mu_2, \mu_1 - \mu_2 + 1, \cdots, \mu_1 - \mu_3 - 1$;

$$D_\sigma^{[k-1]} = K_\sigma^{[k-1]} \Lambda_\sigma^{[1]} + \cdots + K_\sigma^{[1]} \Lambda_\sigma^{[k-1]} -$$

$$- A_1^{(1)} K_\sigma^{[k-1]} - A_1^{(2)} K_\sigma^{[k-2]} - \cdots - A_1^{(k)} K_\sigma^{[0]} -$$

$$\cdots - A_2 K_\sigma^{[k-\mu_1+\mu_2]} - A_2^{(1)} K_\sigma^{[k-\mu_1+\mu_2-1]} - \cdots - A_p^{(k-\mu_1+\mu_2)} K_\sigma^{[0]} -$$

$$\cdots - A_p K_\sigma^{[k-\mu_1+\mu_p]} - A_p^{(1)} K_\sigma^{[k-\mu_1+\mu_p-1]} - \cdots - A_p^{(k-\mu_1+\mu_p)} K_\sigma^{[0]},$$

при $k = \mu_1 - \mu_p, \mu_1 - \mu_p + 1, \cdots, \mu_1 - 1$;

$$D_\sigma^{[k-1]} = K_\sigma^{[k-1]} \Lambda_\sigma^{[1]} + \cdots + K_\sigma^{[1]} \Lambda_\sigma^{[k-1]} -$$

$$- A_1^{(1)} K_\sigma^{[k-1]} - A_1^{(2)} K_\sigma^{[k-2]} - \cdots - A_1^{(k)} K_\sigma^{[0]} -$$

$$- A_2 K_\sigma^{[k-\mu_1+\mu_2]} - A_2^{(1)} K_\sigma^{[k-\mu_1+\mu_2-1]} - \cdots - A_p^{(k-\mu_1+\mu_p)} K_\sigma^{[0]} + \frac{dK_\sigma^{[k-\mu_1]}}{dt},$$

при $k = \mu_1, \mu_1 + 1, \mu_1 + 2, \cdots$.

Построение $K_\sigma^{[0]}$ и $\Lambda_\sigma^{[0]}$

Собственные значения λ_σ $(\sigma = 1, 2, \cdots, n)$ матрицы $A_1(t)$ разбиваются на две непересекающиеся на I группы, в одну из которых входят n_1 собственных значений матрицы A_{11} (порядка n_1 и невырожденной в силу условия (2.2)), а в другую — $n - n_1$ равных нулю собственных значений матрицы A_1. Этим двум группам собственных значений матрицы A_1 соответствует два подпространства n-мерного векторного пространства, инвариантных относительно линейного оператора, которому в некотором базисе отвечает матрица A_1. Проекционные матрицы этих подпространств представляются в виде (см. [6]):

$$P_1 = K_1 M_1, \ P_2 = K_2 M_2,$$

где K_1 и M_1 — матрицы ранга n_1 типов $n \times n_1$ и $n_1 \times n$ соответственно, а K_2 и M_2 — матрицы ранга $n - n_1$ типов соответственно $n \times (n - n_1)$ и $(n - n_1) \times n$.

Матрицы K_1, M_1, а значит и P_1, определяются посредством матрицы [6]

$$\Delta_1(A_1) = \prod_{s=n_1+1}^{n} (A_1 - \lambda_s E_n)$$

из соотношений

$$\Delta_1(A_1) = K_1 M_{01}, \ M_1 = (M_{01} K_1)^{-1} M_{01}.$$

В данном случае, поскольку $\lambda_{n_1+1}, \cdots, \lambda_n \equiv 0$, то

$$\Delta_1(A_1) = A_1^{n-n_1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{n-n_1} & A_{11}^{n-n_1-1} A_{12} & \cdots & A_{11}^{n-n_1-1} A_{1p} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Разлагая $\Delta_1(A_1)$ на множители, получаем

$$K_1 = \begin{pmatrix} E_{n_1} \\ 0 \end{pmatrix}, \ M_{01} = (A_{11}^{n-n_1} \ A_{11}^{n-n_1-1} A_{12} \cdots A_{11}^{n-n_1-1} A_{1p})$$

и далее

$$M_1 = (E_{n1} \ A_{11}^{-1} A_{12} \cdots A_{11}^{-1} A_{1p}).$$

При построении K_2, M_2 в данном случае можно избежать необходимости определения собственных значений матрицы A_{11}, используя прием, указанный в [5] на стр. 127.

Имеем

$$P_1 = K_1 M_1 = \begin{pmatrix} E_{n1} & A_{11}^{-1} A_{12} & \cdots & A_{11}^{-1} A_{1p} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_2 = E_n - P_1 = E_n - K_1 M_1 = \begin{pmatrix} 0 - A_{11}^{-1} A_{12} \cdots - A_{11}^{-1} A_{1p} \\ 0 \qquad\qquad E_{n-n_1} \end{pmatrix}.$$

Разлагая P_2 на множители, находим

$$K_2 = \begin{pmatrix} - A_{11}^{-1} A_{12} \cdots - A_{11}^{-1} A_{1p} \\ E_{n-n_1} \end{pmatrix}, \ M_2 = (0 \ E_{n-n_1}).$$

Квадратная матрица

$$K = (K_1\ K_2) = \begin{pmatrix} E_{n_1} - A_{11}^{-1} A_{12} \cdots - A_{11}^{-1} A_{1p} \\ 0 \qquad E_{n-n_1} \end{pmatrix}$$

преобразует матрицу A_1 к квазидиагональному виду $\Lambda = \mathrm{diag}\,(\Lambda_1, \Lambda_2)$ так, что

$$A_1 K = K\Lambda, \tag{2.11}$$

$$\Lambda_1 = M_1 A_1 K_1 = A_{11}, \ \Lambda_2 = M_2 A_1 K_2 = 0. \tag{1.12}$$

В силу (2.11) в соотношениях (2.9) можно принять

$$K_\sigma^{[0]} = K_\sigma, \ \Lambda_\sigma^{[0]} = \Lambda_\sigma \ (\sigma = 1, 2). \tag{2.13}$$

Построение $K_\sigma^{[k]}$, $\Lambda_\sigma^{[k]}$

Решение матричного уравнения (2.10) приводит к соотношениям (см. [2])

$$K_\sigma^{[k]} = K_1 Q_\sigma^{[k]}, \ Q_\sigma^{[k]} = \begin{pmatrix} Q_{1\sigma}^{[k]} \\ Q_{2\sigma}^{[k]} \end{pmatrix}, \tag{2.14}$$

$$\Lambda_\sigma^{[k]} = \Lambda_\sigma Q_{\sigma\sigma}^{[k]} - Q_{\sigma\sigma}^{[k]} \Lambda_\sigma - M_\sigma D_\sigma^{[k-1]}. \tag{2.15}$$

Здесь $Q_{11}^{[k]}$, $Q_{12}^{[k]}$, $Q_{21}^{[k]}$, $Q_{22}^{[k]}$ — матрицы типов соответственно $n_1 \times n_1$, $n_1 \times (n - n_1)$, $(n - n_1) \times n_1$, $(n - n_1) \times (n - n_1)$. При этом $Q_{\sigma\sigma}^{[k]}$, $\sigma=1,2$ — произвольные голоморфные матрицы, а $Q_{s\sigma}^{[k]}$ $(s \neq \sigma)$ — решения матричных уравнений

$$\Lambda_s Q_{s\sigma}^{[k]} = Q_{s\sigma}^{[k]} \Lambda_\sigma + M_1 D_\sigma^{[k-1]}. \tag{2.16}$$

С учетом (2.12) из (2.16) имеем

$$Q_{12}^{[k]} = A_{11}^{-1} M_1 D_2^{[k-1]}, \ Q_{21}^{[k]} = -M_2 D_1^{[k-1]} A_{11}^{-1}.$$

Используя произвол в выборе матриц $Q_{\sigma\sigma}^{[k]}$, примем

$$Q_{\sigma\sigma}^{[k]} = 0 \ (\sigma = 1, 2; \ k = 1, 2, \cdots).$$

В этих условиях (2.14) и (2.15) принимают вид

$$K_1^{[k]} = - P_2 D_1^{[k-1]} A_{11}^{-1}, \tag{2.17}$$

$$K_2^{[k]} = \mathrm{diag}\,(A_{11}^{-1}, 0)\ P_1 D_2^{[k-1]}, \tag{2.18}$$

$$\Lambda_\sigma^{[k]} = - M_\sigma D_\sigma^{[k-1]}, \tag{2.19}$$

Матрицы $K_\sigma^{[k]}$, $\Lambda_2^{[k]}$ и $D_\sigma^{[k-1]}$ представим в виде блочных матриц

$$K_\sigma^{[k]} = \begin{pmatrix} K_{1\sigma}^{[k]} \\ \cdots \\ K_{p\sigma}^{[k]} \end{pmatrix}, \ \Lambda_2^{[k]} = \begin{pmatrix} \Lambda_{22}^{[k]} \\ \cdots \\ \Lambda_{p2}^{[k]} \end{pmatrix}, \ D_\sigma^{[k-1]} = \begin{pmatrix} D_{1\sigma}^{[k-1]} \\ \cdots \\ D_{p\sigma}^{[k-1]} \end{pmatrix},$$

где $K_{11}^{[k]}$, $K_{12}^{[k]}$, $\Lambda_{12}^{[k]}$, $D_{11}^{[k-1]}$, $D_{12}^{[k-1]}$ — матрицы типов соответственно $n_1 \times n_1$, $n_1 \times (n-n_1)$, $n_1 \times (n-n_1)$, $n_1 \times n_1$, $n_1 \times (n-n_1)$.

Из соотношений (2.17)—(2.19), используя вышеприведенные выражения для $D_{*}^{[k-1]}$, нетрудно установить следующее:

$$
\begin{gathered}
K_{11}^{[k]} = 0 \text{ при } k = 1, 2, \cdots, \mu_1 - \mu_2 - 1, \\
K_{jc}^{[k]} = 0 \text{ при } j = 2, \cdots, p;\ k = 1, 2, \cdots, \mu_1 - \mu_j - 1, \\
K_{12}^{[k]} = A_{11}^{-1} M_1 D_2^{[k-1]} \text{ при } k = 1, 2, 3, \cdots, \\
K_{j2}^{[k]} = 0 \text{ при } j = 2, \cdots, p;\ k = 1, 2, \cdots, \\
\Lambda_{j2}^{[k]} = 0 \text{ при } j = 2, \cdots, p;\ k = 1, 2, \cdots, \mu_1 - \mu_j - 1,
\end{gathered}
\tag{2.20}
$$

$$
\Lambda_2^{[\mu_1-\mu_2]} = \begin{pmatrix} \Lambda_{22}^{[\mu_1-\mu_2]} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} \cdots A_{2p} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{1p} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.21}
$$

В силу последних соотношений матрицу $\widetilde{\Lambda}_2(t, \varepsilon)$ можно записать так:

$$
\widetilde{\Lambda}_2(t, \varepsilon) = \varepsilon^{\mu_1-\mu_2} E_{n-n_1}^{(\varepsilon)} B^0(t, \varepsilon), \tag{2.22}
$$

где

$$
E_{n-n_1}^{(\varepsilon)} = \operatorname{diag}(E_{n_2}, \varepsilon^{\mu_2-\mu_3} E_{n_3}, \cdots, \varepsilon^{\mu_2-\mu_p} E_{n_p}),
$$

$$
B^0(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} B_2^0(t, \varepsilon) \\ \cdots \\ B_p^0(t, \varepsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{22}^0(t, \varepsilon) \cdots B_{2p}^0(t, \varepsilon) \\ \cdots\cdots\cdots \\ B_{p2}^0(t, \varepsilon) \cdots B_{pp}^0(t, \varepsilon) \end{pmatrix},
$$

$$
B_i^0(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Lambda_{i2}^{[\mu_1-\mu_i+k]}(t),\quad i = 2, 3, \cdots, p. \tag{2.23}
$$

Матрица $B^0(t, \varepsilon)$ такова, что

$$
E_{n-n_1}^0 B^0(t, 0) = \begin{pmatrix} \Lambda_{22}^{[\mu_1-\mu_2]} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{22}(t) \cdots B_{2p}(t) \\ 0 \end{pmatrix},
$$

причем (см. 2.21) блок $B_{22}(t) = A_{22} - A_2 A_{11}^{-1} A_{12}$ является при $r \geqslant 2$ в условии (2.2) невырожденной матрицей, точнее на I $|\det B_{22}| > c_1 > 0$. Это следует из условия (2.2) и равенства

$$
\det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \det A_{11} \det (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}).
$$

И вообще, матрица $B^0(t, 0) = B(t) = (B_{ij}(t))$ в силу условия (2.2), как нетрудно показать, обладает аналогично матрице $A(t)$ свойством

$$
\left| \det \begin{pmatrix} B_{22} \cdots B_{2j} \\ \cdots\cdots \\ B_{j2} \cdots B_{jj} \end{pmatrix} \right| = c_1 > 0,\ j = 2, 3, \cdots, r,\ 2 \leqslant r \leqslant p. \tag{2.24}
$$

Построение $\widetilde{M}_\sigma(t, \varepsilon)$.

Равенство (2.8) приводит к следующим выражениям для членов рядов $\widetilde{M}_\sigma(t\varepsilon)$:

$$M_\sigma^{[0]} = M_\sigma,$$

$$M_\sigma^{[k]} = - M_\sigma (K^{[1]} M^{[k-1]} + \cdots + K^{[k]} M) \tag{2.25}$$

$$(\sigma = 1,\ 2;\ k = 1,\ 2, \cdots),$$

где

$$K^{[k]} = (K_1^{[k]},\ K_2^{[k]}),\ M^{[k]} = \begin{pmatrix} M_1^{[k]} \\ M_2^{[k]} \end{pmatrix}.$$

Соотношения (2.25) позволяют последовательно определить члены рядов $\widetilde{M}_\sigma(t, \sigma)$.

Несколько подробнее рассмотрим разложение $\widetilde{M}_2(t, \varepsilon)$. С этой целью матрицы $M_2^{[k]}$ представим в виде блочных матриц

$$M_2^{[k]} = \begin{pmatrix} M_{22}^{[k]} \\ \cdots \\ M_{p}^{[k]} \end{pmatrix},$$

где $M_{j2}^{[k]}$ — матрица типа $n_j \times n$.

Соотношения (2.20) приводят к равенствам

$$M_{j2}^{[k]} = 0,\ j = 2,\ 3, \cdots,\ p;\ k = 1,\ 2, \cdots,\ \mu_1 - \mu_j - 1. \tag{2.26}$$

Учитывая (2.26), имеем

$$\widetilde{M}_2(t, \varepsilon) = M_2 + \varepsilon^{\mu_1 - \mu_1} E_{n-n_1}^{(\varepsilon)} \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k M_{22}^{[\mu_1 - \mu_2 + k]} \\ \cdots\cdots \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k M_{p2}^{[\mu_1 - \mu_p + k]} \end{pmatrix}. \tag{2.27}$$

В силу (2.22) и (2.27) уравнение (2.5) в форме записи уравнения (1.1) принимает вид

$$\varepsilon^{H_1} \frac{dy_2}{dt} = B^0(t, \varepsilon)\, y_2 + f(t, u, \varepsilon),$$

где

$$H_1 = \operatorname{diag}(\mu_2 E_{n2},\ \mu_3 E_{n3}, \cdots, \mu_p E_{np}),$$

$$f(t, u, \varepsilon) = [M_2 + \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k M_{22}^{[\mu_1 - \mu_p + k]} \\ \cdots\cdots \\ \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k M_{p2}^{[\mu_1 - \mu_p + k]} \end{pmatrix} E_n^{(\varepsilon)}]\, \varphi. \tag{2.28}$$

Вышеизложенное можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема. *Пусть* а) *матрица* $A^0(t, \varepsilon)$ *голоморфна по обеим переменным в области* $I \times \Omega$ *и имеет асимптотическое разложение вида* (1.2), б) *матрица* φ *в области* $I \times U \times \Omega$ *голоморфна по* ε *и удовлетворяет условиям существования и единственности решения задачи Коши,* в) *матрица* $A(t) = A^0(t, 0)$ *удовлетворяет условию* (2.2). *Тогда*

1. *Система* (1.1) *может быть формально удовлетворена выражением*

$$x = \tilde{K}_1(t, \varepsilon)\, y_1 + \tilde{K}_2(t, \varepsilon)\, y_2,$$

где y_1 *и* y_2 — *соответственно решения векторно-матричного уравнения*

$$\varepsilon^{\mu_1} \frac{dy_1}{dt} = \tilde{\Lambda}_1(t, \varepsilon)\, y_1 + \tilde{M}_1(t, \varepsilon)\, E_n^{(s)} \varphi$$

n_1*-го порядка и уравнения*

$$\varepsilon^{\mu_1} \frac{dy_2}{dt} = B^0(t, \varepsilon)\, y_2 + f(t, u, \varepsilon) \tag{2.29}$$

$n - n_1$*-го порядка.*

2. *Если в условии* (2.2) $r \geqslant 2$, *то матрица* $B(t)$ *обладает свойством* (2.24).

3. *Матрицы* $\tilde{K}_2(t, \varepsilon)$, $\tilde{\Lambda}_2(t, \varepsilon)$, $\tilde{M}_2(t, \varepsilon)$, $B^0(t, \varepsilon)$, $f(t, u, \varepsilon)$ *определяются соотношениями* (2.6), (2.12), (2.13), (2.17—2.21), (2.23), (2.25), (2.26), (2.28).

Уравнение (2.29) порядка $n - n_1$ имеет такую же структуру, что и исходное уравнение (1.1) порядка n и поэтому, если в условии (2.2) $r \geqslant 2$, то к уравнению (2.29) применима доказанная теорема и значит снова можно произвести отщепление подсистемы порядка n_2, соответсвующей второй по темпу группе движения. При этом оставшаяся часть системы будет иметь порядок $n - k_1 - k_2$ и по форме опять будет аналогична исходному уравнению и поэтому при $r \geqslant 3$ в условии (2.2) возможно отщепление подсистемы, отвечающей третьей по темпу группе движений и т. д. Этим путем при $r = p - 1$ можно произвести полное расщепление p-темповой системы на p однотемповых систем.

3'. Обозначим (предполагая, что $m > \mu_1$)

$$K_2^{(m)}(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k K_2^{[k]}(t), \quad \Lambda_2^{(m)}(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k \Lambda_2^{[k]}(t),$$

$$M_2^{(m)}(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k M_2^{[k]}(t).$$

Через $B^{(m)}$ и $f^{(m)}$ обозначим матрицы, которые получаются из B^0 и f, если из их выражений отбросить все $K_2^{[k]}$ $\Lambda_2^{[k]}$ и $M_2^{[k]}$ при $k > m$.

Приближенным решением уравнения (1.1) будем называть вектор x_m, определенный соотношениями

$$x_m = K_1^{(m)}(t, \varepsilon)\, y_1^{(m)} + K_2^{(m)}(t, \varepsilon)\, y_2^{(m)},$$

$$\varepsilon^{h_1} \frac{dy_1^{(m)}}{dt} = \Lambda_1^{(m)}(t, \varepsilon) y_1^{(m)} + M_1^{(m)}(t, \varepsilon)\, E_n^{(\varepsilon)} \varphi,$$

$$\varepsilon^{H_1} \frac{dy_2^{(m)}}{dt} = B^{(m)}(t, \varepsilon) y_2^{(m)} + f^{(m)}(t, u, \varepsilon).$$

Оценку погрешности приближенного решения нетрудно получить, например, по основанным на методе Н. Н. Боголюбова [7] схемам, описанным в [5,8]. Имеют место следующие оценки.

Пусть собственные значения симметризованной матрицы $1/2\,(A_{11} + A_{11}^{*})$ не отрицательны. Тогда при

$$x(t_0) = x_m(t_0)$$

существует такое $\varepsilon_1 > 0$ $(\varepsilon_1 < \varepsilon_0)$ и постоянная c_m, что

$$\|x - x_m\| \leqslant c_m\, \varepsilon^{m-1} \ (\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)\ t \in [t_0, T],\ T < \infty).$$

В случае однородной системы ($\varphi \equiv 0$) имеет место оценка

$$\|x - x_m\| \leqslant c_m\, \varepsilon^{m} \ (\varepsilon \in (0, \varepsilon_1),\ t \in [t_0, T],\ T < \infty).$$

Эти оценки показывают, что приближенное решение x_m имеет асимптотический характер.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 10.XI.1978

Կ. Ա. ԱԲԳԱՐՅԱՆ. Սինգուլյար գրգռված բազմատեմպային համակարգի տրոհումը (ամփոփում)

Դիտարկվում է n-երրորդ կարգի p-տեմպային համակարգը՝

$$\varepsilon^{H} \frac{dx}{dt} = A^0(t, \varepsilon)\, x + \varphi(t, u, \varepsilon) \tag{1}$$

որտեղ՝

$$H = \mathrm{diag}\,(\mu_1 E_{n_1},\ \mu_2 E_{n_2}, \cdots,\ \mu_p E_{n_p});\ \mu_i (i = 1,\ 2, \cdots,\ p) -$$

-ամբողջ թվեր են, այնպես, որ $\mu_1 > \mu_2 > \cdots > \mu_p \geqslant 0$;
E_{n_j} — n_j $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ p)$ կարգի միավոր մատրիցներ են. ε -ը դրական պարամետր է,
$A^0(t, \varepsilon)$ — երկու փոփոխականի հոլոմորֆ, n-րդ կարգի քառակուսային մատրից է.
$\varphi(t, u, \varepsilon)$-ը — $n \times 1$ տիպի սյունային մատրից է՝ հոլոմորֆ ըստ ε-ի ․

Առաջարկվում է p-տեմպային համակարգի (1) ասիմպտոտիկ տրոհման ալգորիթմը n_1, n_2 և այլ կարգի միատեմպանի համակարգերի հաջորդական անջատման միջոցով․

K. A. ABGARIAN. *Splitting of a singularly excited multitemp system* (summary)

The p-temp system of order n is observed

$$\varepsilon^{H}\frac{dx}{dt} = A^{0}(t, \varepsilon)\,x + \varphi(t, u, \varepsilon) \qquad (1)$$

where

$$H = \operatorname{diag}(\mu_1 E_{n_1}, \mu_2 E_{n_2}, \cdots, \mu_p E_{n_p}),\ \mu_i\,(i = 1, 2, \cdots, p)$$

are integers, $\mu_1 > \mu_2 > \cdots > \mu_p > 0$;

E_{n_j} is the unit matrix of order n_j $(j = 1, 2, \cdots, p)$ ε is a positive parameter; $A^0(t, \varepsilon)$ is a quadratic matrix of order n holomorphic with respect to both variables $\varphi(t, u, \varepsilon)$ is a column matrix of $n \times 1$ type holomorphic with respect to ε.

The algorithm for asymptotic splitting of the p-temp system is proposed by means of sequential selection of mono-temp systems of orders n_1, n_2 etc.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. Вазов*. Асимптотические разложения обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Изд. «Мир», 1968.
2. *К. А. Абгарян*. Асимптотическое расщепление линейной системы автоматического управления. ДАН СССР, 166, № 2, 1966, 301—304.
3. *С. Ф. Фещенко, Н. И. Шкиль, Л. Ф. Николенко*. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. Киев, «Наукова Думка», 1966.
4. *А. Б. Васильева*. Асимптотические методы в теории дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной. Пятая летняя математическая школа, Изд-во АН УССР, Киев, 1958.
5. *К. А. Абгарян*. Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем, М., Изд. «Наука», 1973.
6. *К. А. Абгарян*. Приведение квадратной матрицы к квазидиагональному виду и разложение ее на составляющие, Изв. АН АрмССР, сер. «Математика», 18, № 2, 1965, 3—14.
7. *Н. Н. Боголюбов*. О некоторых статистических методах в математической физике, Изд. АН УССР, Львов, 1945.
8. *Ю. Л. Далецкий, С. Г. Крейн*. О дифференциальных уравнениях в гильбертовом пространстве, Укр. матем. журн., 2, № 4, 1950.