ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIV, № 4, 1979 Математика

Ю. М. АРЛИНСКИЙ

РЕГУЛЯРНЫЕ (*)-РАСШИРЕНИЯ КВАЗИЭРМИТОВЫХ ОПЕРАТОРОВ В ОСНАЩЕННЫХ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Бирасширения эрмитовых и неэрмитовых операторов возникли в связи с построением теории характеристических оператор-функций неограниченных операторов (близких к самосопряженным). Самосопряженные бирасширения неплотно заданного эрмитова оператора с выходом в оснащенное гильбертово пространство были предметом изучения в [1]*.

Настоящая статья посвящена изучению чрезвычайно важных для теории характеристических оператор-функций регулярных (*)-расширений квазиэрмитовых операторов (все определения даны ниже). Отметим, что такие (*)-расширения для операторов с конечным рангом неэрмитовости были введены Э. Р. Цекановским в [2], [3].

Мы выделяем класс неограниченных квазиэрмитовых операторов, допускающих регулярные расширения, даем описание всех регулярных (*)-расширений данного оператора и приводим критерий регулярности данного (*)-расширения.

Часть результатов настоящей работы анонсирована в [4]. Там же регулярные (*)-расширения были применены для исследования аналитических свойств характеристических оператор-функций неограниченных операторных узлов. Автор благодарен Э. Р. Цекановскому за полезные обсуждения полученных результатов.

Пусть H_0 — сепарабельное гильбертово пространство, A — замкнутый эрмитов оператор в H_0. Пусть $H = \overline{D(A)}$, $H' = H_0 \ominus H$, P — ортопроектор в H_0 на H.

Оператор A мы будем называть регулярным, если PA — замкнутый эрмитов оператор в H [5].

Замкнутый плотно заданный оператор T будем называть квазиэрмитовым расширением A, если $T \supset A$, $T^* \supset A$.

Определение класса Ω_A. Квазиэрмитово расширение T отнесем к классу Ω_A, если

1) A — максимальная общая эрмитова часть T, T^*, т. е.

$$D(A) = \{f \in H_0,\ Tf = T^* f\},$$

2) PT, PT^* — замкнутые операторы в H_0,

---

* В этой работе, а также в [2, 3] бирасширения назывались обобщенными расширениями.

3) $-i$ — регулярная точка оператора T.

Будем рассматривать A как оператор из H в H_0. Пусть A^*: $H_0 \to H$ — его сопряженный, при этом $\overline{D(A^*)} = H_0$.

Обозначим $H_+ = D(A^*)$, превратим H_+ в гильбертово пространство, введя в нем скалярное произведение

$$(f, g)_+ = (f, g)_0 + (A^* f, A^* g)_0.$$

Как известно [1], имеет место $(+)$ ортогональное разложение

$$H_+ = D(A) \oplus N_i^{\cdot} \oplus N_{-i}^{\cdot} \oplus N,$$

где

$$N = (AA^* + I)^{-1} H', \; N_{\pm i}^{\cdot} = H \ominus (PA \pm iI)\, D(A)$$

($N_{\pm i}^{\cdot}$ называются полудефектными подпространствами оператора A).

Введем в H_+ эквивалентное скалярное произведение

$$(f, g)_{+1} = (f, g)_+ + (P_N^+ f, P_N^+ g)_{+1},$$

где P_N^+ — ортопроектор в H_+ на N.

Легко видеть, что $D(A)$, $N_{\pm i}^{\cdot}$, $N\,(+1)$ ортогональны. Введем обозначения: $W = N_i^{\cdot} \oplus N_{-i}^{\cdot} \oplus N$, $P^+ = P^+_{N_i^{\cdot}} + P^+_{N_{-i}^{\cdot}}$; $J^+ = P^+_{N_i^{\cdot}} - P^+_{N_{-i}^{\cdot}}$ ($P^+_{N_{\pm i}^{\cdot}}$ — ортопроекторы в H_+ на $N_{\pm i}^{\cdot}$).

Пусть $H_+ \subset H_0 \subset H_-$ — оснащенное гильбертово пространство, $\mathbf{J}$ — естественно возникающая изометрия H_- и H_+ [6]. Через $[H_+, H_-]$ будем обозначать совокупность линейных ограниченных операторов, заданных из H_+ со значениями в H_-.

Если $B \in [H_+, H_-]$, то $B^x \in [H_+, H_-]$, где B^x — сопряженный к B оператор, т. е. $(Bu, v)_0 = (u, B^x v)_0 \;\forall u, v \in H_+$.

Определение. Оператор $\mathbf{A} \in [H_+, H_-]$ называется бирасширением оператора A, если $\mathbf{A} \supset A$, $\mathbf{A}^x \supset A$. Если $\mathbf{A} = \mathbf{A}^x$, то $\mathbf{A}$ называется самосопряженным бирасширением оператора A.

Оказывается [7], что всякое бирасширение имеет вид

$$\begin{cases} \mathbf{A} = A\, P^+_{D(A)} + \left[A^* + \mathbf{J}^{-1}\left(Q - \dfrac{i}{2} J^+\right)\right] P^+_W \\ \mathbf{A}^x = A\, P^+_{D(A)} + \left[A^* + \mathbf{J}^{-1}\left(Q^* - \dfrac{i}{2} J^+\right)\right] P^+_W, \end{cases} \qquad (2)$$

где $P^+_{D(A)}$, P^+_W — ортопроекторы в H_+ на $D(A)$, W; $Q \in [W, W]$, причем $\mathbf{A} = \mathbf{A}^x$ тогда и только тогда, когда $Q = Q^*$.

Пусть $\mathbf{A}$ — самосопряженное бирасширение A,

$$D(\hat{A}) = \{f \in H_+,\; \mathbf{A} f \in H_0\};$$

оператор $\mathbf{A}$ называется сильным самосопряженным бирасширением, если $\hat{A} = \hat{A}^*$, где $\hat{A} = \mathbf{A}|_{D(\hat{A})}$, т. е. $\hat{A}$ — самосопряженное расширение оператора A.

Определение. Оператор $\mathbf{A} \in [H_+, H_-]$ называется ($*$)-расширением оператора T класса Ω_A, если $\mathbf{A} \supset T$, $\mathbf{A}^* \supset T^*$.

Как известно ([7]), всякому оператору T класса Ω_A отвечает оператор M со свойствами:

а) $M \in [N'_i \oplus N, N'_{-i} \oplus N]$, $M^* \in [N'_{-i} \oplus N, N'_i \oplus N]$,

б) -1 — точка регулярного типа для M и M^*,

в) $D(T) = D(A) \oplus (M+I)(N'_i \oplus N)$,

$$D(T^*) = D(A) \oplus (M^* + I)(N'_{-i} \oplus N),$$

г) существуют $(MM^* - I)^{-1}$ и $(M^*M - I)^{-1}$.

Если $\mathbf{A}$ — ($*$)-расширение оператора T класса Ω_A, то $\mathbf{A}$ — бирасширение оператора A, поэтому всякое ($*$) — расширение $\mathbf{A}$ оператора T имеет вид (2), где оператор Q удовлетворяет соотношениям ([7])

$$\left\{\begin{array}{l} Q(M+I)f = \dfrac{i}{2}(I - M)f, \ f \in N'_i \oplus N, \\ Q^*(M^* + I)g = \dfrac{i}{2}(M^* - I)g, \ g \in N'_{-i} \oplus N. \end{array}\right. \tag{3}$$

Лемма 1. *Пусть* $Q \in [W, W]$ *удовлетворяет соотношениям* (3), *тогда*

$$\operatorname{Ker}\left[\frac{Q+Q^*}{2}P^+ + \frac{i}{2}J^+\right] = \operatorname{Ker}\left[\frac{Q-Q^*}{2i}P^+\right]. \tag{4}$$

Доказательство. В силу (3)

$$P^+\left[\left(\frac{Q+Q^*}{2} - \frac{i}{2}J^+\right) + i\frac{Q-Q^*}{2i}\right](M+I)(N'_i \oplus N) = 0,$$

$$P^+\left[\left(\frac{Q+Q^*}{2} - \frac{i}{2}J^+\right) - i\frac{Q-Q^*}{2i}\right](M^*+I)(N'_{-i} \oplus N) = 0,$$

отсюда

$$P^+\left(\frac{Q+Q^*}{2} - \frac{i}{2}J^+\right)[(M+I)(N'_i \oplus N) + (M^*+I)(N'_{-i} \oplus N)] =$$

$$= P^+\frac{Q-Q^*}{2i}[(M+I)(N'_i \oplus N) + (M^*+I)(N'_{-i} \oplus N)].$$

Из обратимости операторов $MM^* - I$ и $M^*M - I$ следует плотность в W линеала $(M+I)(N'_i \oplus N) + (M^*+I)(N'_{-i} \oplus N)$, поэтому

$$\overline{R\left[P^+\frac{Q+Q^*}{2} - \frac{i}{2}J^+\right]} = \overline{R\left[P^+\frac{Q-Q^*}{2i}\right]}.$$

Отсюда и вытекает (4).

Теорема 1. *Пусть* $S\in[W, W]$, $S=S^*$. *Для того чтобы самосопряженное бирасширение*

$$\mathbf{A}=AP^+_{D(A)}+\left|A^*+\mathbf{J}^{-1}\left(S-\frac{i}{2}J^+\right)\right|P^+_W$$

было сильным, необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{Ker}\left|SP^++\frac{i}{2}J^+\right|=N\oplus(U+I)N'_i,$$

где $U-(+1)$ *изометрическое отображение* N'_i *на* N'_{-i}.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathbf{A}=AP_{D(A)}+\left|A^*+\mathbf{J}^{-1}\left(S-\frac{i}{2}J^+\right)\right|P^+_W$ — сильное самосопряженное бирасширение оператора A, тогда [1], [5]

$$D(\overset{*}{A})=D(A)\oplus(V+I)(N'_i\oplus N),$$

где $V(+1)$ изометрическое отображение $N'_i\oplus N$ на $N'_{-i}\oplus N$, причем $(V+1)\varphi\neq0$, $\varphi\neq0$

$$S(V+I)\varphi=\frac{i}{2}(I-V)\varphi,\ \varphi\in N'_i\oplus N.$$

Из этого получим, что

$$\left(S-\frac{i}{2}I\right)(V+I)\varphi=-iV\varphi,$$

$$\left(S+\frac{i}{2}I\right)(V+I)\varphi=i\varphi,\ \varphi\in N'_i\oplus N.$$

Поэтому

$$\left(S-\frac{i}{2}I\right)G_0=N'_{-i}\oplus N,\left(S+\frac{i}{2}I\right)G_0=N'_i\oplus N,$$

где $G_0=(V+I)(N'_i\oplus N)$. Пусть $G_0^\perp=W\ominus G_0$. Так как S — самосопряженный в W оператор, то

$$\left(S-\frac{i}{2}I\right)W=\left(S+\frac{i}{2}I\right)W=W,$$

значит

$$(N'_{-i}\oplus N)+\left(S-\frac{i}{2}I\right)G_0^\perp=W,$$

$$(N'_i\oplus N)+\left(S+\frac{i}{2}I\right)G_0^\perp=W,$$

откуда

$$P^+_{N'_i}\left(S-\frac{i}{2}I\right)G_0^\perp=N'_i,$$

$$P^{+}_{N'_{-i}}\left(S+\frac{i}{2}I\right)G_0^{+}=N'_{-i}.$$

Кроме того

$$P^{+}_{N'_{\pm i}}\left(S\mp\frac{i}{2}I\right)\varphi\neq 0\ \forall\varphi\in G_0^{+},\ \varphi\neq 0.$$

Зададим оператор $\tilde{V}\in[N'_i,\ N'_{-i}]$:

$$\begin{cases}\varphi=P^{+}_{N'_i}\left(S-\frac{i}{2}I\right)f,\\ \tilde{V}\varphi=P^{+}_{N'_{-i}}\left(S+\frac{i}{2}I\right)f,\ f\in G_0^{+}.\end{cases}$$

В силу сказанного выше оператор $\tilde{V}$ корректно определен и отображает N'_i на N'_{-i}. Таким образом

$$R\left[P^{+}\left(S-\frac{i}{2}J^{+}\right)\right]=(\tilde{V}+I)\,N'_i.$$

Следовательно

$$\operatorname{Ker}\left[SP^{+}+\frac{i}{2}J^{+}\right]=N\oplus(\tilde{V}^{*}-I)\,N'_{-i}.$$

Пусть $f\in(\tilde{V}^{*}-I)\,N'_{-i}$, тогда $Sf=-\frac{i}{2}J^{+}f$. Из эрмитовости S вытекает, что $\|P^{+}_{N'_i}f\|^2_{+1}=\|P^{+}_{N'_{-i}}f\|^2_{+1}$. Это означает, что оператор $\tilde{V}^{*}(+1)$ изометричен. Обозначим $U=-\tilde{V}$, тогда $U\ (+1)$ изометричен и отображает N'_i на N'_{-i}, причем

$$\operatorname{Ker}\left[SP^{+}+\frac{i}{2}J^{+}\right]=N_{*}\oplus(U_{*}+I)\,N'_{i}.$$

Достаточность. Пусть

$$\operatorname{Ker}\left[SP^{+}+\frac{i}{2}J^{+}\right]=N\oplus(U+I)\,N'_{i},$$

где

$$U\,N_i^{+}=N'_{-i},\ \|Uf\|^2_{+1}=\|f\|^2_{+1}\ \ \forall f\in N_i.$$

Тогда

$$R\left[P^{+}S-\frac{i}{2}J^{+}\right]=(U-I)\,N'_{i}, \tag{*}$$

Это означает, что

$$\left\|P^{+}_{N'_i}\left(S-\frac{i}{2}I\right)f\right\|_{+1}=\left\|P^{+}_{N'_{-i}}\left(S+\frac{i}{2}I\right)f\right\|_{+1}\ \forall f\in W.$$

Если **A** не сильно самосопряженное бирасширение, то всегда найдется $f \in W([1])$, что либо

$$P^{+}_{N'_i}\left(S - \frac{i}{2} I\right) f = 0, \text{ а } P^{+}_{N'_{-i}}\left(S + \frac{i}{2} I\right) f \neq 0,$$

либо

$$P^{+}_{N'_i}\left(S - \frac{i}{2} I\right) f \neq 0, \text{ а } \quad P^{+}_{N'_{-i}}\left(S + \frac{i}{2} I\right) f = 0.$$

В этих случаях не выполняется (*), значит **A** — сильное самосопряженное бирасширение. Теорема доказана.

Определение. (*)-расширение **A** оператора T класса Ω_A назовем регулярным, если $\mathbf{A}_R = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^*)$ — сильное самосопряженное бирасширение оператора A.

Определение. Оператор T класса Ω_A будем относить к классу Λ_A, если он допускает регулярные (*)-расширения.

Теорема 2. *Для того чтобы оператор T класса Ω_A принадлежал классу Λ_A, необходимо и достаточно, чтобы существовало $(+1)$ изометрическое отображение U N'_i на N'_{-i} такое, что*

$$\begin{cases} D(T) \dotplus (U + I) N'_i = H_+ \\ D(T^*) \dotplus (U + I) N'_i = H_+. \end{cases} \tag{5}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathbf{A} = AP^{+}_{D(A)} + \left[A^* + \mathbf{J}^{-1}\left(Q - \frac{i}{2} J^+\right)\right] P^{+}_{\mathfrak{M}}$ — регулярное (*)-расширение оператора T класса Ω_A, при этом выполняются равенства (3).

Так как $\mathbf{A}_R = AP^{+}_{D(A)} + \left[A^* + \mathbf{J}^{-1}\left(\frac{Q + Q^*}{2} - \frac{i}{2} J^+\right)\right] P^{+}_{\mathfrak{M}}$ — сильное самосопряженное бирасширение оператора A, то по теореме 1

$$\operatorname{Ker}\left[\frac{Q + Q^*}{2} P^+ + \frac{i}{2} J^+\right] = N \oplus (U + I) N'_i,$$

$$U N'_i = N'_{-i}, \ \|Uf\|_{+1} = \|f\|_{+1} \quad \forall f \in N'_i.$$

Из формулы (4) следует, что

$$\operatorname{Ker}\left[\frac{Q - Q^*}{2i} P^+\right] = N \oplus (U + I) N'_i.$$

Значит $\forall f_i \in N'_i$

$$\frac{Q + Q^*}{2} (U + I) f_i = \frac{i}{2} (U - I) f_i; \ \frac{Q - Q^*}{2i} (U + I) f_i = 0,$$

$$Q (U + I) f_i = Q^* (U + I) f_i = \frac{i}{2} (U - I) f_i.$$

Поскольку

$$\left(Q-\frac{i}{2}J\right)(M+I)\varphi=\frac{i}{2}P^{+}_{N}(I-M)\varphi,\ \varphi\in N_i\oplus N,$$

то

$$(U+I)N_i\cap(M+I)(N_i\oplus N)=\{0\}.$$

Аналогично

$$(U+I)N_i'\cap(M^*+I)(N_{-i}'\oplus N)=\{0\}.$$

Пусть h $(+1)$ ортогонален $(U+I)N_i\dotplus(M+I)(N_i'\oplus N)$, тогда легко видеть, что

$$h=(U-I)e_i+e_N,\ e_i\in N_i,\ e_N\in N,\ h=z-P^{+}_{N_i}M^*z,$$

где $P^{+}_{N}(M^*+I)z=0$, значит

$$\begin{cases} e_i=P^{+}_{N_i}M^*z\\ Ue_i=P^{+}_{N_{-i}}z,\end{cases}$$

$$(U+I)e_i=P^{+}_{N_i}M^*z+P^{+}_{N_{-i}}z=(M^*+I)z.$$

Так как

$$(U+I)N_i'\cap(M^*+I)(N_{-i}'\oplus N)=0,\ z=0,\ e_i=0,$$

то $h=0$. Поэтому

$$(M+I)(N_i'\oplus N)\dotplus(U+I)N_i\ \text{и аналогично}$$

$$(M^*+I)(N_{-i}'\oplus N)\dotplus(U+I)N_i\ \text{всюду плотно в}\ W.$$

Пусть $f^{(n)}=(U+I)\varphi^{(n)}+(M+I)h^{(n)}$, $n=1,2,\cdots$ $(+1)$ сходящаяся последовательность.

Так как Q $(+1)$ непрерывен, то последовательность $\{Qf^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ сходящаяся

$$Qf^{(n)}=\frac{i}{2}(U-I)\varphi^{(n)}+\frac{i}{2}(I-M)h^{(n)},$$

$$\left(Q+\frac{i}{2}I\right)f^{(n)}=iU\varphi^{(n)}+ih^{(n)},\ n=1,2,\cdots.$$

Из ортогональности N_{-i}' и $N_i'\ni N$ вытекает, что $\{U\varphi^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{h^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ — сходящиеся последовательности, поэтому $\{\varphi^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, и значит

$$(U+I)N_i'\dotplus(M+I)(N_i'\oplus N)=W.$$

Аналогично $(U+I)N_i'\dotplus(M^*+I)(N_{-i}'\oplus N)=W$.

Вследствие $D(T)=D(A)\oplus(M+I)(N_i'\oplus N)$,

$$D(T^*)=D(A)\oplus(M^*+I)(N_{-i}'\oplus N)$$

получаем

$$D(T)\dotplus(U+I)N_i'=D(T^*)\dotplus(U+I)N_i'=H_+.$$

Достаточность. Пусть U — такое изометрическое отображение, что выполнены равенства (5).

Определим $Q \in [W, W]$ следующим образом:

$$\begin{cases} f = (U+I)\, e_i + (M+I)\, \varphi, \\ Qf = \dfrac{i}{2}(U-I)\, e_i + \dfrac{i}{2}(I-M)\, \varphi, \; e_i \in N_i', \; \varphi \in N_i \ominus N. \end{cases}$$

Простой проверкой можно убедиться в том, что оператор Q^* задается следующим образом:

$$\begin{cases} h = (U+I)\, g_i + (M^*+I)\, \psi, \\ Q^* h = \dfrac{i}{2}(U-I)\, g_i + \dfrac{i}{2}(M^*-I)\, \psi, \end{cases}$$

$$g_i \in N_i', \; \psi \in N_i \ominus N.$$

Отсюда ясно, что оператор

$$\mathbf{A} = A\, P^+_{D(A)} + \left[A^* + \mathbf{J}^{-1}\left(Q - \frac{i}{2} J^+ \right) \right] P^+_W$$

$(*)$-расширение оператора T класса Ω_A.

Так как

$$\mathrm{Ker}\left[\frac{Q+Q^*}{2} P^+ + \frac{i}{2} J^+ \right] = N \oplus (U+I)\, N_i', \; U N_i' = N_{-i}',$$

то по теореме 1

$$\mathbf{A}_R = A P^+_{D(A)} + \left[A^* + \mathbf{J}^{-1}\left(\frac{Q+Q^*}{2} - \frac{i}{2} J^+ \right) \right] P^+_W$$

— сильное самосопряженное бирасширение оператора A, значит

$$\mathbf{A} = A P^+_{D(A)} + \left[A^* + \mathbf{J}^{-1}\left(Q - \frac{i}{2} J^+ \right) \right] P^+_W$$

— регулярное $(*)$-расширение оператора T, поэтому $T \in \Lambda_A$.

Теорема 3. *Если у замкнутого эрмитова оператора A индексы дефекта конечны и равны, то класс Ω_A совпадает с классом Λ_A.*

Доказательство. В [8] показано, что если у замкнутого эрмитова оператора конечные и равные дефектные числа, то равны и полудефектные числа. В [5] показано, что замкнутый эрмитов оператор с конечными дефектными числами регулярен. Легко видеть, что если оператор удовлетворяет условиям $T \supset A$, $T^* \supset A$, то PT и PT^* — замкнутые операторы. $N_{\pm i} = H_0 \ominus (A \pm iI)\, D(A)$.

Пусть $T \in \Omega_A$, $\dim N_{\pm i} = r$, $\dim N = p$, $r < \infty$, тогда $\dim N_i' = \dim N_{-i}' = r - p$.

Пусть M — отвечающий T в пространстве W оператор

$$D(T) = D(A) \dot{+} (M + I)(N_i' \oplus N),$$

$$D(T^*) = D(A) \dot{+} (M^* + I)(N_{-i}' \oplus N).$$

Из плотности $D(T)$ и $D(T^*)$ в H_0 вытекает, что

$$P_N^+ (M + I)(N_i' \oplus N) = P_N^+ (M^* + I)(N_{-i}' \oplus N) = N.$$

Обозначим

$$\tilde{N} = \mathrm{Ker}\ [P_N^+ (M + I)];\ \tilde{N}_* = \mathrm{Ker}\,[P_N^+ (M^* + I)].$$

Из сказанного выше следует, что $\dim \tilde{N} = \dim \tilde{N}_* = r - p$. Обозначим через F, G, L следующие подпространства в $\tilde{N}$

$$F = \mathrm{Ker}\,[P_{N_i'}^+ |_{\tilde{N}}];\ G = \mathrm{Ker}\,[P_{N_{-i}'}^+ M|_{\tilde{N}}];\ L = \tilde{N} \ominus [F \dot{+} G].$$

Отметим, что $F \cap G = \{0\}$ вытекает из равенства $(M + I) f = P_{N_i'}^+ f + P_{N_{-i}'}^+ Mf$, $f \in \tilde{N}$ и обратимости оператора $M + I$.

Пусть $K = N_{-i}' \ominus [P_{N_{-i}'}^+ MF \dot{+} P_{N_{-i}'}^+ ML]$. Так как $\dim \tilde{N} = \dim N_{-i}'$, то $\dim K = \dim G$.

Зададим изометрическое отображение подпространства $P_{N_i'}^+ G \dot{+} P_{N_i'}^+ L$ на $K \oplus P_{N_{-i}'}^+ ML$ и продолжим его до отображения V пространства N_i' на N_{-i}'.

Рассмотрим на $\tilde{N}$ уравнение относительно f

$$VP_{N_i'}^+ f = \alpha P_{N_{-i}'}^+ Mf, \tag{6}$$

α — комплексный параметр.

Пусть $f_\alpha \neq 0$ — решение этого уравнения, тогда

$$g = \alpha P_{N_{-i}'}^+ M f_\alpha \in P_{N_{-i}'}^+ MF \dot{+} P_{N_{-i}'}^+ ML,$$

$$g = VP_{N_i'}^+ f_\alpha \in V(P_{N_i'}^+ G \dot{+} P_{N_i'}^+ L).$$

Отсюда

$$g \in [P_{N_{-i}'}^+ MF \dot{+} P_{N_{-i}'}^+ ML] \cap [K \oplus P_{N_{-i}'}^+ ML].$$

Из определения подпространства K вытекает, что $g \in P_{N_{-i}'}^+ ML$, т. е $f_\alpha \in G \oplus L$.

Допустим, что уравнение (6) разрешимо при любом α. Выберем последовательность $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ так, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Пусть f_n, $\|f_n\|_{+1} = 1$, $n=1, 2, \cdots$; решение уравнения (6) при $\alpha = \alpha_n$. Последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ компактна. Будем считать, что $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к f, $\|f\|_{+1} = 1$, так как $f_n \in L \oplus G$, $f \in L \oplus G$. Поскольку $\|P_{N_{-i}'}^+ Mf_n\| \leqslant \|Mf_n\| \leqslant \|M\|$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n P_{N_{-i}'}^+ Mf_n = 0$. Значит $\lim\limits_{n\to\infty} V P_{N_i'}^+ f_n = 0$, $P_{N_i'}^+ f = 0$. Поэтому $f \in F$, вопреки $f \in L \oplus G$ и $f \neq 0$.

Получили противоречие, значит существует лишь конечное множество чисел α, при которых уравнение (7) имеет нетривиальное решение. Это множество обозначим через $\mathfrak{a}$, если $\alpha_0 \overline{\in} \mathfrak{a}$ и $|\alpha_0| = 1$, то оператор $\bar{\alpha}_0 V P^{+}_{N'_i} - P^{+}_{N'_{-i}} M$ отображает взаимно однозначно $\bar{N}$ на N'_{-i}.

Покажем, что оператор $P^{+}_{N'_{-i}} - \bar{\alpha}_0 V P^{+}_{N'_i} M^*$ отображает взаимно однозначно $\bar{N}_*$ на N'_{-i}. Допустим, что $\exists g \in \bar{N}_*$, при котором

$$P^{+}_{N'_{-i}} g = \bar{\alpha}_0 V P^{+}_{N'_i} M^* g,$$

тогда при любом $f \in \bar{N}$ имеем

$$0 = (f, \alpha_0 V^{-1} (P^{+}_{N'_{-i}} g - \bar{\alpha}_0 V P^{+}_{N'_i} M^* g)_{+1} =$$

$$= (f, \alpha_0 V^{-1} P^{+}_{N'_{-i}} g)_{+1} - (f, P^{+}_{N'_i} M^* g)_{+1} =$$

$$= (\bar{\alpha}_0 V P^{+}_{N'_i} f, g)_{+1} - (f, M^* g)_{+1} + (f, P^{+}_{N} M^* g)_{+1} =$$

$$= (\bar{\alpha}_0 V P^{+}_{N'_i} f, g)_{+1} - (Mf, g)_{+1} - (f, P^{+}_{N} g)_{+1} =$$

$$= (\bar{\alpha}_0 V P^{+}_{N'_i} f, g)_{+1} - (Mf, g)_{+1} + (P^{+}_{N} f, g)_{+1} =$$

$$= (\bar{\alpha}_0 V P^{+}_{N'_i} f, g)_{+1} - (Mf, g)_{+1} + (P^{+}_{N} Mf, g)_{+1} =$$

$$= (\bar{\alpha}_0 V P^{+}_{N'_i} f - P^{+}_{N'_{-i}} Mf, g)_{+1}.$$

Значит g $(+1)$ ортогонален подпространству N'_{-i}, так как $g \in N'_{-i} \oplus N$ то $g \in N$, поэтому $P^{+}_{N'_i} M^* g = 0$, $(M^* + I) g = 0$. Отсюда $g = 0$.

Следовательно, уравнение $P^{+}_{N'_{-i}} g = \bar{\alpha}_0 V P^{+}_{N'_i} M^* g$ имеет только тривиальное решение, поэтому $P^{+}_{N'_{-i}} - \bar{\alpha}_0 V P^{+}_{N'_i} M^*$ отображает $\bar{N}_*$ на N_{-i}. Обозначим $U = \bar{\alpha}_0 V$. Покажем, что $(U + I) N'_i \cap (M + I)(N'_i \oplus N) = \{0\}$. Пусть $(U + I) f_i = (M + I) g$, $f_i \in N'_i$, $g \in N'_i \oplus N$. Из этого равенства следует, что $g \in \bar{N}$ и $U P^{+}_{N'_i} g - P^{+}_{N'_{-i}} M g = 0$, но как мы уже показали это уравнение имеет только тривиальное решение, поэтому $g = 0$

$$(U + I) N'_i \dotplus (M + I)(N'_i \oplus N) = W.$$

Аналогично $(U + I) N'_i \dotplus (M^* + I)(N'_{-i} \oplus N) = W$. По теореме 2 оператор $T \in \Lambda_A$.

Приведем пример оператора $T \in \Omega_A$, но $T \overline{\in} \Lambda_A$. Рассмотрим случай плотно заданного оператора A, тогда

$$N = 0 \text{ и } H_+ = D(A) \oplus N_{-i} \oplus N_{-i}.$$

Пусть $\dim N_{-i} = \dim N_i = \infty$. Мы построим такой оператор $M \in [N_i, N_{-i}]$, что $M^* M - I$ и $M M^* - I$ обратимы и для любого изометрического отображения U N_i на N_{-i} не выполняются равенства (5).

Прежде всего отметим, что если выполняются равенства (5), то оператор $M-U$—изоморфизм N_i и N_{-i}. В самом деле, для любого $e_{-i}\in N_{-i}$ однозначно найдутся $f_i, g_i\in N_i$, такие, что $e_{-i}=(U+I)f_i+(M+I)g_i$, но тогда $g_i=-f_i$ и $(M-U)f_i=e_{-i}$, т. е. уравнение $(M-U)f_i=e_{-i}$ однозначно разрешимо при любом $e_{-i}\in N_{-i}$.

Пусть B— вполне непрерывный оператор в N_i $\forall f\in N_i(Bf,f)_+\geqslant-\varepsilon(f,f)_+$, $0<\varepsilon<1$, причем число 0 не является собственным значением оператора B. Пусть V—изометрический оператор, отображающий N_i в N_{-i} и $\dim\operatorname{Ker}[V^*]=\infty$.

Положим $M=V(B+I)$, тогда $M^*=(B+I)V^*$,

$$M^*M-I=(B+I)V^*V(B+I)-I=B(B+2I).$$

Поскольку -2 — регулярная точка для B, а $R(B)$ плотно в N_i, то M^*M-I обратим

$$MM^*-I=V(B+I)^2V^*-I.$$

Если $(MM^*-I)f=0$, то $[(B+I)^2-I]V^*f=0$, поэтому $V^*f=0$, значит $f=V(B+I)^2V^*f=0$, т. е. MM^*-I также обратим.

Отметим, что оператор $MM^*-I=B(B+2I)$ вполне непрерывен. Допустим, что существует $U\in[N_i, N_{-i}]$ такой, что выполняются равенства (5), значит $M-U$ - изоморфизм N_i и N_{-i}, а следовательно, M^*-U^* изоморфизм N_{-i} и N_i.

Пусть G такое подпространство в N_i, что

$$(M-U)G=\operatorname{Ker}[V^*],\ \dim G=\infty.$$

При любом $g\in G$ и любом $f_i\in N_i$ имеем $((M-U)g, Mf_i)_+=0$, тогда $M^*Mg=M^*Ug$. Так как M^*-U^* изоморфизм N_{-i} и N_i, то $\exists c>0\ \|(M^*U-I)f\|_+\geqslant c\|f\|_+\ \forall f\in N_i$, в частности $\forall g\in G\ \|(M^*U-I)g\|_+\geqslant c\|g\|_+$ и поскольку $M^*Ug=M^*Mg$, то $\|(M^*M-I)g\|_+\geqslant c\|g\|_+$, но это неравенство невозможно, потому что M^*M-I вполне непрерывен, а $\dim G=\infty$.

Поэтому не существует изометрического оператора U со свойством (5). Положим $D(T)=D(A)\dotplus(M+I)N_i$

$$Tf=A^*f,\ f\in D(T).$$

Получим $T\in\Omega_A$, но $T\bar{\in}\Lambda_A$.

Дадим описание всех регулярных ($*$)-расширений оператора T класса Λ_A. Как следует из доказательства теоремы 2 всякому регулярному ($*$)-расширению **A** оператора T класса Λ_A отвечает $(+1)$ изометрическое отображение $U\,N_i$ на N_{-i} такое, что выполняются равенства (5), и наоборот, причем, если Q— оператор, задающий **A**, то

$$\left(Q-\frac{i}{2}J^+\right)(U+I)f_i=\left(Q^*-\frac{i}{2}J^*\right)(U+I)f_i=$$

$$=i(U-I)f_i,\ f_i\in N_i.$$

Таким образом, мы имеем взаимно-однозначное соответствие между операторами U со свойством (5) и регулярными ($*$)-расширениями **A**.

Пусть $\mathbf{P}$ $(\mathbf{P}_*)$ — оператор проектирования в H_+ на $D(T)(D(T^*))$ параллельно $(U+I)N_i'$, тогда

$$A^*(I-\mathbf{P})f = iJ^+(I-\mathbf{P})f,$$
$$A^*(I-\mathbf{P}_*)f = -iJ^+(I-\mathbf{P}_*)f,$$
$$\left(Q-\frac{i}{2}J^+\right)(I-\mathbf{P})f = -iJ^+(I-\mathbf{P})f,$$
$$\left(Q^*-\frac{i}{2}J^+\right)(I-\mathbf{P}_*)f = -iJ^+(I-\mathbf{P}_*)f,\ f\in H_+.$$

Имеем

$$\begin{cases} \mathbf{A}_P = T\mathbf{P} + i(I-\mathbf{J}^{-1})J^+(I-\mathbf{P}) \\ \mathbf{A}_P^r = T^*\mathbf{P}_* + i(I-\mathbf{J}^{-1})J^+(I-\mathbf{P}_*). \end{cases} \tag{7}$$

Приведем критерий регулярности (*)-расширения оператора T класса Ω_A.

Мы будем использовать одно соотношение, имеющееся в [1].

Пусть $N_{\pm i} = H_0 \ominus (A\pm iI)D(A)$ — дефектные подпространства оператора A, тогда

$$N_{\pm i} = (A^*\pm iI)(N'_{\pm i}\ominus N). \tag{8}$$

Теорема 4. *Для того чтобы (*)-расширение* $\mathbf{A}$ *было регулярным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись одновременно включения:*

$$(\mathbf{A}+iI)N_{-i} \geqslant R(\mathbf{A}-\mathbf{A}^r);$$
$$(\mathbf{A}^r-iI)N_i \geqslant R(\mathbf{A}-\mathbf{A}^r)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathbf{A}$ — регулярное (*)-расширение оператора T, тогда найдется изометрическое отображение U N_i' на N_{-i}' такое, что

$$(U+I)N_i' \dotplus (M+I)(N_i'\oplus N) = W,$$
$$(U+I)N_i' \dotplus (M^*+I)(N'_{-i}\oplus N) = W.$$

Пусть

$$\mathbf{A} = AP_{D(A)} + \left[A^* + \mathbf{J}^{-1}\left(Q-\frac{i}{2}\mathbf{J}^+\right)\right]P_W^+.$$

Поскольку

$$Q(U+I)f_i = Q^*(U+I)f_i = \frac{i}{2}(U-I)f_i,\ f_i\in N_i',$$

то

$$\left(Q-\frac{i}{2}J^+\right)(U+I)f_i = \left(Q^*-\frac{i}{2}J^+\right)(U+I)f_i = i(U-I)f_i.$$

Так как

$$\mathrm{Ker}\left[\frac{Q-Q^*}{2i}P^+\right] = N\oplus(U+I)N_i',$$

то

$$\overline{R\left[P^{+}\frac{Q-Q^{*}}{2i}\right]}=(U-I)\,N_{i}'=\left(Q-\frac{i}{2}\,J^{+}\right)(U+I)\,N_{i}'.$$

Пусть

$$f=\frac{1}{2i}(\mathbf{A}-\mathbf{A}^{*})\,g=\mathbf{J}^{-1}\left(\frac{Q-Q^{*}}{2i}\,g\right)=\mathbf{J}^{-1}\,P^{+}\frac{Q-Q^{*}}{2i}g+$$

$$+\,\mathbf{J}^{-1}\,P_{N}^{+}\,\frac{Q-Q^{*}}{2i}\,g.$$

Найдется вектор $h=(U+I)\,e_{i}$, $e_{i}\in N_{i}'$ такой, что

$$P^{+}\left(Q-\frac{i}{2}\,J^{+}\right)h=P^{+}\frac{Q-Q^{*}}{2i}\,g.$$

Легко видеть, что вектор

$$\varphi=h+(T+iI)^{-1}\left[\mathbf{J}^{-1}\,P_{N}^{+}\frac{Q-Q^{*}}{2i}\,g-(A^{*}+iI)\,h\right]$$

является решением уравнения $(\mathbf{A}+iI)\,\varphi=f$. Так как $\varphi\in N_{-i}$, то $(\mathbf{A}+iI)\,N_{-i}\supseteq R\,(\mathbf{A}-\mathbf{A}^{*})$. Аналогично $(\mathbf{A}^{*}-iI)\,N_{i}\supseteq R\,(\mathbf{A}-\mathbf{A}^{*})$.

Достаточность. Пусть

$$\mathbf{A}=A\,P_{D(A)}^{+}+\left[A^{*}+\mathbf{J}^{-1}\left(Q-\frac{i}{2}\,J^{+}\right)\right]P_{W}^{+},$$

$$(\mathbf{A}+iI)\,N_{-i}\supseteq R\,(\mathbf{A}-\mathbf{A}^{*}),\quad(\mathbf{A}^{*}-iI)\,N_{i}\supseteq R\,(\mathbf{A}-\mathbf{A}^{*}).$$

Из того, что Q удовлетворяет соотношениям (3) и плотности линеала $(M+I)(N_{i}'\oplus N)+(M^{*}+I)(N_{-i}'\oplus N)$ в W легко следует, что

$$\overline{R\left[P^{+}\,Q-\frac{i}{2}\,J^{+}\right]}\subseteq\overline{R\left[P^{+}\frac{Q-Q^{*}}{2i}\right]},$$

$$\overline{R\left[P^{+}Q^{*}-\frac{i}{2}J^{+}\right]}\subseteq\overline{R\left[P^{+}\frac{Q-Q^{*}}{2i}\right]}. \qquad (9)$$

Пусть $f_{i}\in N_{i}$, тогда из (8)

$$f_{i}=(A^{*}+iI)\,\varphi_{N}+\varphi_{i},\ \varphi_{N}\in N,\ \varphi_{i}\in N_{i}'.$$

$$(\mathbf{A}^{*}-iI)\,f_{i}=(AA^{*}+I)\,\varphi_{N}+\mathbf{J}^{-1}\,P^{+}\left(Q^{*}-\frac{i}{2}J^{+}\right)(\varphi_{i}+\varphi_{N})+$$

$$+\,\mathbf{J}^{-1}\,P_{N}^{+}\left(Q^{*}-\frac{i}{2}J^{+}\right)(\varphi_{i}+\varphi_{N})=\mathbf{J}^{-1}\left[\frac{1}{2}\,\varphi_{N}+P_{N}^{+}\,Q^{*}\,(\varphi_{i}+\varphi_{N})\right]+$$

$$+\,\mathbf{J}^{-1}\,P^{+}\left(Q^{*}-\frac{i}{2}\,J^{+}\right)(\varphi_{i}+\varphi_{N}).$$

(Здесь использовано то, что $A^{*}\varphi_{i}=i\varphi_{i}$, $A^{*}N\subset D(A)$,

$\frac{1}{2} J^{-1} \varphi_N = (AA^* + I) \varphi_N$, см. [1]).

Отсюда и из $(\mathbf{A}^* - iI) N_i \supset R(\mathbf{A} - \mathbf{A}^*)$ следует, что

$$\overline{R\left[P^+\left(Q^* - \frac{i}{2} J^+\right)\right]} \supseteq \overline{R\left[P^+ \frac{Q - Q^*}{2i}\right]},$$

сравнивая с (9), получим

$$\operatorname{Ker}\left[QP^+ + \frac{i}{2} J^+\right] = \operatorname{Ker}\left[\frac{Q - Q^*}{2i} P^+\right].$$

Аналогично

$$\operatorname{Ker}\left[Q^* P^+ + \frac{i}{2} J^+\right] = \operatorname{Ker}\left[\frac{Q - Q^*}{2i} P^+\right].$$

Из эрмитовости $\frac{1}{2}(Q + Q^*)$ вытекает, что существует подпространство $\hat{N}_i \subseteq N_i'$, изометрический оператор $V: \hat{N}_i \to N_{-i}'$ такие, что

$$\operatorname{Ker}\left[\frac{Q + Q^*}{2} P^+ + \frac{i}{2} J^+\right] = N \oplus (V + I) \hat{N}_i.$$

Рассуждая так же как при доказательстве теоремы 2, получим, что

$$(V + I) \hat{N}_i \dotplus (M + I)(N_i' \ominus N)$$

— подпространство в W.

Так как

$$\operatorname{Ker}\left[P^+\left(Q^* - \frac{i}{2} J^+\right)\right] = (M^* + I)(N_{-i}' \ominus N),$$

то

$$W \ominus \operatorname{Ker}\left[P^+\left(Q^* - \frac{i}{2} J^+\right)\right] = (I - P^+_{N_{-i}'}) \tilde{N},$$

где $\tilde{N} = \operatorname{Ker}\left[P_N (M + I)\right]$.

Пусть $\varphi \in \tilde{N}$, тогда $(M + I) \varphi \in N_i' \oplus N_{-i}'$ и

$$\left(Q + \frac{i}{2} J^+\right)(M + I) \varphi = i\left[I - P^+_{N_{-i}'} M\right] \varphi.$$

Это означает, что

$$\overline{R\left[QP^+ + \frac{i}{2} J^+\right]} = R\left[QP^+ + \frac{i}{2} J^+\right] = (I - P^+_{N_{-i}'} M) \tilde{N}.$$

Пусть

$$f \in W \ominus \left[(V + I] \hat{N}_i \dotplus (M + I)(N_i' \ominus N)\right],$$

тогда $\exists \varphi \in \tilde{N}$, что

$$\left(QP^{+} + \frac{i}{2} J^{+}\right) f = \left(Q + \frac{i}{2} J^{+}\right)(M+I)\varphi.$$

Поэтому

$$f = (M+I)\varphi + (V+I)\varphi_i + \varphi_N,\ \varphi_i \in \hat{N}_i,\ \varphi_N \in N.$$

Так как $(f, (M+I)\varphi)_{+1} = (f, (V+I)\varphi_i)_{+1} = 0$, то

$$(f, \varphi_N)_{+1} = (\varphi_N, f)_{+1} = \|\varphi_N\|^2_{+1} = \|f\|^2_{+1}.$$

Отсюда $f = \varphi_N$, значит $f \in N$. Но так как $f \perp (M+I)(N_i \ominus N)$, то

$$f = (I - P_{N_i} M^*) z, \text{ где } P_N (M^* + I) z = 0.$$

Если $f \in N$, то $(M^* + I) z = 0$, т. е. $z = 0$, $f = 0$. Таким образом

$$(V+I)\hat{N}_i \dotplus (M+I)(N_i \ominus N) = W. \tag{10}$$

Из леммы 1

$$\operatorname{Ker}\left[\frac{Q - Q^*}{2i} P^{+}\right] = N \ominus (V+I)\hat{N}_i.$$

Из (10)

$$R\left[P^{+}\left(Q - \frac{i}{2}J^{+}\right)\right] = P^{+}\left(Q - \frac{i}{2} J^{+}\right)(V+I)\hat{N}_i = (V-I)\hat{N}_i.$$

Из равенства

$$\operatorname{Ker}\left[\frac{Q - Q^*}{2i} P^{+}\right] = \operatorname{Ker}\left[Q^* P^{+} + \frac{i}{2} J^{+}\right]$$

получаем

$$\overline{R\left[P^{+}\left(Q - \frac{i}{2} J^{+}\right)\right]} = W \ominus \operatorname{Ker}\left[\frac{Q - Q^*}{2i} P^{+}\right].$$

Поэтому

$$W = (V-I)\hat{N}_i \oplus (V+I)\hat{N}_i \oplus N.$$

Значит $\hat{N}_i = N_i$, $VN_i = N_{-i}$.

По теореме 1

$$\mathbf{A}_R = AP^{+}_{D(\mathbf{A})} + \left[A^* + \mathbf{J}^{-1}\left(\frac{Q + Q^*}{2} - \frac{i}{2} J^{+}\right)\right] P^{+}_{W}$$

— сильное самосопряженное бирасширение оператора A, поэтому $\mathbf{A}$ — регулярное (*)-расширение оператора T.

Донецкий государственный
университет

Поступила 16.V.1977

*Յու. Մ. ԱՐԼԻՆՍԿԻ. Հանդերձված հիլբերտյան տարածություններում քվազիէրմիտյան օպերատորների ռեգուլյար (*)-ընդլայնումներ (ամփոփում)*

*Հոդվածը նվիրված է հանդերձված հիլբերտյան տարածության մեջ ելքով քվազիէրմիտյան օպերատորների ռեգուլյար (*)-ընդլայնումների ուսումնասիրությանը։ Այդ ընդլայնումները սկզբունքային նշանակություն ունեն ոչ սահմանափակ օպերատորային հանգույցների բնութագրիչ օպերատոր-ֆունկցիաների տեսության համար։*

*Մտցված է օպերատորների մի դաս, որոնք թույլ են տալիս ռեգուլյար (*)-ընդլայնում, բերվում է օպերատորը այդ դասին պատկանելու հայտանիշը։ Տրված են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, որպեսզի տվյալ ընդլայնումը լինի ռեգուլյար։*

Yu. M. ARLINSKY. *Regular (*)-extensions of quasihermitian operators in the equipped Hilbert spaces* (summary)

The paper deals with the (*)-extensions of quasihermitian operators, which are applied to the theory of characteristic operator-function of unbounded operator nots.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ю. М. Арлинский, Э. Р. Цекановский.* Метод оснащенных пространств в теории расширений эрмитовых операторов с неплотной областью определения, Сиб. мат. журнал, XV, № 2, 1974, 243—261.
2. *Э. Р. Цекановский.* Обобщенные расширения неограниченных линейных операторов. Докторская диссертация, Харьков, 1970.
3. *Э. Р. Цекановский.* Об описании и единственности обобщенных расширений квазиэрмитова оператора, Функц. анализ, 3, № 1, 1969, 96—97.
4. *Ю. М. Арлинский.* Об обратной задаче теории характеристических функций неограниченных операторных узлов, ДАН УССР, сер. А, № 2, 1976, 105—109.
5. *Ю. Л. Шмульян.* Регулярные и сингулярные эрмитовы операторы, Мат. заметки, 8, № 2, 1970, 197—203.
6. *Ю. М. Березанский.* Пространства с негативной нормой, УМН, 18, № 1, 1963, 63—96.
7. *Э. Р. Цекановский, Ю. Л. Шмульян.* Метод обобщенных функций в теории расширений неограниченных линейных операторов, Издательство Донецкого университета, 1973.
8. *М. А. Красносельский.* О самосопряженных расширениях эрмитовых операторов, УМЖ, № 1, 1948, 21—38.