ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIV, № 4, 1979 Математика

А. Э. ЕРЁМЕНКО

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ КРИВЫХ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ R^m

Пусть функция u субгармонична в R^m, $m \geqslant 2$. Асимптотической кривой называется кривая Γ, уходящая в бесконечность такая, что

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ x \in \Gamma}} u(x) = \sup_{x \in R^m} u(x).$$

Известно [1], что всегда существует локально спрямляемая асимптотическая кривая. Недавно Л. Карлесон [7] доказал существование полигональных асимптотических кривых. Обозначим через $l(r, \Gamma)$ длину части кривой Γ, лежащей в шаре $D(r) = \{x \in R^m : |x| < r\}$. Известно [2], [3], стр. 131, что если выполняется

$$u(x) < \begin{cases} O(\ln^2 |x|), & m = 2, \\ O(1), & m \geqslant 3, \ x \to \infty, \end{cases} \tag{1}$$

то в качестве асимптотической кривой может служить луч, исходящий из начала координат. Очевидно, что в этом случае $l(r, \Gamma) \equiv r$. С другой стороны, если φ — произвольная функция, стремящаяся к $+\infty$ при $r \to \infty$ на $[0, \infty)$, то существует целая функция f, для которой выполняется

$$\ln |f(x)| = O(\varphi(|x|) \ln^2 |x|), \quad x \to \infty,$$

причем для всякой асимптотической кривой Γ выполняется

$$\overline{\lim_{r \to \infty}}\, l(r, \Gamma) / r = \infty. \tag{2}$$

Этот результат, полученный в [4], с одной стороны опровергает гипотезу У. К. Хеймана, высказанную в [5], а с другой — показывает, что условие (1) нельзя ослабить при $m = 2$. Мы докажем, что условие (1) нельзя ослабить и при $m \geqslant 3$.

Теорема 1. *Пусть функция φ монотонно стремится к $+\infty$ на $[0, \infty)$. Существует функция u, субгармоническая в R^m, $m \geqslant 3$ со свойством*

$$u(x) \leqslant \varphi(|x|), \quad x \in R^m, \tag{3}$$

причем для каждой асимптотической кривой Γ выполняется (2).

Положим

$$\overline{D}(r) = \{x \in R^m : |x| \leqslant r\}, \quad S(r) = \{x \in R^m : |x| = r\},$$

$$K(r_1, r_2) = \{x \in R^m : r_1 < |x| < r_2\},$$

$$A_+ = \{x \in R^m : x_1 > 0, \ x_2^2 + \cdots + x_m^2 < 1\},$$

$$A_- = \{x \in R^m:\ x_1 < 0,\ x_2^2 + \cdots + x_m^2 < 1\},$$

$$\Phi_k = \bigcup_{i=0}^{k^2-1} \left\{ \left[K\left(3+\frac{4i}{4k},\ 3+\frac{4i+1}{4k}\right) \setminus A_+ \right] \cup \right.$$

$$\left. \cup \left\{ K\left(3+\frac{4i+2}{4k},\ 3+\frac{4i+3}{4k}\right) \setminus A_- \right\} \right\},\ k \in N.$$

Лемма. *Существует ограниченная в R^m, $m \geqslant 3$ субгармоническая функция v_k со свойствами*

$$v_k(x) = 0,\ x \in \overline{D}(1), \tag{4}$$

$$v_k(x) = -1,\ x \in \Phi_k. \tag{5}$$

Доказательство. Рассмотрим область

$$G_k = D(4+k) \setminus \{\overline{D}(1) \cup \Phi_k\}.$$

Положим

$$w_k(x) = M > 0,\ x \in S(4+k), \tag{6}$$

$$w_k(x) = 0,\ x \in \overline{D}(1), \tag{7}$$

$$w_k(x) = -1,\ x \in \Phi_k. \tag{8}$$

Продолжим функцию w_k, заданную условиями (6), (7), (8), до непрерывной функции в $\overline{D}(4+k)$, гармонической в G_k. Поскольку гармоническая мера множества $S(4+k)$ относительно области G_k положительна, функция w_k стремится к ∞ равномерно на компактах в G_k при $M \to \infty$. Зафиксируем M так, чтобы выполнялось

$$w_k(x) > 0,\ x \in S(2) \subset G_k. \tag{9}$$

Покажем, что w_k субгармонична в $D(4+k)$. Если $x_0 \notin S(1) \cup \cup \operatorname{Fr} \Phi_k$, то w_k гармонична в окрестности x_0. Пусть $x_0 \in \operatorname{Fr} \Phi_k$. Тогда $w_k(x_0) = -1$. С помощью (6), (7), (8) и принципа экстремума для гармонических функций, получаем, что x_0 минимум w_k. Пусть теперь $x_0 \in S(1)$, $w_k(x_0) = 0$. Из (7), (9) и принципа экстремума, примененного к кольцу $K(1, 2)$, следует, что x_0—локальный минимум функции w_k. Таким образом, функция w_k удовлетворяет условиям теоремы о среднем и, следовательно, является субгармонической в $D(4+k)$.

Продолжим функцию w_k до субгармонической и ограниченной во всем пространстве. В силу (6) наименьшая гармоническая мажоранта функции w_k в области $D(4+k)$ тождественно равна M, поэтому имеет место представление Грина

$$w_k(x) = \int\limits_{D(4+k)} \{-|x-\xi|^{2-m} + \{|\xi|\,|x-\xi'|/(4+k)\}^{2-m}\}\, d\mu_\xi + M,$$

$\xi' = \xi(4+k)^2|\xi|^{-2}$, μ — масса, ассоциированная по Риссу. Это соотношение определяет функцию w_k во всем пространстве. Легко видеть, что $w_k \leqslant O(1)$, $x \to \infty$ и что $w_k = p_k - q_k$, где p_k и q_k субгармоничны в R^m, причем масса ν_k, ассоциированная с q_k, сосредоточена вне некоторого шара $\overline{D}(\rho)$, $\rho > 4 + k$.

Положим $s_k(x) = -\int |x - \xi|^{2-m} d\nu_k + c_k$, где c_k выбрано так, чтобы выполнялось

$$s_k(x) > 0, \quad x \in S(\rho). \tag{10}$$

Заметим, что функция

$$h_k(x) = -|x|^{2-m} + \left(\frac{1}{2}(4 + k + \rho)\right)^{2-m}$$

субгармонична и ограничена сверху в R^m, причем

$$h_k(x) < 0, \quad x \in \overline{D}(4 + k),$$

$$h_k(x) > 0, \quad x \in S(\rho). \tag{11}$$

Выберем положительное d_k настолько большим, чтобы выполнялось

$$s_k(x) + d_k h_k(x) < 0, \quad x \in \overline{D}(4 + k). \tag{12}$$

Пусть B_k — компонента множества $\{x\colon s_k(x) + d_k h_k(x) < 0\}$, содержащая начало координат. В силу (10), (11), (12) выполняется $D(4 + k) \subset B_k \subset D(\rho)$. Положим

$$g_k(x) = \begin{cases} 0, & x \in B_k \\ s_k(x) + d_k h_k(x), & x \overline{\in} B_k. \end{cases} \tag{13}$$

По теореме 4.11 из [3], стр. 172, функция g_k субгармонична в R^m. Положим

$$v_k = w_k + g_k.$$

Легко видеть, что v_k субгармонична в R^m и что $v_k \leqslant O(1)$, $x \to \infty$, следовательно, v_k ограничена сверху в R^m. Из (13) следует, что функция v_k совпадает с w_k при $x \in D(4 + k)$, следовательно, для нее выполняется (4), (5).

Доказательство теоремы 1. Предположим, не уменьшая общности, что $\varphi(0) = 1$. Построим по индукции последовательность ограниченных субгармонических функций u_k и положительных чисел $\tau_k \tau_{k-1} < \tau_k \cdot (4 + k)$ так, чтобы выполнялось

$$u_k(x) \leqslant \varphi(|x|), \quad x \in R^m; \tag{14}$$

$$u_k(x) \leqslant -1, \quad \tau_i x \in \Phi_i, \quad i = 1, \cdots, k; \quad k = 1, 2, \cdots. \tag{15}$$

Поскольку функция v_1, построенная в лемме, ограничена, то можно выбрать настолько малое $\tau_1 > 0$, чтобы

$$u_1(x) = v_1(\tau_1 x) \leqslant \varphi(|x|), \quad x \in R^m.$$

Отсюда и из (5) следует, что u_1 удовлетворяет условиям (14), (15) с $k = 1$.

Пусть построены $\tau_1, \cdots, \tau_{n-1}$; $u_1, \cdots, u_{n-1}$, удовлетворяющие условиям (14), (15). Обозначим

$$a_{n-1} = \sup \{u_{n-1}(x) \colon x \in R^m\} < \infty, \tag{16}$$

$$b_n = \sup \{v_n(x) \colon x \in R^m\} < \infty. \tag{17}$$

Выберем $\tau_n > 0$, удовлетворяющее условиям

$$\tau_n < \tau_{n-1}/(4+n), \tag{18}$$

$$\varphi(\tau_n^{-1}) \geqslant a_{n-1} + (a_{n-1}+1)\, b_n. \tag{19}$$

Положим $u_n(x) = u_{n-1}(x) + (a_{n-1}+1)\, v_n(\tau_n x)$.

Покажем, что u_n удовлетворяет условию (15) с $k = n$. При $i \leqslant n-1$ это следует из (15) с $k=n-1$ с учетом (4), (18). При $x\tau_n \in \Phi_n$ имеем в силу (5), (16).

$$u_n(x) = u_{n-1}(x) + (a_{n-1}+1)\, v_n(\tau_n x) \leqslant a_{n-1} - a_{n-1} - 1 = -1.$$

Покажем теперь, что функция u_n удовлетворяет условию (14) с $k = n$. При $|x| < \tau_n^{-1}$ это следует из (14) с $k=n-1$ и (4), а при $|x| \geqslant \tau_n^{-1}$ имеем в силу (16), (17), (19), что

$$u_n(x) = u_{n-1}(x) + (a_{n-1}+1)\, v_n(\tau_n x) \leqslant$$
$$\leqslant a_{n-1} + (a_{n-1}+1)\, b_n \leqslant (\tau_n^{-1}) \leqslant \varphi(|x|).$$

Индуктивное построение закончено. Из (18) следует, что $\tau_k \to 0$ при $k \to \infty$. Вместе с (4) это влечет сходимость последовательности u_k на каждом компакте к субгармонической функции u. Очевидно, что $u(0) = 0$. Переходя к пределу при $k \to \infty$ в (15), получим

$$u(x) \leqslant -1, \quad \tau_i x \in \Phi_i, \quad i = 1, 2, \cdots. \tag{20}$$

Отсюда вытекает, в частности, что $u \not\equiv \mathrm{const}$. Пусть Γ — любая асимптотическая кривая. Легко видеть, что

$$l(\tau_k^{-1}(4+k), \Gamma) \geqslant \tau_k^{-1} \cdot \frac{3}{2}\pi (k^2-2),$$

откуда следует (2). Переходя к пределу в (14) при $k \to \infty$, получим (3). Теорема доказана.

Заметим, что из цитированного в начале статьи результата следует, что построенная нами субгармоническая функция неограничена сверху.

Положим $\theta(r, u) = \mathrm{mes}\,\{x \in S(1) \colon u(rx) > 0\}$ (здесь mes означает меру Лебега на $S(1)$). Р. Гэрайпи и Дж. Л. Льюис [6] доказали, что для субгармонической в R^m, $m \geqslant 3$ функции u нулевого порядка выполняется $\theta(r, u) \to \alpha > 0$ при r, принадлежащем некоторому множеству нижней логарифмической плотности 1. (α — абсолютная постоянная). Методом, использованным в теореме 1, можно доказать следующий результат.

Теорема 2. *Пусть φ монотонно стремится к $+\infty$ на $[0, \infty)$. Существует неограниченная сверху субгармоническая в R^m, $m \geqslant 3$, функция u со свойством (3), у которой $\theta(r, u) \to 0$ при $r \to \infty$, $r \in E \subset [0, \infty)$, E — некоторое множество верхней плотности 1.*

Доказательство. Положим

$$\Phi_k' = \{K(3, 3+k) \setminus A_+\} \subset D(4+k).$$

Построим функцию u как в теореме 1, пользуясь Φ'_k вместо Φ_k. В силу (20) с Φ'_k вместо Φ_k имеем

$$\theta(r, u) \to 0,\ r \to \infty,\ r \in [3, 3+k],$$

что доказывает теорему.

Аналогичная теорема для функций в плоскости была доказана в [4].

Автор благодарит А. А. Гольдберга и Н. С. Ландкофа за ценные замечания, сделанные в ходе работы.

ВНИИ метрологии измерительных
и управляющих систем — г. Львов

Поступила 18.IX.1976.

Ա. Է. ԵՐՅՈՄԵՆԿՈ. R^m տարածությունում սուբհարմոնիկ ֆունկցիաների ասիմպտոտական կորերի մասին (ամփոփում)

Հոդվածում ապացուցված է, որ գոյություն ունի R^m-ում $m \geq 3$ վերևից ոչ սահմանափակ և կամայապես փոքր աճ ունեցող այնպիսի սուբհարմոնիկ ֆունկցիա, որ կամայական Γ կորի համար, որի վրայով u-ն ձգտում է անվերջության, բավարարվում է հետևյալ առնչությանը՝

$$\overline{\lim_{r \to \infty}}\, l(r, \Gamma)/r = \infty\text{:}$$

Այստեղ $l(r, \Gamma)$ մեծությունը կորի այն մասի երկարությունն է, որը գտնվում է $\{x: |x| < r\}$ գնդում։

A. E. EREMENKO. *On asymptotic curves of subharmonic functions in R^m* (summary)

There exists a subharmonic function in R^m, $m \geq 3$ with arbitrary small growth such that for any curve Γ along which the function tends to infinity holds

$$\overline{\lim_{r \to \infty}}\, l(r, \Gamma)/r = \infty,$$

where $l(r, \Gamma)$ is the length of the part of Γ in the ball $\{x : |x| < r\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *B. Fuglede.* Asymptotic paths for subharmonic functions, Math. Ann., 213, № 3, 1975, 261—274.
2. *W. Hayman.* Slowly growing integral and subharmonic functions, Comment. math. helv., 34, 1960, 75—84.
3. *W. Hayman, P. Kennedy.* Subharmonic functions, Acad. Press, London, 1976.
4. *А. А. Гольдберг, А. Э. Ерёменко.* Об асимптотических кривых целых функций конечного порядка, Мат. сб., 109, № 4, 1979, 555—581.
5. *У. К. Хейман.* Дефектные значения и асимптотические пути, сб. переводов ин. статей, „Математика", 4, № 4, 1960, 20—27.
6. *R. Gariepy, J. Lewis.* Space analogues of some theorems for subharmonic and meromorphic functions, Ark. mat., 13, № 1, 1975, 91—105.
7. *L. Carleson.* Asymptotic paths for subharmonic functions in R^n, Ann. acad. sci. fenn., Ser. AI, 2, 1976, 35—39.