Б. ЁРИККЕ

О МЕРЕ ОБУСЛОВЛЕННОСТИ МНОГОЧЛЕНА
 ОТ ОДНОЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1°. Пусть G — ограниченное подмножество комплексной плоскости $\mathbb{C}$, n — натуральное число, Π — какая-нибудь полунорма в пространстве $\mathbb{C}^{n+1}$. нас будет интересовать величина

$$C(G, n, \Pi) = \sup \{ \Pi(\{c_k\}_0^n) : \{c_k\}_0^n \in \mathbb{C}^{n+1},$$

$$\sup_{z \in G} | \sum_{k=0}^n c_k z^k | \leq 1 \}.$$

Эта величина показывает, насколько малым на данном множестве G может быть многочлен $\sum_{k=0}^n c_k z^k$ с большими (в смысле нормы) коэффициентами; её естественно называть „мерой обусловленности многочленов“ (см. в связи с этим термином статью [1]). Таким образом, в центре нашего внимания будет находиться своеобразное явление интерференции взаимного поглощения больших по модулю слагаемых многочлена.

В этой работе в качестве G будет выбрана область

$$G_{R,\sigma} \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\} \setminus \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| < R, \arg z \leq \sigma\},$$

где $R > 1$, $\sigma \in (0, \pi)$. Целесообразность рассмотрения именно такого множества G обсуждается в статье [2]. Эта область интересна тем, что она содержит весь единичный круг D и некоторые точки, не принадлежащие D , но не содержит D строго внутри себя — в противном случае малость многочлена на G могла бы быть обеспечена лишь за счет малости его коэффициентов.

В качестве полунормы Π мы возьмем функцию $\Pi_d^{(n)}$, определяемую последовательностью $d = \{d_k\}_0^n$ неотрицательных чисел:

$$\Pi_d^{(n)}(\{c_k\}_0^n) = \sum_{k=0}^n d_k |c_k|.$$

(Нетрудно было бы рассмотреть и аналогичные весовые l^p -полунормы, см. [2] и [3]). В статье [3] было показано, что

$$C(D, n, \Pi_d^{(n)}) = \sqrt{\sum_{k=0}^n d_k^2} \tag{1}$$

при больших n (D обозначает открытый единичный круг); в [2] было доказано, что $\lim_{n \rightarrow \infty} C(G_{R, \varepsilon}, n, \Pi_d^{(n)}) = \infty$, если $\sum_0^n d_k^2 = \infty$, однако вопрос о скорости роста величины $C(G_{R, \varepsilon}, n, \Pi_d^{(n)})$ остался открытым. Этот вопрос представляет известный интерес в связи с изучением коэффициентов степенных рядов, равномерно сходящихся в круге сходимости ([4], [5], [6], [7], [13]).

В дальнейшем числа R , ε и последовательность d будут фиксированы: вместо $C(G_{R, \varepsilon}, n, \Pi_d^{(n)})$ мы будем писать просто C_n . Поло-

$$\text{жим } S(n) = \sum_{k=0}^n d_k^2.$$

2°. Оценка роста величины C_n различна в зависимости от того, обладает или не обладает весовая последовательность d свойством

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S(N) - S([aN])}{S([aN])} \stackrel{\text{def}}{=} R(d, a) < +\infty (R(a)),$$

где $a \in (0, 1)$. Последовательность d , обладающая свойством $R(a)$, не может слишком быстро расти (например, быть растущей геометрической прогрессией); она не может быть также характеристической функцией очень неправильного подмножества натурального ряда. С другой стороны, если d есть характеристическая функция геометрической прогрессии с натуральным знаменателем или множества всех факториалов, то d обладает свойством $R(a)$. Этим свойством обладает также любая последовательность $d = \lfloor (k+1)^\beta \rfloor$ ($\beta \in \mathbb{R}$).

Лемма 1. Пусть $a, a' \in (0, 1)$. Свойства $R(a)$ и $R(a')$ равносильны.

Доказательство. Пусть $Q(a)$ есть отрицание утверждения $R(a)$. Ясно, что

$$Q(a) \rightarrow Q(a'),$$

если $a' < a$. Проверим, что $Q(a) \rightarrow Q(a^{2/3})$ (после этого остается заметить, что

$$Q(a) \rightarrow Q(a^{(2/3)^n}), \quad n = 1, 2, \dots).$$

Если d обладает свойством $Q(a)$, то для любого $A \geq 2$ найдется строго возрастающая последовательность номеров $\{N_k\}$ такая, что

$$S(N_k) - S([aN_k]) > 2A^2 S([aN_k]) \quad k = 1, 2, \dots.$$

Построим новую последовательность номеров $\{\tilde{N}_k\}$. Если

$$S([\sqrt{a} N_k]) - S([aN_k]) > AS([aN_k]), \quad (2)$$

то выберем $\tilde{N}_k$ так, что

$$[aN_k] = [a^{2/3} \tilde{N}_k];$$

при этом $\tilde{N}_k \sim a^{1/3} N_k$ при больших k . Если (2) не выполнено, то положим $\tilde{N}_k = N_k$. Тогда

$$S(N_k) - S([a^{2/3} \tilde{N}_k]) < AS([a^{2/3} \tilde{N}_k])$$

при всех достаточно больших k . В самом деле, в случае (2)

$$\sqrt{a} N_k < \tilde{N}_k$$

при больших k , и

$$\begin{aligned} S(\tilde{N}_k) - S([a^{2/3} \tilde{N}_k]) &> S([\sqrt{a} N_k]) - S([a N_k]) > AS([a N_k]) = \\ &= AS([a^{2/3} \tilde{N}_k]). \end{aligned}$$

Если же (2) не выполнено, то

$$\begin{aligned} S(N_k) - S([\sqrt{a} N_k]) &> (2A^2 - A) S([a N_k]) \geq \\ &> \frac{2A^2 - A}{A + 1} S([\sqrt{a} \tilde{N}_k]) > AS([\sqrt{a} \tilde{N}_k]). \end{aligned}$$

Остается учесть, что $a^{2/3} < \sqrt{a}$. Лемма доказана.

3°. Сформулируем теперь основной результат работы.

Теорема 1. Если последовательность d удовлетворяет условию $R(a)$ (при каком-нибудь $a \in (0, 1)$), то

$$C_n \geq K \sqrt{S(n)} \quad (n = 0, 1, \dots),$$

где K положительно и зависит лишь от R , σ и $B(d, q)$ ($q \in (0, 1)$ и зависит от R и σ).

2. Если последовательность d не удовлетворяет условию $R(a)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n}{\sqrt{S(n)}} = 0.$$

Замечания. а) Легко видеть, что

$$C_n \leq L \sqrt{S(n)} \quad (n = 0, 1, \dots).$$

б) Соотношение (1) имеет место без каких бы то ни было предположений регулярности последовательности d , тогда как в условиях нашей теоремы ($R > 1$) условие $R(a)$ оказывается существенным.

в) Наряду с величиной C_n естественно рассмотреть величину

$$\bar{C}_n \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \sup \prod_d^{(n)} \left(\left\{ \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right\}_0^n \right) : f \in C_A(G_{R, \sigma}), \sup_{z \in G_{R, \sigma}} |f(z)| \leq 1 \right\}.$$

Интересно отметить, что $\bar{C}_n > \text{const} \sqrt{S(n)}$ без каких бы то ни было предположений регулярности последовательности d (здесь $C_A(G)$ обозначает множество всех функций, аналитических и равномерно непрерывных в G). Этот факт доказан в [4]. Замена класса $C_A(G)$ классом всех многочленов степени не выше l существенно изменяет задачу, как показывает утверждение 2 нашей теоремы.

4°. Наметим план доказательства. Сначала мы для любого номера Q построим функцию f , аналитическую в некотором расширении $\bar{G}$ области G и непрерывную в замыкании множества $\bar{G}$, причем ряд Маклорена функции f равномерно сходится в D , $\sup_{\bar{D}} |f| \leq 1$,

$$\sum_{k=0}^Q |f_k| d_k \geq \text{const} \sqrt{S(Q)}. \quad (3)$$

(Здесь и ниже const обозначает константу, зависящую лишь от упомянутого расширения области G , но не от Q , а $f_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$). Затем зафиксируем номер N и воспользуемся одним методом суммирования степенных рядов. Рассмотрим целую функцию $\sum_{k=0}^{\infty} f_k r_k(v) z^k$, где v — некоторый параметр, который будет выбран в зависимости от N , причем числа $r_k(v)$ при $k \geq N$ окажутся весьма малыми, а при $k \leq [qN] \stackrel{\text{def}}{=} Q$ (q — малое положительное число) — достаточно большими. Многочлен $\sum_{k=0}^N f_k r_k(v) z^k$ будет на G оцениваться абсолютной постоянной, тогда как

$$\sum_{k=0}^{[qN]} |f_k| r_k(v) d_k \geq \text{const} \sum_{k=0}^{[qN]} |f_k| d_k$$

и ссылка на (3) и условие $R(q)$ завершит доказательство.

Отметим, что эта схема рассуждения, по существу, присутствует в работе [3], где к степенному ряду „плохой“ функции f применяется метод суммирования Фейера.

5°. Построение функции f представляет собою незначительную модификацию рассуждений С. А. Виноградова ([4], [5]).

Символом $C_A(O)$ мы будем обозначать множество всех функций, непрерывных в замыкании открытого множества $O \in \mathbb{C}$ и аналитических в O . Пространство всех функций, аналитических в D , ряд Маклорена которых сходится равномерно в D , обозначим через U_A .

В $C_A(O)$ и в U_A введем нормы, полагая

$$\|f\|_{C_A(O)} = \sup_{z \in O} |f(z)| \quad (f \in C_A(O)),$$

$$\|f\|_{U_A} = \sup_{n \geq 0} \sup_{|z| < 1} \left| \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k \right| \quad (f \in U_A).$$

Нам потребуется область

$$\bar{G} = \bar{G}(\delta, R, \sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ z : z \in \mathbb{C}, |z| < R \cdot \frac{1}{1-\delta} \right\} \setminus \left\{ z : 1 \leq |z| < R \times \right.$$

$$\times \frac{1}{1 - \delta}, |\arg \zeta| \leq \varepsilon - \delta \Big\},$$

где $0 < \delta < \varepsilon$, например, $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

Лемма 2. Пусть Q — натуральное число. Существует функция $f \in C_A(\bar{G})$ такая, что

$$\|f\|_{\mathbf{D} \in U_A}, \|f\|_{C_A(\bar{G})} \leq 1,$$

$$\|f\|_{\mathbf{D} \in U_A} \leq 1, \prod_d (|f_k|_d^Q) \geq \text{const} \sqrt{S(Q)}$$

(константа зависит лишь от R, ε, δ).

Для доказательства этой леммы введем (следуя [5]) пространство Y всевозможных последовательностей

$$F = (f_0, f_1, f_2, \dots),$$

где $f_0 \in C_A(\bar{G}), f_k \in C_A(\mathbf{D}) (k = 1, 2, \dots)$

и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k\|_{C_A(\mathbf{D})} = 0.$$

Положим

$$\|F\|_Y = \sup (\|f_0\|_{C_A(\bar{G})}, \|f_1\|_{C_A(\mathbf{D})}, \|f_2\|_{C_A(\mathbf{D})}, \dots).$$

Совокупность X всех таких функций $\varphi \in C_A(\bar{G})$, что $\varphi|_{\mathbf{D}} \in U_A$, отождествим с подпространством пространства Y , сопоставляя функции $\varphi \in X$

элемент $(\varphi, \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\varphi}_n z^n, \sum_{n=2}^{\infty} \hat{\varphi}_n z^n, \dots) \in Y$.

Пусть $\omega \in H \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C} / \bar{G}$. Положим $c_\omega(\zeta) = (\zeta - \omega)^{-1} (\zeta \in \bar{G})$. Ясно, что $c_\omega \in X$. Если $\Phi \in Y^*$, то функция $K_\Phi: \omega \rightarrow \Phi(c_\omega)$ аналитична в H .

Доказательство леммы 2 опирается на следующее утверждение.

Лемма 3. $K_\Phi \in E^p(H)$ при любом $p \in (0, 1)$, и

$$\|K_\Phi\|_{E^p(H)} \leq \text{const} \|\Phi\|_1.$$

(константа зависит лишь от p и $\bar{G}$). Символом $E^p(H)$ обозначается совокупность всех функций v , аналитических в $H \cup (\infty)$ и таких, что

$$\|v\|_{E^p(H)} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_n \left\{ \int_{\gamma_n} |v(\zeta)|^p |d\zeta| \right\}^{1/p} < +\infty,$$

где γ_n — какая-нибудь последовательность гладких жордановых контуров, охватывающих $\bar{G}$, сходящаяся к $\partial\bar{G}$ (ср. [8], гл. III, § 6).

Лемма 3 легко вытекает из рассуждений С. А. Виноградова [5]. Действительно, функционалу Φ отвечает последовательность комплек-

сных мер $(\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots)$ такая, что μ_0 сосредоточена на $\partial\bar{G}$, $\mu_1, \mu_2, \dots$ сосредоточены на ∂D и

$$\Phi(F) = \sum_{k=0}^{\infty} \int f_k d\mu_k \quad (F = \{f_k\} \in Y),$$

причем

$$\|\Phi\|_{Y^*} = \sum_{k=0}^{\infty} \text{var } \mu_k.$$

Поэтому

$$\mathbf{K}\Phi(w) = \int_{\partial\bar{G}} \frac{d\mu_0(\zeta)}{\zeta - w} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{w^k} \int_{\partial D} \frac{\zeta^k d\mu_k(\zeta)}{\zeta - w}.$$

Первое слагаемое в правой части принадлежит (как функция переменной w) классу $E^p(H)$. Сумма с остальных слагаемых принадлежит $E^p(C \setminus \bar{D})$ — доказательство этого нетривиального факта дано в [5] и опирается на глубокую теорему Карлесона—Ханта о сходимости почти всюду рядов Фурье ([14], [15]). Остается воспользоваться теоремой Карлесона (см. [9], стр. 18 и сл.) для того, чтобы оценить $\|\cdot\|_{E^p(H)}$ через $\|\cdot\|_{E^p(C \setminus \bar{D})}$.

Докажем теперь лемму 2. Имеем

$$\begin{aligned} I(Q) &\stackrel{\text{def}}{=} \sup \left\{ \left| \prod_{j=0}^Q (\hat{f}_k)_0^Q : f \in X, \|f\|_Y \leq 1 \right\} = \\ &= \sup \left\{ \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\bar{G}} f(\zeta) \left(\sum_{k=0}^Q \frac{d_k e^{ix_k}}{\zeta^{k+1}} \right) d\zeta \right| : f \in X, \|f\|_Y \leq 1, \{x_k\}_0^Q \in \mathbb{R}^{Q+1} \right\} = \\ &= \sup_{x_k} \sup \|\Phi_x(f)\| : f \in X, \|f\|_Y \leq 1. \end{aligned}$$

Здесь $x = \{x_k\}_0^Q$ пробегает вещественное пространство $\mathbb{R}^{Q+1}$, а

$$\Phi_x(F) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\bar{G}} f_0(\zeta) \left(\sum_{k=0}^Q \frac{d_k e^{ix_k}}{\zeta^{k+1}} \right) d\zeta$$

$$(F = (f_0, f_1, f_2, \dots) \in Y;$$

f отождествляется с элементом из Y).

Воспользуемся известным следствием теоремы Хана—Банаха:

$$I(Q) = \sup_x \inf \{ \|\Phi_x - \bar{\Phi}\|_{Y^*} : \bar{\Phi} \in Y^*, \bar{\Phi} \perp X \} \geq$$

$$\geq \text{const} \sup_x \|\mathbf{K}\Phi_x - \mathbf{K}\bar{\Phi}\|_{E^p(H)} = \text{const} \sup_x \|\mathbf{K}\Phi_x\|_{E^p(H)},$$

ибо $\bar{\Phi}(c_k) = 0$ при любом $w \in H$.

Легко видеть, что $K\Phi_r(w) = \sum_{k=0}^Q d_k w^{-(k+1)} e^{ix_k}$ ($w \in H$) и

$$I(Q) \geq \text{const} \sup_{\partial Q} \left(\int \left| \sum_{k=0}^Q d_k w^{-(k+1)} e^{ix_k} \right|^p |dw| \right)^{1/p} \geq \text{const} \sqrt{\sum_{k=0}^Q d_k^2}$$

(по поводу последнего неравенства см. [4], стр. 28 и сл.). Лемма доказана.

6°. В этом разделе мы заготовим необходимые для дальнейшего оценки, связанные с методом суммирования Миттаг—Леффлера (см. по этому поводу монографии [10], стр. 247, [11], гл. III). Напомним,

что равенство $E_z(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{\Gamma(1+zn)}$ определяет целую функцию E_z , называемую функцией Миттаг—Леффлера ($0 < z < 2$). Как известно

$$\frac{1}{1-\zeta} = \int_0^{\infty} e^{-t} E_z(t^z) dt, \quad (4)$$

причем интеграл сходится равномерно относительно точки ζ , изменяющейся в любом компактном подмножестве области, содержащей начало и ограниченной кривой

$$r = \left(\cos \frac{\theta}{\alpha} \right)^{-\alpha}, \quad -\frac{\pi\alpha}{2} < \theta < \frac{\pi\alpha}{2}$$

(r, θ — полярные координаты; см. [10], стр. 247, замечание к § 8.10).

Вернемся теперь к области $\bar{G} = \bar{G}(\delta, R, \varepsilon)$ (см. выше п. 5), и положим $\alpha = \frac{2}{\varepsilon}$. Равенство (4) выполняется равномерно внутри дополнения к множеству

$$L_\delta \stackrel{\text{def}}{=} \{\zeta \in \mathbf{C} : |\zeta| > 1-\delta, |\arg \zeta| \leq \delta\}.$$

Функция f , существование которой утверждается в лемме 2, представима по формуле Коши в области

$$G \setminus L_{\delta, \varepsilon} \quad (L_{\delta, \varepsilon} \stackrel{\text{def}}{=} \{\zeta \in \mathbf{C} : |\zeta| > 1-\delta, \arg \zeta \leq \varepsilon\}):$$

$$\begin{aligned} f(\tau) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \bar{G}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \tau} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \bar{G}} f(\zeta) \frac{1}{\zeta} \left(\int_0^{\infty} e^{-t} E_z \left(t^z \frac{\tau}{\zeta} \right) dt \right) d\zeta = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 1-0} f_\delta(\tau), \end{aligned}$$

где

$$f_v(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^v e^{-t} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\partial G}} f(\zeta) \frac{1}{\zeta} E_\sigma\left(t^\sigma \frac{\tau}{\zeta}\right) d\zeta dt$$

$$(\tau \in G \setminus L_{\lambda, \sigma}).$$

Последний предельный переход происходит равномерно внутри $G \setminus L_{\lambda, \sigma}$. Это следует из (4) и из того, что $\frac{\tau}{\zeta} \notin L_{\lambda, \sigma}$, если $\zeta \in \partial \tilde{G}$,

$\tau \in G \setminus L_{\lambda, \sigma}$. В самом деле, если $\zeta \in \partial \tilde{G}$, $\tau \in G \setminus L_{\lambda, \sigma}$ и $\left|\frac{\tau}{\zeta}\right| \geq 1 - \delta$, то $|\arg \zeta| \leq \sigma - \delta$ (в противном случае $|\zeta| = R(1 - \delta)^{-1}$, а $G \setminus L_{\lambda, \sigma} \subset \{\zeta : |\zeta| < R\}$); кроме того, $|\tau| > 1 - \delta$ (ибо $|\tau| > 1$, если $\zeta \in \partial \tilde{G}$); значит

$$|\arg \tau| > \sigma \text{ и } |\arg \tau - \arg \zeta| > \delta.$$

Заметим еще, что при любом $\tau \in G \setminus L_{\lambda, \sigma}$

$$|f_v(\tau)| \leq \text{const}, \quad (5)$$

где постоянная зависит лишь от R , σ и δ , ибо $|f(\zeta)| \leq 1$ при $\zeta \in \partial \tilde{G}$.

Из определения функции f_v следует, что

$$f_v(\tau) = \sum_0^{\infty} f_n r_n(v) \tau^n \quad (\tau \in \mathbb{C}), \quad (6)$$

где

$$r_n(v) = \frac{1}{\Gamma(1 + 2n)} \int_0^v t^{2n} e^{-t} dt \quad (n > 0).$$

Нам будут нужны следующие свойства коэффициентов $r_n(v)$.

I. При любом $v \geq 0$ и любых u_1, u_2 , $0 < u_1 \leq u_2$ выполнены неравенства $0 < r_{u_2}(v) \leq r_{u_1}(v)$.

Для доказательства вычислим производную по u отношения

$$R_v(u) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^v e^{-t} t^{2u} dt \cdot (\Gamma(1 + 2u))^{-1} \quad (u > 0).$$

Получим

$$\begin{aligned} & (\Gamma(1 + 2u))^2 R_v'(u) = \\ & = \int_0^v e^{-t} t^{2u} 2 \log t dt \cdot \int_0^v e^{-t} t^{2u} dt - \int_0^v e^{-t} t^{2u} 2 \log t dt \cdot \int_0^v e^{-t} t^{2u} dt < \\ & < 2 \log v \int_0^v e^{-t} t^{2u} dt \cdot \int_0^v e^{-t} t^{2u} dt - 2 \log v \int_0^v e^{-t} t^{2u} dt \cdot \int_0^v e^{-t} t^{2u} dt = 0. \end{aligned}$$

II. Зафиксируем номер N и выберем параметр v (в зависимости от N, R и δ) так, чтобы коэффициенты $r_n(v)$ имели достаточно быстро стремящуюся к нулю мажоранту при $n > N$.

Пусть $0 < c < c_0 < 1$; положим

$$v = z \cdot c \cdot N. \tag{7}$$

Выбор чисел c и c_0 будет уточнен позже. Обозначим

$$J(p) = \int_0^1 e^{-p^z t^{p^z}} dt.$$

Тогда при $p > N$

$$\begin{aligned} r_p(v) &= (\Gamma(1+zp))^{-1} \int_0^v e^{-t} t^{p^z} dt = (J(p))^{-1} \int_0^{\frac{cN}{p}} e^{-p^z t} t^{p^z} dt \ll \\ &\ll (J(p))^{-1} \int_0^c e^{-p^z (t - \log t)} dt = \\ &= (J(p))^{-1} \int_0^c e^{-p^z (c_0 - \log c_0) - p^z (t - \log t - (c_0 - \log c_0))} dt \ll \\ &\ll e^{-(c_0 - \log c_0) p^z} \cdot (J(p))^{-1} \int_0^c e^{-p^z (t - \log t)^\theta} dt, \end{aligned} \tag{8}$$

где $\theta = 1 - \frac{c_0 - \log c_0}{c - \log c}$. Мы воспользовались убыванием функции $t \rightarrow t - \log t$ в промежутке $(0, 1)$.

Используя формулу Стирлинга и (8), легко проверить, что

$$r_p(v) \leq \text{const } e^{-p^z (c_0 - \log c_0) \left(1 - \frac{1}{c - \log c}\right)} \quad (p > N), \tag{9}$$

где константа зависит лишь от θ (напомним, что v здесь определено равенством (7)).

Теперь выберем столь малое $c_0 \in (0, 1)$, что

$$c_0 - \log c_0 > \frac{2}{a} \log 2R,$$

а $c \in (0, c_0)$ так, что $\frac{1}{c - \log c} < \frac{1}{2}$. Тогда при $M = 1, 2, \dots$ из (9)

получим

$$r_{N+M}(v) \leq C(R, a) e^{-(N+M) \log 2R}. \tag{10}$$

III. Считая попрежнему, что v определено равенством (7) и выбором c и c_0 , сделанным только что, оценим $r_n(v)$ снизу при $n < a \times \times c \cdot N$, где $0 < a < 1$. Имеем

$$r_n(v) \geq r_{acsN}(v) = 1 - (J(acsN))^{-1} \int_{1/a}^{\infty} e^{-acsN(t-\log t)} dt.$$

Действуя так же, как в п. II (вводя число $a_0 \in (0, 1)$, используя возрастание функции $t \rightarrow t - \log t$ в $(1, +\infty)$ и формулу Стирлинга), получим

$$r_n(v) \geq \text{const} > 0 \quad (n < acsN \stackrel{\text{def}}{=} qN), \quad (11)$$

где константа зависит лишь от a .

7°. Закончим теперь доказательство первой части теоремы.

Пусть N — натуральное число, $Q = [acsN]$, где a , α и c определены в п. 6, f — функция, соответствующая числу Q по лемме 2. Положим

$$P_N(z) = \sum_{n=0}^N \hat{f}_v(n) z^n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^N \frac{\hat{f}_v^{(n)}(0)}{n!} z^n,$$

где v определено в (7). Проверим, что

$$\|P_N\|_{U_A}(0) \leq C_1, \quad (12)$$

$$\sum_{n=0}^Q |\hat{f}_v(n)| d_n \geq C_2 \sqrt{S(Q)}, \quad (13)$$

где C_1 и C_2 зависят лишь от R и ε . После этого, используя условие $R(acs)$, мы получим, что

$$\|P_N\|_d^{\varepsilon} \geq C_3 \sqrt{S(N)},$$

где C_3 зависит лишь от R , ε и $B(d, acs)$ и доказательство будет закончено.

Докажем (12). Ясно, что

$$P_N(z) = f_v(z) - \sum_{n=N+1}^{\infty} \hat{f}_v(n) z^n$$

($z \in G \setminus L_{\varepsilon}$). Воспользуемся оценкой (10):

$$|\hat{f}_v(n)| = |\hat{f}_n| r_n(v) \leq r_n(v) \leq \text{const} \frac{1}{(2R)^n} \quad (n > N)$$

(константа зависит лишь от R и ε). Учитывая (5), получим

$$\sup \{ \|P_N(\zeta)\| : \zeta \in G \setminus L_{\varepsilon} \} \leq \text{const}. \quad (14)$$

Оценим $P_N(\zeta)$ при $|\zeta| \leq 1$. Из неравенства $\|f\|_{U_A} \leq 1$ следует, что все частичные суммы ряда $\sum \hat{f}_n z^n$ не превосходят 2 всюду в D . Учитывая, что

$$1 \geq r_n(v) \geq r_{n+1}(v) > 0 \quad (n = 0, 1, \dots),$$

применяя преобразование Абеля, получим

$$\sup \{ \|P_N(\zeta)\| : \zeta \in D \} \leq 2. \quad (15)$$

Из (14) и (15) следует (12).

Вспомним теперь свойство III множителей $r_n(v)$:

$$\sum_{n=0}^Q d_n |f_v^\wedge(n)| = \sum_{n=0}^Q d_n |f_n^\wedge| r_n(v) \geq \text{const} \sum_{n=0}^Q d_n |f_n^\wedge| \geq \text{const} \sqrt{S(Q)}.$$

Доказательство первой части теоремы закончено.

8°. Доказательству второй части теоремы предпошлем следующее утверждение.

Лемма 4. Пусть K — замкнутый круг, расположенный в $\mathbb{C} \setminus \bar{D}$. Тогда существуют числа $b \in (0, 1)$ и $\varepsilon > 0$ такие, что для любого $N = 1, 2, \dots$ и любого многочлена P степени $\leq N$ из неравенства $\max_{|z| \leq 1} |P| \leq 1$ следует, что

$$|\hat{P}_n| \leq e^{-\varepsilon N} \quad (bN \leq n \leq N). \quad (16)$$

Через $\hat{P}_n$ мы, как всегда, обозначаем $\frac{P^{(n)}(0)}{n!}$.

Доказательство этой леммы следует по известной схеме рассуждений (см. [12], гл. VIII, § 6). Рассмотрим гармоническую в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ функцию u

$$u(\zeta) = \frac{1}{N} \log |P| - \log |\zeta|.$$

Ясно, что $u(\zeta) \leq 0$, если $|\zeta| = 1$, $u(\zeta) < -\mu$, если $\zeta \in \partial K$, где $\mu > 0$. Гармоническая мера окружности $\gamma = \partial K$ относительно области $\mathbb{C} \setminus (\bar{D} \cup K)$ ограничена снизу положительным числом $\lambda = \lambda(R)$ на любой окружности Γ_R радиуса R с центром в начале. Зафиксируем такую окружность Γ_R , лежащую в $\mathbb{C} \setminus (\bar{D} \cup K)$; ясно, что

$$u(\zeta) \leq -\lambda\mu \quad (\zeta \in \Gamma_R),$$

так что

$$|P(\zeta)| \leq (Re^{-\lambda\mu})^N \quad (\zeta \in \Gamma_R).$$

Записывая коэффициенты $\hat{P}_n$ с помощью формулы Коши (примененной к Γ_R) и выбирая b достаточно близким к 1, получим оценку (16).

Обратимся, наконец, к доказательству утверждения 2 теоремы. Пусть $A > 0$. Воспользуемся тем, что последовательность d не обладает свойством $R(b)$, т. е. обладает свойством $Q(b)$ (см. доказательство леммы 1). Найдутся сколь угодно большие номера N такие, что

$$S(N) - S([bN]) > AS([bN]), \text{ т. е. } S([bN]) < A^{-1} S(N).$$

Пусть P — многочлен степени не выше N , причем $\sup_{|z| \leq 1} |P(\zeta)| \leq 1$.

К многочлену P применима лемма, поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N |\hat{P}_n| d_n &\leq \sum_{n=0}^{[bN]} |\hat{P}_n| d_n + e^{-\varepsilon N} \sum_{n=[bN]+1}^N d_n \leq \left(\sum_{n=0}^{[bN]} |\hat{P}_n|^2 \right)^{1/2} \sqrt{S([bN])} + \\ &+ e^{-\varepsilon N} N^{1/2} \sqrt{S(N)} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{A}} + e^{-\varepsilon N} N^{1/2} \right) \sqrt{S(N)}. \end{aligned}$$

Выбирая A достаточно большим, получим наше утверждение. В заключение отметим следующий факт, вытекающий из рассуждений п. 7.

Для любой области $G = G_R, \varepsilon$ существует такое число $q \in (0, 1)$, что

$$C(G, n, \Pi_n^d) \geq \text{const} \sqrt{S([qN])},$$

где константа зависит лишь от R и ε (но не от d).

В заключение выражаю свою глубокую признательность В. П. Хавину за внимание к работе и помощь при подготовке ее к печати, а также С. А. Виноградову — за полезные обсуждения.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступила 20.IX.1977

Ր. ՅՈՐԻԿԷ. Մեկ կոստյան փոփոխականի բազմանդամի պայմանավորվածության չափի մասին (ամփոփում)

Գրքով $d = (d_k)_{k=0}^{\infty}$ -ն բացասական թվերի հաջորդականություն է, G -ն հետևյալ տիրույթն է

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\} \setminus \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| < R, |\arg z| \leq \alpha\} \quad (R > 1, \alpha \in (0, \pi));$$

Մենք ցույց ենք տալիս, որ

$$\lim \left(\sum_{k=0}^n d_k^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \sup \left\{ \sum_{k=0}^n |c_k| d_k : \{c_k\}_0^n \in \mathbb{C}^{n+1}, \sup_{z \in G} \left| \sum_{k=0}^n c_k z^k \right| \leq 1 \right\} > 0 \quad (*)$$

այն է միայն այն դեպքում, երբ d -ն բավարարում է սեղույարության մի պայմանի:

Մինչ այդ միայն հայտնի էր, որ (*) արտահայտության վերին կասարը ձգտում է ∞ , եթե $\sum d_k^2 < \infty$: Մեր զննարտական նման զննարտական ստացված էր [4]-ում այն դեպքի համար, երբ G -ն D միավոր շրջանն է: Այս դեպքում սեղույարության պայման չի պահանջվում:

B. JÖRISCHE. On the rate of the conditionedness of a polynomial of a complex variable (summary)

Let $d = (d_k)_{k=0}^{\infty}$ be a sequence of non negative numbers. Let G be the domain

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\} \setminus \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| < R, |\arg z| \leq \alpha\} \quad (R > 1, \alpha \in (0, \pi)).$$

We prove that

$$\lim \left(\sum_{k=0}^n d_k^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \sup \left\{ \sum_{k=0}^n c_k d_k : |c_k|_0^n \in \mathbb{C}^{n+1}, \sup_{z \in G} \left| \sum_{k=0}^n c_k z^k \right| \leq 1 \right\} > 0 \quad (*)$$

if and only if d satisfies a regularity condition. This condition allows d to be for instance $((k+1)^\beta)_{k=0}^{\infty}$ ($\beta \in \mathbb{R}$) or the characteristic function of any geometric progression with the integer positive ratio or of the set of all factorials.

Previously it was only known that the supremum occurring in (*) tends to infinity when $\sum_{k=0}^{\infty} d_k^2 = \infty$. The estimate analogous to ours was obtained in [4] in the case when the domain is replaced by the unit disc D . In that case no regularity condition is needed which is in contrast with the situation considered here.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Б. А. Самокиш. О поведении коэффициентов многочленов, приближающих регулярную на отрезке функцию. Методы вычислений, вып. 1, 1963, 58—65.
2. В. П. Хавин. О нормах некоторых операторов в пространстве многочленов. Вестник Ленинградского университета, вып. 4, № 19, серия мат.-мех. и астр., 1959, 47—59.
3. С. Б. Стечкин. Одна экстремальная задача для многочленов. Изв. АН СССР, серия матем., 20, № 6, 1956, 765—774.
4. С. А. Виноградов. Интерполяционные теоремы Банаха—Рудина—Карлесона и нормы операторов вложения для некоторых классов аналитических функций. Записки научн. семин. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, Ленингр. отд., т. 19, 1970, 6—54.
5. С. А. Виноградов. Сходимость почти всюду рядов Фурье функций из L^2 и поведение коэффициентов равномерно сходящихся рядов Фурье. ДАН СССР, 230, № 3, 1976, 508—511.
6. С. Б. Стечкин. О коэффициентах Фурье непрерывных функций, Изв. АН СССР, серия матем., 21, 1957, 93—116.
7. С. В. Хрущёв. Особенности линейных операторов в пространствах аналитических функций. Матем. программирование и смежные вопросы, Труды 7-ой Зимней школы, Дрогобыч, 1974, М., 1976, 87—114.
8. И. И. Привалов. Граничные свойства аналитических функций, Гос. изд. техн.-теор. лит., М., 1950.
9. С. А. Виноградов, В. П. Хавин. Свободная интерполяция в H^{∞} и в некоторых других классах функций, Записки научн. семин. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, Ленингр. отд., т. 47, 1974, 15—54.
10. Г. Харди. Расходящиеся ряды, ИИЛ, М., 1951.
11. М. М. Джрбашян. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, «Наука», М., 1966.
12. Г. М. Голузин. Геометрическая теория функций комплексного переменного «Наука», М., 1966.
13. R. E. A. C. Paley. A note on power series, Journal London Math. Soc., 7, 1932, 122—130.
14. L. Carleson. On convergence and growth of partial sums of Fourier series. Acta Math. 116, 1966, 135—157.
15. R. Hunt. On the convergence of Fourier series, Proc. Conf. Southern Ill. Un. Orthogonal Expansions and their continuous analogues, 1957, 235—257.
16. E. Beller, D. J. Newman. An l^1 extremal problem for polynomials, PAMS, 29, № 3, 1971, 474—481.