ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIV, № 4, 1979 Математика

Г. У. ОГАНЕСЯН

РАЗРЕШИМОСТЬ ПРОБЛЕМЫ РАВЕНСТВА СЛОВ ДЛЯ ПОЛУГРУПП С ОПРЕДЕЛЯЮЩИМ СООТНОШЕНИЕМ ВИДА $A = BtC$

В настоящей работе доказывается разрешимость проблемы равенства слов в полугруппе П, заданной образующими

$$t,\ a_1,\ a_2 \cdots,\ a_m \tag{1}$$

и определяющим соотношением

$$A = BtC, \tag{2}$$

где слова A, B и C не содержат вхождений буквы t.

В теореме 1, используя подход, предложенный С. И. Аляном в [2], доказывается разрешимость проблемы левой (правой) делимости в полугруппе П в случае несократимого слева (соответственно, справа) соотношения (2). В теореме 2 при помощи введенных в [3] преобразований, определяющих соотношений и теоремы 1, доказывается разрешимость проблемы равенства слов в П.

Теорема 2 есть усиление основного результата работы [4], в которой доказана разрешимость проблемы равенства слов в П при условии $\partial(A) > \max(\partial(B), \partial(C))$.

Теорема 1. *Если соотношение* (2) *несократимо слева (справа), то для полугруппы* П, *заданной образующими* (1) *и определяющим соотношением* (2), *разрешимы проблемы равенства и левой (соответственно, правой) делимости слов.*

В работе [1] (см. стр. 97) была доказана разрешимость проблем равенства, левой и правой делимости в полугруппе, заданной определяющим соотношением вида $A = \Lambda$, где Λ — пустое слово. В силу этого результата и в силу очевидной симметрии для доказательства теоремы достаточно рассмотреть случай, когда слово A непусто и соотношение (2) несократимо слева. В этом случае нам потребуются введенные в [2] понятия левого разложения $R(X, d)$ данного слова X относительно данной буквы d, головки и компонент этого разложения.

Пусть слова A и Bt начинаются, соответственно, с букв a и b алфавита (1). Если разложение $R(X, d)$ существует, то, очевидно, слово X начинается с буквы a или b и d есть, соответственно, b или a. Поэтому вместо записи $R(X, d)$ мы будем в некоторых случаях использовать запись $R(X)$.

Через **A** будем обозначать построенный в [2] алгоритм, устанавливающий левую делимость слова aX или bX на букву b или a, соответственно.

В дальнейшем под делимостью слов будем понимать левую делимость в полугруппе П.

Лемма 1. *Если $R(X, d) = K_1 * K_2 * \cdots * K_s * A * Q$, буква t не входит в слово $K_1 K_2 \cdots K_s$ и хотя бы одна из компонент $K_1, K_2, \cdots, K_s$ есть начало слова B, то X не делится на d.*

Доказательство. Алгоритм **А** за один шаг переводит слово X в слово $X_1 = K_1 K_2 \cdots K_s BtCQ$. Если $R(X_1, d)$ существует, то либо $B = B_1 AB_2$ и $R(X_1, d) = K_1 * K_2 * \cdots K_{s-1} * R(K_s B_1) A * B_2 tCQ$, либо $K_s B = AB_2$ и $R(X_1, d) = K_1 * K_2 * \cdots K_{s-1} * A * B_2 tCQ$. Следовательно, если при некотором $i \leqslant s$ компонента K_i разложения $R(X_1, d)$ является началом B, то i-ая компонента разложения $R(X_1, d)$ также есть начало B. Кроме того, все компоненты разложения $R(X_1, d)$ не содержат вхождений буквы t. Поэтому алгоритм **А**, начав работу со слова X, либо останавливается на неразложимом слове, либо работает бесконечно, выдавая промежуточные результаты, удовлетворяющие условиям леммы. В силу леммы 3 из работы [2] это означает, что X не делится на d. Лемма 1 доказана.

Через V обозначим множество таких начал A' слова A, что $A'b$ есть начало A. Если $A' \in V$ и

$$R(A'BtC) = A_1 * A_2 * \cdots * A_n * A * E, \tag{3}$$

где все $A_i \in V$ при $i = 1, 2, \cdots n$, то начала A_i назовем предшествующими началу A'.

Через Γ обозначим ориентированный граф с множеством вершин V, ребрами которого являются все упорядоченные пары (A', A''), где вершина A'' предшествует вершине A'.

Вершину A' назовем тупиковой, если не существует разложения $R_*(A'BtC)$.

Через V_1 обозначим подмножество V, состоящее из таких вершин A', что любая (ориентированная) цепь графа Γ, начинающаяся в A', не содержит тупиковых вершин и вершин, принадлежащих циклам графа Γ. Так как множество V конечно, то граф Γ и множество V_1 определены эффективно.

Лемма 2. *Если $A' \in V_1$, то слово $A'BtC$ делится на BtC.*

Доказательство. Через $f(A')$ обозначим число ребер в максимальной цепи графа Γ, начинающейся в вершине A'. Индукцией по параметру $f(A')$ докажем, что $A'BtC$ делится на BtC.

Если $f(A') = 0$, то $A'BtC$ начинается со слова A и потому делится на BtC.

Пусть $f(A') > 0$ и $R(A'BtC)$ имеет вид (3). Так как $f(A_i) < f(A')$ при $i = 1, 2, \cdots n$, то по предположению индукции $A_i BtC = BtCZ_i$ при некоторых Z_i. Тогда $A'BtC = A_1 A_2 \cdots A_n AE = BtCZ_1 Z_2 \cdots Z_n E$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Если $R(X, d) = K_1 * K_2 * \cdots * K_s * A * Q$ и буква t не входит в слово $K_1 K_2 \cdots K_s$, то X делится на d тогда и только тогда, когда $K_i \in V_1$ при $i = 1, 2, \cdots, s$.*

Доказательство. Если $K_i \in V_1$ при $i = 1, 2, \cdots, s$, то X делится на d в силу леммы 2.

Пусть $K_r \overline{\in} V_1$ и $K_j \in V_1$ при $j = r+1, r+2, \cdots s$. Если K_r есть начало B, то X не делится на d в силу леммы 1. Пусть K_r есть начало A. В силу леммы 2 алгоритм **A** переводит слово X в слово $X_1 = K_1 K_2 \cdots K_r BtCZ$ при некотором Z. Если разложение $R(K_r BtC)$ существует, то оно имеет вид $R(K_r BtC) = D_1 * D_2 * \cdots D_l * A * P$. Тогда

$$R(X_1, d) = K_1 * K_2 * \cdots * K_{r-1} * D_1 * D_2 * \cdots * D_l * A * PZ.$$

Если бы все компоненты $D_1, D_2, \cdots, D_l$ принадлежали V_1, то и K_r принадлежало бы V_1. Следовательно, хотя бы одна из компонент $D_1, D_2, \cdots, D_l$ не принадлежит V_1. Отсюда следует, что если $K_r \overline{\in} V_1$ при некотором r, то алгоритм **A**, начав работу со слова X, либо останавливается на неразложимом слове, либо работает бесконечно, выдавая слова, в разложении которых имеется компонента, не принадлежащая V_1. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Если $R(X) = BtC' * K_1 * K_2 * \cdots * K_s * A * Q$ и буква t не входит в слово $K_1 K_2 \cdots K_s$, то разрешима проблема делимости слова X на букву a.*

Доказательство. Если хотя бы одна из компонент K_i при $i = 1, 2, \cdots, s$ не принадлежит V_1, то X не делится на a в силу леммы 3. Пусть $K_i \in V_1$ при $i = 1, 2, \cdots, s$. Тогда в силу леммы 2 алгоритм **A** переводит слово X в слово $X_1 = BtC' BtCZ$ при некотором Z. Если $R(X_1)$ не существует, то X не делится на d. Если $R(X_1)$ существует, то $R(X_1) = BtC'' * D_1 * D_2 * \cdots * D_l * A * Q_1$, $\partial(C'') > \partial(C')$ и буква t не входит в слово $D_1 D_2 \cdots D_l$. Следовательно, повторив приведенные выше рассуждения не более чем $\partial(C) - \partial(C')$ раз, мы выясним делится ли X на a или нет. Лемма 4 доказана.

Через $\sigma_t(X)$ и $\sigma_{tC}(X)$ обозначим число вхождений в слово X буквы t и слова tC, соответственно. Положим по определению $\tau(X) \rightleftharpoons \sigma_t(X) - \sigma_{tC}(X)$. Следующая лемма очевидна.

Лемма 5. *Пусть один шаг алгоритма **A** имеет вид $X = PKHQ \to PKFQ = X_1$, где K—компонента разложения $R(X)$, H и F—различные определяющие слова соотношения (2). Если KF начинается со слова BtC, то $\tau(X_1) = \tau(X) - 1$. Если KF не начинается со слова BtC, то $\tau(X_1) = \tau(X)$.*

Доказательство теоремы 1. Индукцией по параметру $\tau(X)$ докажем разрешимость проблемы делимости слова X на букву d. Если $R(X, d)$ не существует, то X не делится на d в силу леммы 3 из работы [2]. Пусть $R(X, d) = K_1 * K_2 * \cdots * K_s * H * Q$, где H – головка.

Если $H = BtC$, то сделав не более чем $\sigma_t(X)$ шагов алгоритма **A**, мы либо получим заключительный результат, либо промежуточный результат X_1 с головкой A. При этом в силу леммы 5 $\tau(X_1) \leqslant \tau(X)$. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $H = A$.

Если $\tau(X) = 0$, то проблема делимости X на d разрешима в силу леммы 3.

Пусть $\tau(X)>0$, $K_i=BtC$ и компоненты $K_{j+1},\cdots,K_s$ не содержат вхождений буквы t. В силу леммы 4 разрешима проблема делимости слова $Y=K_jK_{j+1}\cdots K_sAQ$ на букву a. Если Y не делится на a, то X не делится на d. Пусть $Y=aZ$, тогда алгоритм A переводит слово X в промежуточный результат $X_1=K_1K_2\cdots K_{j-1}aZ$. В силу леммы 5 $\tau(aZ)=\tau(Y)-1$, поэтому $\tau(X_1)\leqslant\tau(X)-1$ и по предположению индукции проблема делимости X_1 на d разрешима. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Разрешима проблема равенства слов в полугруппе* П, *заданной образующими* (1) *и определяющим соотношением* (2).

Для доказательства этой теоремы нам потребуются преобразования φ и ψ_T, введенные в работе [3].

Если соотношение (2) приводимо, то к нему можно применить преобразование φ. При этом в слове $\varphi(BtC)$ найдется буква, которая входит в это слово один раз и не входит в слово $\varphi(A)$. Следовательно, в силу следствия 2 из работы [3], достаточно рассмотреть случай, когда соотношение (2) неприводимо.

В этом случае в силу теоремы 4 из работы [3] проблема равенства слов в П сводится к той же проблеме для полугруппы Π_1, заданной несократимым хотя бы с одной стороны определяющим соотношением вида $\psi_T(A)=\psi_T(BtC)$. Из определения преобразования ψ_T следует, что найдется буква, которая входит в слово $\psi_T(BtC)$ один раз и не входит в слово $\psi_T(A)$. Поэтому в силу теоремы 1 проблема равенства слов в Π_1 разрешима. Теорема 2 доказана.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила 17.VI.1977

Գ. Հ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ. Բառերի հավասարության պրոբլեմի լուծելիությունը A=BtC տեսքի որոշիչ հարաբերություն ունեցող կիսախմբերի համար (*ամփոփում*)

Հոդվածում ապացուցվում է բառերի հավասարության պրոբլեմի լուծելիությունը A=BtC *տեսքի որոշիչ հարաբերություն ունեցող կիսախմբերի համար, որտեղ t տառը չի հանդիպում* A, B *կամ* C *բառերում։*

G. U. OGANESIAN. *The solvability of the word problem for semigroups with a defining relation of the form* $A=BtC$ (summary)

The paper establishes the solvability of the word problem for semigroups with a defining relation of the form $A=BtC$, where generator t does not occur in words A, B or C.

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. И. Адян.* Определяющие соотношения и алгоритмические проблемы для групп и полугрупп, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, том 85, 1966.
2. *С. И. Адян.* О преобразованиях слов в полугруппе, заданной системой определяющих соотношений, Алгебра и логика, том 15, № 6, 1976.
3. *С. И. Адян, Г. У. Оганесян.* К проблемам равенства и делимости в полугруппах с одним определяющим соотношением, Известия АН СССР, сер. матем. 42, № 2, 1978.
4. *A. Yasuhara.* The solvability of the word problem for certain semigroups, Proc. Amer. Math. Soc., 26, № 4, 1970.