ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIV, № 4, 1979 Математика

Л. З. ГЕВОРКЯН

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ НЕКОТОРОГО КЛАССА НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

0°. В работе [1] Н. Судзуки предложил новый метод исследования алгебраической структуры ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве, мнимая часть которых компактна. Впоследствии Ф. Джилфетер и Х. Бенке продолжили эти исследования для более широкого класса операторов [2], [3].

В частности, Ф. Джилфетер доказал следующую теорему.

Пусть A — оператор в гильбертовом пространстве H и $P(z, \bar{z})$ — некоторый некоммутативный полином, для которого $P(A, A^*)$ компактен. Тогда существует единственное семейство центральных проекторов $\{P_i\}_{i=0}^n$ $(n \leqslant \infty)$ таких, что

$$A = A_0 \oplus \sum_{i=1}^{n} \oplus A_i,$$

где $A_0 = A|_{P_0 H}$ удовлетворяет $P(z, \bar{z})$, т. е. $P(A_0, A_0^*) = 0$, $A_i = A|_{P_i H}$ — примарные операторы, для которых $P(A_i, A_i^*)$ компактен и не равен нулю и $K = H \ominus P_0 H$ сепарабельно.

В последующей работе Бенке [4] содержится существенно более общая теорема, чем сформулированная теорема Джилфетера, однако приведенное им доказательство мало обозримое и „неконструктивное" (см. реферат Судзуки [5]).

Цель настоящей заметки — привести новое доказательство теоремы разложения, близкой к теореме Бенке, а также установить однозначность такого разложения, которое и вовсе не обсуждается в [4]. Попутно мы приводим новое доказательство возможности разложения фактора типа 1 в прямую сумму неприводимых компонент.

1°. Введем несколько обозначений и напомним некоторые факты из теории алгебр фон-Неймана.

Пусть $\mathbf{A}$ — алгебра фон-Неймана в гильбертовом (вообще говоря, несепарабельном) пространстве H. Обозначим через Z центр алгебры $\mathbf{A}$, т. е. пересечение $\mathbf{A}$ и его коммутанта $\mathbf{A}'$. Пусть P — проектор из $\mathbf{A}'$. Обозначим через $\mathbf{A}|_P$ множество $\{A|_{PH}: A \in \mathbf{A}\}$, которое является алгеброй фон-Неймана в пространстве PH и называется индуцированной алгеброй. Пусть R — проектор из $\mathbf{A}$. Множество $\{A|_{RH}: AR = RA = A, A \in \mathbf{A}\}$ тоже является алгеброй фон-Неймана, называемой редуцированной алгеброй. Если проектор Q принадлежит центру Z алгебры $\mathbf{A}$, то индуцированная и редуцированная алгебры совпадают.

Центр $\mathbf{A}|_Q \cap \mathbf{A}|_Q'$ алгебры $\mathbf{A}|_Q$ совпадает с множеством $Z_{|Q} = \{A|_{QH} : A \in Z\} = \{A|_{QH} : AQ = QA = A,\ A \in Z\}$ ([6], [7] A 15).

Пусть оператор T принадлежит $\mathbf{A}$. Оператор проектирования на ортогональное дополнение к ядру T называется носителем T, а наименьший проектор из центра Z алгебры $\mathbf{A}$, мажорирующий носитель T, называется центральным носителем T. Для множества операторов $\mathbf{C} \subset \mathbf{A}$ центральным носителем называется наименьший проектор из центра, мажорирующий носитель каждого оператора из $\mathbf{C}$.

Очевидно, что центральный носитель S множества $\mathbf{C}$ удовлетворяет соотношению

$$TS = ST = T,\ \forall T \in \mathbf{C} \tag{1}$$

и меньше всех проекторов $R \in Z$, удовлетворяющих соотношению (1) ([6], Приложение III, 1).

Обозначим через $K_{\mathbf{A}}$ пересечение $\mathbf{A}$ и $K(H)$ ($K(H)$ — идеал компактных операторов в H).

Теорема 1. *Алгебру* $\mathbf{A}$ *можно разложить проекторами* P_0, $\{P_\beta\}$ *из центра* Z *в прямую сумму* $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \oplus (\bigoplus_{\beta \in B} \mathbf{A}_\beta)$, *где* $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}|_{P_0}$ — *алгебра фон-Неймана в пространстве* $P_0 H$, *не содержащая нетривиального компактного оператора, а все* $\mathbf{A}_\beta = \mathbf{A}|_{P_\beta}$ — *факторы и содержат нетривиальный компактный оператор в* $P_\beta H$. *Указанное семейство проекторов определяется единственным образом.*

Сначала докажем несколько вспомогательных утверждений в той форме, в какой они будут использованы ниже.

Лемма 1. *Если проектор* Q *принадлежит центру* Z *алгебры* $\mathbf{A}$, *то множества* $K_{\mathbf{A}}|_Q = \{A|_{QH} : A \in K_{\mathbf{A}}\}$ *и* $K_{\mathbf{A}|Q} = \mathbf{A}|_Q \cap K(QH)$ *совпадают.*

Доказательство. Включение $K_{\mathbf{A}|Q} \subset K_{\mathbf{A}|Q}$ очевидно, поскольку сужение компактного оператора компактно. Пусть теперь $B \in K_{\mathbf{A}|Q}$, тогда ясно, что B компактен и представляет собой сужение на QH некоторого A из $\mathbf{A}$. Легко можно проверить, что $A|_{QH} = AQ|_{QH}$, поэтому можно считать, что A удовлетворяет соотношению $AQ = QA = A$ (в противном случае мы рассмотрим AQ).

Очевидно, что $A = I_{QH,\,H} BQ$ ($I_{QH,\,H}$ — оператор вложения QH в H).

Так как B компактен в QH, то $A = I_{QH,\,H} BQ$ будет компактным в H, откуда заключаем, что $B = A|_{QH}$ принадлежит $K_{\mathbf{A}|Q}$. Итак, $K_{\mathbf{A}|Q} = K_{\mathbf{A}|Q} = K_{\mathbf{A}Q}$.

Обозначим через $\mathfrak{M}^P$ множество всех операторов проектирования из некоторого подмножества $\mathfrak{M}$ алгебры $B(H)$.

Лемма 2. *Если проектор* Q *принадлежит* Z, *то множества* $(Z|_Q)^P = \{R|_{QH} : R \in Z\}^P$ *и* $Z^P|_Q = \{S|_{QH} : S \in Z^P\}$ *совпадают.*

Доказательство. Ясно, что $Z^P|_Q \subset (Z|_Q)^P$ (сужение проектора — снова проектор).

Пусть теперь $R \in (Z|_Q)^P$, откуда следует, что существует оператор $M \in Z$ такой, что $M|_{QH} = R$, $MQ = QM = M$. Это значит, что на ортогональном дополнении к QH M равен нулю, откуда следует, что $M \in Z^P$ (продолжение проектора нулем — снова проектор).

Заметим, что сужение алгебры $\mathbf{A}$ на MH, $\mathbf{A}|_M$ будет совпадать с сужением алегбры $\mathbf{A}|_Q$ на RQH.

Лемма 3. *Пусть $Q \in Z^P$. Для того чтобы $\mathbf{A}|_Q$ был фактором, необходимо и достаточно, чтобы Q был минимальным.*

Доказательство. Необходимость. Так как $\mathbf{A}|_Q$ — фактор, то центр $\mathbf{A}|_Q \cap \mathbf{A}'_Q = \{\lambda I_{QH}\}$. С другой стороны, центр алгебры $\mathbf{A}|_Q$ совпадает с Z_Q. Согласно лемме 2 $Z^P|_Q$ будет состоять из двух элементов 0 и I_{QH}. Это значит, что сужение любого элемента S из Z^P равняется или I_{QH}, или 0. Если $S|_{QH} = I_{QH}$, то очевидно, $SQ = QS = Q$, а это означает, что $Q \leqslant S$. Если же $S|_{QH} = 0$, то проекторы S и Q не сравнимы.

Достаточность. Пусть проектор $Q \in Z$ минимален. Из этого следует, что для любого проектора S из Z либо $SQ = QS = Q$, либо $QS = 0$ (если произведение QS не равно нулю, то оно является проектором из Z, очевидным образом не большим, чем Q). Тогда ясно, что $Z^P|_Q = \{0, I_{QH}\}$. Как известно, алгебра фон-Неймана порождается своими проекторами [8]. Поэтому $Z|_Q = \mathbf{A}|_Q \cap \mathbf{A}'_Q$ будет состоять только из скаляров $\{\lambda I_{QH}\}$, т. е. $\mathbf{A}|_Q$ — фактор.

Доказательство теоремы 1. Если $K_\mathbf{A} = \{0\}$ (т. е., если алгебра не содержит нетривиального компактного оператора), то доказывать нечего и разложение имеет вид $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0$ $(P_0 = I_H)$, если же $K_\mathbf{A} \neq \{0\}$, то обозначим через H_0 пересечение ядер всех операторов из $K_\mathbf{A}$. Так как H_0 — замкнутое подпространство в H, то существует соответствующий ему проектор, который мы обозначим через P_0.

Докажем, что $P_0 \in Z$. Прежде всего заметим, что P_0 принадлежит $\mathbf{A}'$, так как H_0 инвариантно относительно любого оператора A из $\mathbf{A}$. Действительно, если $x \in H_0$, то $Bx = 0$ для любого B из $K_\mathbf{A}$, следовательно и $BAx = 0$, так как BA также принадлежит $K_\mathbf{A}$. Докажем, что H_0 инвариантно также относительно любого C из $\mathbf{A}'$. Если $x \in H_0$, то $BCx = CBx = 0$, следовательно $P_0 \in \mathbf{A}''$. Так как $\mathbf{A}$ — алгебра фон-Неймана, то $\mathbf{A} = \mathbf{A}''$, поэтому $P_0 \in Z$.

Согласно лемме 1 все компактные операторы из $\mathbf{A}|_{P_0}$ представляют из себя сужение на подпространство P_0H компактных операторов из $\mathbf{A}$. Из определения H_0 непосредственно следует, что $\mathbf{A}|_{P_0} \cap K(P_0H) = \{0\}$.

Пусть E — главная единица множества $K_\mathbf{A}$, т. е. проектор $I_H - P_0$, который, по доказанному, принадлежит Z. Легко видеть, что E удовлетворяет соотношению

$$EB = BE = B, \ \forall B \in K_\mathbf{A}. \tag{1'}$$

Действительно, так как $P_0B = BP_0 = 0$ для любого B из $K_\mathbf{A}$, то (1') получается из определения E.

Докажем, что E мажорируется всеми проекторами из центра Z алгебры **A**, удовлетворяющими соотношению (1′) и, стало быть, является центральным носителем множества K_A [6].

Если $Q \in Z$, то очевидно $QE \leqslant E$, если к тому же $BQ = QB = B$ для любого B из K_A, то $QEB = BQE = B$. Предположим теперь, что $QE < E$ и, следовательно, существует $x_0 \in H$ такой, что $QEx_0 = 0$, а $Ex_0 \neq 0$. Тогда ясно, что $Bx_0 = BQEx_0 = 0$ для любого B из K_A, следовательно x_0 принадлежит пересечению ядер всех операторов из K_A, что противоречит условию $Ex_0 \neq 0$. Итак, $QE = E$, что и означает $E \leqslant Q$.

В работе [2] доказано, в частности, следующее

Предложение. Пусть **C** — алгебра фон-Неймана в гильбертовом пространстве **H** такая, что для множества $\mathbf{C} \cap K(\mathbf{H})$ центральным носителем служит I_H. Тогда каждый проектор из центра этой алгебры Z_C мажорирует минимальный проектор из Z_C.

Докажем, что для алгебры $\mathbf{A}_E$ условие этого предложения выполняется. Допустим, что R — центральный носитель множества K_{AE}. Это значит, в частности, что R удовлетворяет соотношению $AR = RA = A$ для любого A из K_{AE}, а это эквивалентно тому, что все операторы из K_{AE} на ортогональном дополнении REH равны нулю, откуда следует, в силу определения E и леммы 1, что $R = I_{EH}$.

Итак, любой проектор из центра $Z|_E$ алгебры $\mathbf{A}|_E$ мажорирует минимальный проектор из $Z|_E$. Согласно лемме 3 сужение алгебры $\mathbf{A}|_E$ на образе минимального проектора будет фактором. Как это уже отмечалось при доказательстве леммы 2, каждому проектору R из $Z|_E$ соответствует проектор $M \in Z$, являющийся продолжением R нулем на ортогональное дополнение к EH, откуда уже следует, что сужение алгебры **A** на MH совпадает с сужением $\mathbf{A}|_E$ на REH. Таким образом, $\mathbf{A}|_M$ — фактор, если R минимален. Кроме того ясно, что $\mathbf{A}_M$ содержит нетривиальный компактный оператор, что непосредственно следует из того, что $M \leqslant E$.

Поступая так же, как, например, в монографии ([8], стр. 286), и привлекая лемму Цорна, мы можем утверждать, что существует такое семейство $\{R_\beta\}$ взаимно-ортогональных минимальных проекторов из $Z|_E$, которые в сумме дают I_{EH}. Обозначим через $\{P_\beta\}$ семейство проекторов, являющихся продолжениями R_β нулем на ортогональном дополнении к EH. Согласно лемме 2 $\{P_\beta\} \subset Z$. Они будут осуществлять разложение $\mathbf{A}_E$ в прямую сумму факторов. Присоединяя сужение $\mathbf{A}_0$ алгебры **A** на P_0H, мы получим искомое разложение

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \oplus (\bigoplus_{\beta \in B} \mathbf{A}_\beta).$$

Докажем теперь единственность этого разложения. Пусть имеется еще одно разложение $\mathbf{A} = \mathbf{A}|_{Q_0} \oplus (\bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \mathbf{A}|_{Q_\gamma})$. Если $\mathbf{A}|_{Q_{\gamma_0}}$ — фактор, то согласно лемме 3, проектор Q_{γ_0}, принадлежащий Z, минимален. Из этого следует, что либо $Q_{\gamma_0} P_\beta = 0$ для любого $\beta \in \mathbf{B}$, либо $Q_{\gamma_0} = P_{\beta_0}$ для некоторого β_0. Первое невозможно, так как $\sum_{\beta \in B} P_\beta + P_0 = I_H$, в силу чего $Q_{\gamma_0} \leqslant P_0$, что противоречит условию

$$\mathbf{A}|_{Q_{\gamma_0}} \cap K(Q_{\gamma_0} H) \neq \{0\}.$$

Далее, так как множества $\{P_\beta\}$ и $\{Q_\gamma\}$ совпадают, то $Q_0 = P_0$.

Как уже доказано, факторы, участвующие в разложении, содержат нетривиальный компактный оператор. Так как алгебра фон-Неймана вместе с каждым оператором содержит и его спектральное разложение [8], то фактор будет содержать конечномерный проектор, откуда следует, что фактор содержит минимальный проектор, т. е. имеет тип 1.

В книге Диксмье [6], [7] A 36 дано описание факторов типа 1. Здесь мы сформулируем и докажем теорему, которая очень близка к результату Диксмье. Доказательство, которое приводится ниже, как нам кажется, более простое. Сначала докажем лемму.

Лемма 4. *Пусть* $\mathbf{A}$ — *алгебра фон-Неймана в гильбертовом пространстве* H, P — *проектор из* $\mathbf{A}'$. *Для того чтобы* $\mathbf{A}|_P$ *совпадал с* $B(PH)$, *необходимо и достаточно, чтобы* P *был минимальным.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathbf{A}|_P = B(PH)$. Известно, что $(\mathbf{A}'|_P) = \mathbf{A}|_P$ ([5], [6] A 15). Тогда $\mathbf{A}'_P = \{\lambda I_{PH}\}$, откуда следует, что сужение любого $A \in \mathbf{A}'$ такого, что $AP = PA = A$, на подпространство PH равняется λI_{PH}. Пусть Q — проектор из $\mathbf{A}'$, удовлетворяющий условию $QP = PQ = Q$ (т. е. Q не больше, чем P). Но так как $Q|_{PH} = I_{PH}$, то очевидно, что $Q = P$. Итак, проектор $P \in \mathbf{A}'$ минимален.

Достаточность. Пусть P минимален. Это означает, что не существует ни одного подпространства, инвариантного относительно всех операторов из $\mathbf{A}$ и содержащегося в подпространстве PH. То же самое верно и для сужений операторов из $\mathbf{A}$ на подпространство PH. Таким образом, коммутант $\mathbf{A}'_P$ не содержит нетривиальных проектов, т. е. состоит из скаляров. Так как $\mathbf{A}|_P$ — алгебра фон-Неймана, то $\mathbf{A}|_P = B(PH)$.

Теорема 2. *Если фактор* $\mathbf{A}$ *содержит конечномерный проектор, то его можно разложить проекторами* $\{Q_\alpha\}$ *из коммутанта* $\mathbf{A}'$ *в прямую сумму* $\mathbf{A} = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}} B(Q_\alpha H)$, *причем сужения любого* A *из* $\mathbf{A}$ *на подпространства* $Q_\alpha H$ *унитарно эквивалентны между собой.*

Доказательство. Если $\mathbf{A} \neq B(H)$, то $\mathbf{A}'$ содержит нетривиальный проектор. Докажем, что любой проектор P из $\mathbf{A}'$ мажорирует некоторый минимальный проектор $Q \in \mathbf{A}'$.

Рассмотрим произвольное линейно упорядоченное множество проекторов $\{P_\gamma\} \subset \mathbf{A}'$, мажорируемых P. Если мы докажем, что это множество обладает нижней гранью, то по лемме Цорна будет существовать минимальный элемент $Q \in \mathbf{A}'$. Очевидно, что нижней гранью множества $\{P_\gamma\}$ будет оператор проектирования R на $\bigcap P_\gamma H$. Ясно, что этот проектор принадлежит $\mathbf{A}'$. Остается доказать, что R не равняется нулю.

Пусть S — конечномерный проектор, принадлежащий $\mathbf{A}$. Для любого γ обозначим через R_γ проектор SP_γ. Очевидно, что R_γ конечномерен.

Известно, что если $\mathbf{A}$ фактор, то из условия $AA'=0$ ($A\in\mathbf{A}$, $A'\in\mathbf{A}'$) следует, что либо $A=0$, либо $A'=0$ ([8], стр. 523, основная лемма). Поэтому $R_\gamma \neq 0$ для любого γ. Поскольку множество $\{P_\gamma\}$ линейно упорядочено, то будет линейно упорядоченным и множество $\{R_\gamma\}$. Среди этого множества не более чем n различных элементов (n — размерность проектора S). Поэтому в множестве $\{R_\gamma\}$ существует наименьший элемент и пересечение $\bigcap R_\gamma H$ не равно нулю. Поэтому не равно нулю и $\bigcap P_\gamma H$. Итак, каждый проектор $P\in\mathbf{A}'$ мажорирует минимальный проектор $Q\in\mathbf{A}'$.

Согласно лемме 4 сужение фактора $\mathbf{A}$ на QH будет совпадать с $B(QH)$.

Как и выше, используя лемму Цорна, можно доказать, что сумма некоторого множества минимальных проекторов $\{Q_\iota\}$ будет совпадать с I_H.

Остается доказать унитарную эквивалентность сужений A_ι оператора $A\in\mathbf{A}$.

Напомним, что проекторы E и F, принадлежащие некоторой алгебре фон-Неймана $\mathbf{C}$, называются эквивалентными относительно $\mathbf{C}$, если существует частично изометричный оператор $U\in\mathbf{C}$ такой, что $UU^*=E$ и $U^*U=F$ (обозначение $E\sim F$). Если существует проектор из $\mathbf{C}$, эквивалентный E и мажорируемый F, то пишут $E\lesssim F$ ([6], [7] A 46).

Известно, что если $\mathbf{C}$ — фактор, то либо $E\lesssim F$, либо $F\lesssim E$ ([6], [7] A 46). Очевидно, что если проекторы E и F, принадлежащие $\mathbf{A}'$ минимальны, то будут эквивалентны друг другу.

Итак, для любой пары ι_1, ι_2 существует частично изометричный оператор $\widetilde{U}_{\iota_1\iota_2}\in\mathbf{A}'$, отображающий $Q_{\iota_1}H$ на $Q_{\iota_2}H$. Сужение $U_{\iota_1\iota_2}$ оператора $\widetilde{U}_{\iota_1\iota_2}$ на $Q_{\iota_1}H$ и будет обладать всеми нужными свойствами. Равенство $A_{\iota_2}=U_{\iota_1\iota_2}A_{\iota_1}U^*_{\iota_1\iota_2}$ проверяется непосредственно.

Важным частным примером алгебр фон-Неймана являются алгебры фон-Неймана $R(A)$, порожденные одним оператором A.

Из доказанных выше теорем следует, что если $R(A)$ содержит компактный оператор, то A разлагается в прямую сумму оператора A_0, для которого $R(A_0)$ не содержит нетривиального компактного оператора и некоторой совокупности экземпляров одного и того же неприводимого оператора. Первое слагаемое разложения — A_0, когда оператор A удовлетворяет какому-то соотношению (например, если $A-A^*$ компактен, или AA^*-A^*A компактен, или $I-A^*A$ компактен) представляет собой оператор с довольно хорошо исследованными свойствами

(A_0 самосопряжен, соответственно нормален, изометричен). Таким обр зом, изучение структуры произвольного оператора этих классов, де ствующих в несепарабельном пространстве сводится к изучению таки же неприводимых операторов, действующих уже в сепарабельном про странстве.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 20.IV.197

Լ. Զ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ. Ոչ ինքնահամալուծ օպերատորների որոշ դասի ալգեբրաիկ կազմ թյունը (*ամփոփում*)

Հոդվածի նպատակն է տալ կոմպակտ օպերատոր պարունակող ֆոն-Նոյմանի ալգեբրա չբերվող բաղադրիչների ուղիղ գումարի վերածման թեորեմայի նոր ապացույցը։

L. Z. GEVORKIAN. *On the algebraic structure of a certain class of non self-adjoint operators* (summary)

The aim of this paper is to give a new proof of the theorem on decompositi of the von-Neumans algebras containing compact operator, into direct sum of irr ducible components.

ЛИТЕРАТУРА

1. *N. Suzuki*. The algebraic structure of non self-adjoint operators, Acta Math. Sc 27, 1966, 173–184.
2. *F. Gilfeather*. On the Suzuki structure theory for non self-adjoint operators, Ac Math. Sci., 32, 1971, 240–249.
3. *H. Behncke*. Structure of certain nonnormal operators, J. of Math. and Mech., 1 1968, 103–107.
4. *H. Behncke*. Structure of certain nonnormal operators, II, Ind. Univ. Math. J., 2 1972, 301–308.
5. *N. Suzuki*. Math. Rev., 47, 1974, 9322.
6. *J. Dixmier*. Les algebres d'operateurs dans L'espace Hilbertien, GV., 1969.
7. *Ж. Диксмье*. C^* — алгебры и их представления, М., 1974.
8. *М. А. Наймарк*. Нормированные кольца, М., 1968.