ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIV, № 4, 1979 Математика

А. А. СЕХПОСЯН

РАДИАЛЬНЫЕ ИЗМЕНЕНИЯ ПРОИЗВЕДЕНИЙ B_ω И Π_ω БЛЯШКЕ—ДЖРБАШЯНА

Введение

Пусть $\{z_k\}_1^\infty$ $(0 < |z_k| \leq |z_{k+1}| < 1)$ — произвольная последовательность комплексных чисел, пронумерованных в порядке неубывания их модулей.

Как известно, если

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|) < +\infty, \tag{1}$$

то бесконечное произведение Бляшке

$$B(z;\, z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k \cdot z} \cdot \frac{|z_k|}{z_k} \tag{2}$$

сходится в круге $|z| < 1$ и представляет там аналитическую функцию, обращающуюся в нуль на последовательности $\{z_k\}_1^\infty$.

Известно [1], что произведение Бляшке имеет радиальный предел

$$B(e^{i\theta};\, z_k) = \lim_{r \to 1-0} B(re^{i\theta};\, z_k),$$

если в точке $e^{i\theta}$ удовлетворяется условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - |z_k|}{|e^{i\theta} - z_k|} < +\infty. \tag{3}$$

М. М. Джрбашяном [2], при некоторых условиях на функцию $\omega(x)$, построена функция

$$B_\omega(z) \equiv B_\omega(z;\, z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{-W_\omega(z;\, z_k)}, \tag{4}$$

где

$$W_\omega(z;\, \zeta) = \int_{|\zeta|}^{1} \frac{\omega(x)}{x}\, dx -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \zeta^{-k} \int_0^{|\zeta|} \omega(x)\, x^{k-1}\, dx - \bar{\zeta}^{k} \int_{|\zeta|}^{1} \omega(x)\, x^{-k-1}\, dx \right\} \cdot \frac{z^k}{\Delta_k} \tag{5}$$

и

$$\Delta_0 = 1, \ \Delta_k = k \int_0^1 \omega(x)\, x^{k-1}\, dx \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

которая является естественным обобщением как произведения Бляшке, так и введенного им же произведения $B_\alpha(z;\ z_k)$ и совпадает с ними в частных случаях $\omega(x) = 1$ и $\omega(x) = (1-x)^\alpha$ $(-1 < \alpha < +\infty)$ соответственно.

Доказано, что для того чтобы произведение $B_\omega(z;\ z_k)$ сходилось и определяло аналитическую в круге $|z| < 1$ функцию, обращающуюся в нуль на последовательности $\{z_k\}_1^\infty$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{|z_k|}^{1} \omega(x)\, dx < +\infty, \tag{6}$$

притом $\omega(x)$ — функция из определенного класса, который введем позже.

Доказано также, что если при некоторой функции $\omega(x)$ последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ $(0 < |z_k| \leqslant |z_{k+1}| < 1)$ удовлетворяет условию (6), то тогда предел

$$B_\omega(e^{i\theta}) = \lim_{r \to 1-0} B_\omega(re^{i\theta})$$

существует и конечен для всех $\theta \in [0;\ 2\pi]$, кроме, быть может, некоторого множества $E \subset [0,\ 2\pi]$, некоторая емкость которого, ассоциированная с функцией $\omega(x)$, равна нулю.

В дальнейшем в работе [4] введена функция

$$\Pi_\omega(z;\ z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_\omega(z;\ z_k), \tag{7}$$

где

$$\tilde{A}_\omega(z;\ z_k) = \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \cdot e^{\tilde{U}_\omega(z;\ z_k)} \tag{8}$$

и

$$\tilde{U}_\omega(z;\ z_k) = \int_{|z_k|^2}^{1} \frac{\omega(x)}{x}\, dx -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z}{z_k}\right)^k \cdot \frac{1}{\Delta_k} \cdot \int_0^{|z_k|^2} \omega(x)\, x^{k-1}\, dx, \tag{9}$$

которая в частном случае $\omega(x) = (1-x)^\alpha$ совпадает с произведением Π_α, введенным ранее М. М. Джрбашяном [5].

Говорят, что функция, голоморфная в открытом единичном круге D имеет конечное сегментное изменение в точке $e^{i\theta}$, если посредством этой функции любой сегмент, соединяющий $e^{i\theta}$ с точкой, лежащей в D, отображается на спрямляемую кривую. Если радиус с концом в $e^{i\theta}$ отображается на спрямляемую кривую, то говорят, что функция имеет конечное радиальное изменение в точке $e^{i\theta}$. Ясно, что в данной точке из конечности радиального изменения вытекает существование конечного радиального предела для данной функции в этой точке.

В работе [7] Рудиным было доказано, что если последовательность удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-|z_k|)\cdot \ln \frac{1}{1-|z_k|} < +\infty,$$

то произведение $B(z; z_k)$ имеет конечное радиальное изменение почти всюду на $[0; 2\pi]$.

В настоящей статье рассматривается вопрос о радиальном изменении произведений B_ω и Π_ω в данной точке.

Доказываются также теоремы о радиальном изменении произведений B_ω и Π_ω на единичной окружности.

Автор выражает искреннюю благодарность В. С. Захаряну за постановку задачи и руководство.

§ 1. Вспомогательные результаты

Ниже мы приведем важнейшие положения и результаты, на которые будем опираться и ссылаться в процессе изложения данной статьи.

Обозначим через Ω множество функций $\omega(r)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $\omega(r)$ положительна и непрерывна на $[0; 1)$;

2) $\omega(0)=1$, $\int\limits_0^1 \omega(r)\,dr < +\infty$;

3) в некоторой окрестности $0 \leqslant r < \delta < 1$ точки 0 выполняется условие

$$|\omega(r)-1| \leqslant C(\delta)\cdot r.$$

В случае, когда функция $\omega(x) \in \Omega$ не убывает на $[0; 1)$, такие функции отнесем к классу $\Omega_0 \subset \Omega$.

Пусть имеем

$$C(z; \omega)=\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{\Delta_k}; \quad S(z; \omega)=1+\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{\Delta_k}, \tag{10}$$

где

$$\Delta_0 = 1;\ \Delta_k = k \cdot \int_0^1 \omega(x)\, x^{k-1}\, dx \quad (k=1,\ 2, \cdots). \tag{11}$$

Эти функции связаны между собой сооткошением

$$S(z;\ \omega) = 2C(z;\ \omega) - 1. \tag{12}$$

Лемма. *При* $\omega(x) \in \Omega$ *имеем*

$$|B_\omega(z;\ z_m)| \leqslant |B_1(z;\ z_m)| \leqslant 1 \tag{13}$$

и

$$|\Pi_\omega(z;\ z_m)| \leqslant |\Pi_1(z;\ z_m)| \leqslant 1. \tag{14}$$

Доказательство. Неравенство (13) следует из представления ([14], стр. 353)

$$B_\omega(z;\ z_k) = B_1(z;\ z_k) \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(e^{-i\theta} z;\ \omega)\, d\mu(\theta)\right\} \ (|z| < 1),$$

где $\mu(\theta)$ — некоторая невозрастающая ограниченная функция на $[0;\ 2\pi]$, а неравенство (14)—из следующего представления ([4], стр. 357):

$$\Pi_\omega(z;\ z_k) = C_0 \cdot B_1(z;\ z_k) \exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2} S(e^{-i\theta} z;\ \omega)\, d\psi(\theta)\right\},$$

где

$$C_0 = \sqrt{\Pi_\omega(0;\ z_k)},\ |z| < 1,$$

а $\psi(\theta)$ — неубывающая ограниченная функция на $[0;\ 2\pi]$.

Лемма 1. *Пусть* $\omega(x) \in \Omega_0$, *тогда для любых значений* $|z| < 1$, $|\zeta| < 1$ *имеем*

$$\mathrm{Re}\,\{W_\omega(z;\ \zeta) - W_1(z;\ \zeta)\} \geqslant 0 \tag{15}$$

и

$$\mathrm{Re}\,\{\widetilde{U}_\omega(z;\ \zeta) - \widetilde{U}_1(z;\ \zeta)\} \geqslant 0. \tag{16}$$

Доказательство. Заметим, что (15) следует из неравенства (13), поскольку имеем также, что

$$B_\omega(re^{i\theta}) = B_1(re^{i\theta}) \exp\left\{-\sum_{k=1}^{\infty} [W_\omega(re^{i\theta};\ z_k) - W_1(re^{i\theta};\ z_k)\right\},$$

а для доказательства оценки (16) заметим ([4], стр. 355), что

$$\mathrm{Re}\,\{\widetilde{U}_1(z;\ \zeta) - \widetilde{U}_\omega(z;\ \zeta)\} + \frac{1}{2}\widetilde{U}_\omega(0;\ \zeta) - \frac{1}{2}\widetilde{U}_1(0;\ \zeta) \leqslant 0.$$

Отсюда видно, что если

$$\frac{1}{2}\widetilde{U}_1(0;\ \zeta) - \frac{1}{2}\widetilde{U}_\omega(0;\ \zeta) \leqslant 0, \tag{16'}$$

то верно неравенство (16).

Имея ввиду (9), получим

$$\widetilde{U}_\omega(0;\zeta)=\int\limits_{|\zeta|^2}^{1}\frac{\omega(x)}{x}\,dx,$$

а

$$\overline{U}_1(z;\zeta)=\log\frac{1-z\bar{\zeta}}{|\zeta|^2},$$

откуда

$$\overline{U}_1(0;\zeta)=\log\frac{1}{|\zeta|^2}\cdot$$

Поскольку $\omega(x)\geqslant 1$ при $\omega(x)\in\Omega_0$, имеем

$$\int\limits_{|\zeta|^2}^{1}\frac{\omega(x)}{x}\,dx\geqslant\int\limits_{|\zeta|^2}^{1}\frac{dx}{x}=\log\frac{1}{|\zeta|^2},$$

а это равносильно тому, что

$$\overline{U}_1(0;\zeta)\leqslant\widetilde{U}_\omega(0;\zeta),$$

откуда вытекает справедливость (16′). Следовательно, (16) также верно.

Заметим, что для произвольной функции $\omega(x)\in\Omega_0$ имеет место оценка [8]:

$$\frac{1-|z|}{|1-z|}\leqslant A_0\cdot\left\{\int\limits_{|z|}^{1}\omega(x)\,dx\right\}\cdot|C(z;\omega)|\quad(|z|<1),\tag{17}$$

где постоянная $A_0\ (0<A_0<+\infty)$ не зависит от z.

Следующая оценка также справедлива [9]:

$$\int\limits_{0}^{1}|S'(re^{i\varphi};\omega)|\,dr\leqslant 16\,(1+2\,|S(e^{i\varphi};\omega)|),\tag{18}$$

где $0<|\varphi|\leqslant\pi$.

Имеем также [8]:

$$|S(rz;\omega)|<5\,\{1+|S(z;\omega)|\}\quad(0\leqslant r\leqslant 1).\tag{19}$$

При условии $0<|\zeta|<1$ и $\dfrac{1-|\zeta|}{|1-\zeta|}<\dfrac{1}{4}$ имеет место оценка [8]:

$$|W_\omega(r;\zeta)-W_1(r;\zeta)|\leqslant 54\,|\zeta|^{-2}\cdot\left\{1+|S(\zeta;\omega)|\cdot\right\}\int\limits_{|\zeta|}^{1}\omega(x)\,dx=$$

$$=108\,|\zeta|^{-2}\,|C(\zeta;\omega)|\int\limits_{|\zeta|}^{1}\omega(x)\,dx.\tag{20}$$

Лемма 2. *Пусть* $\omega(x) \in \Omega_0$, *тогда имеет место оценка*

$$|\widetilde{U}_\omega(r;\zeta) - \widetilde{U}_1(r;\zeta)| \leqslant C|\zeta|^{-2} \cdot |C(\zeta;\omega)| \int_{|\zeta|^2}^{1} \omega(x)\,dx. \tag{21}$$

Доказательство. Имея ввиду (9), получим

$$\widetilde{U}_\omega(r;\zeta) - \widetilde{U}_1(r;\zeta) = \int_{|\zeta|^2}^{1} \frac{\omega(x)-1}{x}\,dx +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k} - \frac{|\zeta|^{-2k}}{\Delta_k} \cdot \int_0^{|\zeta|^2} \omega(x)\,x^{k-1}\,dx \right\} (r\zeta)^k. \tag{22}$$

Имеем

$$\int_{|\zeta|^2}^{1} \frac{\omega(x)-1}{x}\,dx < \int_{|\zeta|^2}^{1} \frac{\omega(x)}{x}\,dx < |\zeta|^{-2} \int_{|\zeta|^2}^{1} \omega(x)\,dx. \tag{23}$$

В работе [8] доказано, что

$$|j_2(r;\zeta)| = \left| - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k} - \frac{|\zeta|^{-2k}}{\Delta_k} \int_0^{|\zeta|^2} \omega(x)\,x^{k-1}\,dx \right\} \cdot (r\bar{\zeta})^k \right| \leqslant$$

$$\leqslant 3\,\{1 + |S(\zeta;\omega)|\} \cdot \int_0^1 \frac{\omega(x) - \omega(|\zeta|^2 x)}{x}\,dx. \tag{24}$$

Поскольку $\omega(x) \in \Omega_0$ и $0 \leqslant |\zeta| \leqslant x < 1$, то

$$\int_0^1 \frac{\omega(x) - \omega(|\zeta|^2 x)}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{\omega(x) - 1}{x}\,dx - \int_0^1 \frac{\omega(|\zeta|^2 x) - 1}{x}\,dx =$$

$$= \int_{|\zeta|^2}^{1} \frac{\omega(x) - 1}{x}\,dx < |\zeta|^{-2} \int_{|\zeta|^2}^{1} \omega(x)\,dx. \tag{25}$$

Итак окончательно получаем

$$|j_2(r;\zeta)| \leqslant 6\,|\zeta|^{-2}\,|C(\zeta;\omega)| \int_{|\zeta|^2}^{1} \omega(x)\,dx. \tag{26}$$

Имеем

$$|\widetilde{U}_\omega(r;\zeta) - \widetilde{U}_1(r;\zeta)| \leqslant |\zeta|^{-2} \int_{|\zeta|^2}^{1} \omega(x)\,dx +$$

$$+ 6\,|\zeta|^{-2}\cdot|C(\zeta;\omega)|\int\limits_{|\zeta|^2}^{1}\omega(x)\,dx <$$

$$< C\cdot|\zeta|^{-2}\,|C(\zeta;\omega)|\int\limits_{|\zeta|^2}^{1}\omega(x)\,dx. \quad (27)$$

Следуя работе [8], введем определение. Пусть множество $E\subset[0,2\pi]$ измеримо по Борелю. Если существует такое неотрицательное распределение μ, сосредоточенное на E, а именно:

$$\int\limits_0^{2\pi} d\mu = \int\limits_E d\mu = 1,$$

что интеграл

$$U_\omega(re^{i\varphi}) = \int\limits_0^{2\pi} |C(re^{i(\varphi-\theta)};\omega)|\,d\mu(\theta)$$

остается равномерно ограниченным по $\varphi\in[0;2\pi]$ при $r\to 1-0$, то скажем, что множество E имеет положительную ω-емкость и напишем $C_\omega(E)>0$. В случае отсутствия такой меры, считаем ω-емкость множества E равной нулю: $C_\omega(E)=0$. Известна следующая теорема [8].

Теорема А. Пусть $\{z_k\}_1^\infty$ $(0<|z_k|\leq|z_{k+1}|<1)$ — произвольная последовательность комплексных чисел, а последовательность положительных чисел $\{\delta_k\}_1^\infty$ $(\delta_k\geq 0)$ удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^{\infty}\delta_k < +\infty. \quad (28)$$

Тогда при любом $\omega(x)\in\Omega_0$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}|C(e^{-i\theta}z_k,\omega)|\,\delta_k,\ \theta\in[0;2\pi] \quad (29)$$

может расходится лишь на множестве $E\subset[0;2\pi]$ нулевой C_ω-емкости.

§ 2. Радиальные изменения произведений B_ω и Π_ω в данной точке

Теорема 1. *Пусть $\omega(x)\in\Omega_0$, тогда если последовательность комплексных чисел $\{z_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty}|C(e^{-i\theta}z_k;\omega)|\cdot\int\limits_{|z_k|}^{1}\omega(x)\,dx < +\infty;\ \theta\in[0;2\pi]; \quad (30)$$

то в точке $e^{i\theta}$ произведение $B_\omega(z;z_k)$ имеет конечное радиальное изменение.

Доказательство. Заметим сначала, что

$$B_\omega(re^{i\theta};\ z_k)=B_\omega(r;\ z_k\,e^{-i\theta}),$$

а также, что можем и в дальнейшем заменить в функции $C(z_k;\ \omega)$ z_k на $z_k\,e^{-i\theta}$, поэтому, не нарушая общности, достаточно доказать теорему только для случая $\theta=0$.

Обозначим

$$B_\omega(z;\ z_k)=\prod_{k=1}^{\infty} b_\omega(z;\ z_k), \tag{31}$$

где

$$b_\omega(z;\ z_k)=\left(1-\frac{z}{z_k}\right)\cdot e^{-W_\omega(z,\ z_k)}. \tag{32}$$

Тогда вычислив логарифмическую производную произведения, получим

$$B'_\omega(z;\ z_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b'_\omega(z;\ z_k)}{b_\omega(z;\ z_k)}\,B_\omega(z;\ z_m),$$

откуда согласно (13) имеем

$$|B'_\omega(z;\ z_k)|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|b'_\omega(z;\ z_k)| \tag{33}$$

для всех z из единичного круга.

Обозначим через $V(f;\ \theta)$ радиальное изменение функции $f(z)$ в точке $e^{i\theta}$, а именно

$$V(f;\ \theta)=\int_0^1|f'(re^{i\theta})|\,dr.$$

В силу (33)

$$V(B_\omega;\ 0)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1|b'_\omega(r;\ z_k)|\,dr. \tag{34}$$

Оценим теперь следующий интеграл:

$$I_\omega=\int_0^1|b'_\omega(r;\ \zeta)|\,dr.$$

Имеем

$$I_\omega\leqslant\int_0^1|b'_1(r;\ \zeta)|\,dr+\int_0^1|b'_\omega(r;\ \zeta)-b'_1(r;\ \zeta)|\,dr=I^{(1)}_\omega+I^{(2)}_\omega. \tag{35}$$

Так как $b_1(r;\ \zeta)=\frac{r-\zeta}{1-r\bar\zeta}\cdot\frac{|\zeta|}{\zeta}$ — дробно-линейная функция, отображающая единичный круг на себя, то ясно, что

$$I_\omega^{(1)} \leqslant \frac{\pi}{2} \cdot |b_1(0; \zeta) - b_1(1; \zeta)| =$$

$$= \frac{\pi}{2}(1+|\zeta|)\frac{1-|\zeta|}{|1-\zeta|} \leqslant \pi \frac{1-|\zeta|}{|1-\zeta|}. \qquad (36)$$

Теперь имея ввиду (17), получим

$$I_\omega^{(1)} \leqslant \pi A_0 \left| \int_{|\zeta|}^{1} \omega(x)\, dx \right| \cdot |C(\zeta; \omega)|. \qquad (36')$$

Для оценки $I_\omega^{(2)}$ заметим, что

$$b_\omega(r; \zeta) - b_1(r; \zeta) = b_1(r; \zeta) \cdot [e^{W_1(r;\zeta) - W_\omega(r;\zeta)} - 1].$$

Отсюда получим

$$|b'_\omega(r; \zeta) - b'_1(r; \zeta)| \leqslant |b'_1(r; \zeta)| \cdot [e^{W_1(r;\zeta) - W_\omega(r;\zeta)} - 1] +$$

$$+ |b_1(r; \zeta)| \cdot e^{W_1(r;\zeta) - W_\omega(r;\zeta)} \cdot |W'_1(r; \zeta) - W'_\omega(r; \zeta)|.$$

Поскольку для $\operatorname{Re} z > 0$ имеет место неравенство

$$|1 - e^{-z}| \leqslant |z|,$$

то в силу (15)

$$|1 - e^{W_1(r;\zeta) - W_\omega(r;\zeta)}| \leqslant |W_\omega(r; \zeta) - W_1(r; \zeta)|. \qquad (37)$$

Согласно (13), (15) и (37) будем иметь

$$|b'_\omega(r; \zeta) - b'_1(r; \zeta)| \leqslant |W_\omega(r; \zeta) - W_1(r; \zeta)| \cdot |b'_1(r; \zeta)| +$$

$$+ |W'_\omega(r; \zeta) - W'_1(r; \zeta)|. \qquad (38$$

Таким образом, для $I_\omega^{(2)}$ получаем:

$$I_\omega^{(2)} \leqslant \int_0^1 |W_\omega(r; \zeta) - W_1(r; \zeta)| \cdot |b'_1(r; \zeta)|\, dr +$$

$$+ \int_0^1 |W'_\omega(r; \zeta) - W'_1(r; \zeta)|\, dr = \overline{I}_\omega^{(2)} + \overline{\overline{I}}_\omega^{(2)}. \qquad (39)$$

Теперь с учетом (20), (36) и имея ввиду, что $\frac{1-|\zeta|}{|1-\zeta|} < 1$, получим оценку для $\overline{I}_\omega^{(2)}$:

$$\overline{I}_\omega^{(2)} \leqslant 108\, \pi |\zeta|^{-2} \cdot |C(\zeta; \omega)| \int_{|\zeta|}^{1} \omega(x)\, dx,$$

иными словами $\overline{I}_\omega^{(2)}$ удовлетворяет условию (30) теоремы. Теперь оценим $\overline{\overline{I}}_\omega^{(2)}$. Для этого сначала преобразуем следующее выражение:

$$W'_\omega(r; \zeta) - W'_1(r; \zeta) = \int_{|\zeta|}^{1} \frac{\omega(x) - 1}{x}\, dx +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(r\bar{\zeta})^k}{\Delta_k}\cdot\int_{|\zeta|}^{1}\left[\omega(x)-\omega\left(\frac{|\zeta|^2}{x}\right)\right]x^{-k-1}\,dx+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{k}-\frac{|\zeta|^{-2k}}{\Delta_k}\int_{0}^{|\zeta|^2}\omega(x)\,x^{k-1}\,dx\right\}(r\bar{\zeta})^k=$$

$$=\int_{|\zeta|}^{1}\frac{\omega(x)-1}{x}\,dx+\frac{1}{2}\int_{|\zeta|}^{1}\left\{\omega(x)-\omega\left(\frac{|\zeta|^2}{x}\right)\right\}\cdot\left\{S\left(\frac{r\bar{\zeta}}{x};\omega\right)-1\right\}\frac{dx}{x}-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\frac{\omega(x)-\omega(|\zeta|^2)\,x)}{x}\{S(r\bar{\zeta}x;\,\omega)-1\}\,dx.$$

Отсюда получим

$$|W_{\omega}(r;\zeta)-W_1(r;\zeta)|\leqslant\frac{|\bar{\zeta}|}{2}\cdot\int_{|\zeta|}^{1}\left|S'\left(\frac{r\bar{\zeta}}{x};\omega\right)\right|\cdot\left|\omega(x)-\omega\left(\frac{|\zeta|^2}{x}\right)\right|\times$$

$$\times\frac{dx}{x^2}+\frac{|\bar{\zeta}|}{2}\int_{0}^{1}|S'(r\bar{\zeta}x;\,\omega)|\cdot|\omega(x)-\omega(|\zeta|^2x)|\,dx. \tag{40}$$

Заметим, что при $\omega(x)\in\Omega_0$ и $|\zeta|\leqslant x<1$

$$\omega\left(\frac{|\zeta|^2}{x}\right)\leqslant\omega(x)$$

и поэтому имеет место оценка

$$\left|\omega(x)-\omega\left(\frac{|\zeta|^2}{x}\right)\right|x^{-2}\leqslant2|\zeta|^{-2}\omega(x),$$

а также спраледлива

$$\omega(|\zeta|^2x)\leqslant\omega(x),$$

поэтому

$$|\omega(x)-\omega(|\zeta|^2x)|\leqslant2\,\omega(x).$$

Из (40) имеем

$$|W_{\omega}(r;\zeta)-W_1(r;\zeta)|\leqslant|\zeta|^{-1}\int_{|\zeta|}^{1}\left|S'\left(\frac{r\bar{\zeta}}{x};\omega\right)\right|\omega(x)\,dx+$$

$$+|\zeta|\cdot\int_{0}^{1}|S'(r\bar{\zeta}x,\,\omega)|\,\omega(x)\,dx.$$

Итак из (39) для $\bar{I}_{\omega}^{(2)}$ получим

$$\tilde{I}_{\omega}^{(2)} \leqslant |\zeta|^{-1} \int_{|\zeta|}^{1} \omega(x)\, dx \int_{0}^{1} \left| S'\left(\frac{r\zeta}{x}; \omega\right)\right| dr +$$

$$+ |\zeta| \int_{0}^{1} \omega(x)\, dx \int_{0}^{1} |S'(r\bar{\zeta} x; \omega)|\, dr. \tag{41}$$

Теперь согласно (18), (19) и учитывая доказанное в работе [8] неравенство

$$\int_{|\zeta|}^{1} \omega(x) \left| S\left(\frac{r\zeta}{x}; \omega\right)\right| dx \leqslant 9\, |\zeta|^{-2}\, |S(r\zeta; \omega)| \int_{|\zeta|}^{1} \omega(x)\, dx,$$

получаем

$$\tilde{I}_{\omega}^{(2)} \leqslant |\zeta|^{-1} \int_{|\zeta|}^{1} 16\left(1 + 2\left| S\left(\frac{\bar{\zeta}}{x}; \omega\right)\right|\right) \omega(x)\, dx +$$

$$+ |\zeta| \cdot \int_{0}^{1} 16\,(1 + 2\,|S(\bar{\zeta}(x; \omega)|)\, \omega(x)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant 16\, |\zeta|^{-1} \int_{|\zeta|}^{1} \omega(x)\, dx + 288\, |\zeta|^{-3}\, |S(\bar{\zeta}; \omega)| \int_{|\zeta|}^{1} \omega(x)\, dx +$$

$$+ 16\, |\zeta| \int_{|\zeta|}^{1} \omega(x)\, dx + 160\, |\zeta|\, [1 + |S(\bar{\zeta}; \omega)|] \int_{|\zeta|}^{1} \omega(x)\, dx,$$

откуда

$$\tilde{I}_{\omega}^{(2)} \leqslant c_1\, |\zeta|^{-3}\, \{1 + |S(\bar{\zeta}; \omega)|\} \int_{|\zeta|}^{1} \omega(x)\, dx +$$

$$+ c_2\, |\zeta|^{-3}\, |S(\bar{\zeta}; \omega)| \int_{|\zeta|}^{1} \omega(x)\, dx =$$

$$= 2\, c_1\, |\zeta|^{-3}\, |C(\zeta; \omega)| \int_{|\zeta|}^{1} \omega(x)\, dx +$$

$$+ c_2\, |\zeta|^{-3}\, |S(\zeta; \omega)| \int_{|\zeta|}^{1} \omega(x)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant c\, |\zeta|^{-3}\, |C(\zeta; \omega)| \int_{|\zeta|}^{1} \omega(x)\, dx.$$

Отсюда видно, что $\widetilde{I}_\omega^{(2)}$ также удовлетворяет условию (30) теоремы. Из неравенства (35), (36'), (39) согласно условию (30) вытекает утверждение теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть $\omega(x) \in \Omega_0$, тогда, если последовательность комплексных чисел $\{z_k\}_1^\infty$ $(0 < |z_k| \leq |z_{k+1}| < 1)$ удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |C(e^{-i\theta} z_k; \omega)| \int_{|z_k|^0}^{1} \omega(x)\, dx < +\infty; \; \theta \in [0; 2\pi], \tag{42}$$

то в точке $e^{i\theta}$ произведение Π_ω имеет конечное радиальное изменение.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 1, не нарушая общности, мы можем считать, что $\theta = 0$, поскольку

$$\Pi_\omega(re^{i\theta}; z_k) = \Pi_\omega(r; z_k e^{-i\theta}).$$

Вычислим логарифмическую производную произведения $\Pi_\omega(z; z_k)$

$$\Pi_\omega'(z; z_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{A}_\omega'(z; z_k)}{\bar{A}_\omega(z; z_k)} \cdot \Pi_\omega(z; z_m).$$

Отсюда, учитывая (14), будем иметь

$$|\Pi_\omega'(z; z_k)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\bar{A}_\omega'(z; z_k)| \tag{43}$$

для всех z из единичного круга.

Как и при доказательстве теоремы 1 обозначим радиальное изменение произведения Π_ω в точке 0 следующим образом:

$$V(\Pi_\omega; 0) = \int_0^1 |\Pi_\omega'(r; z_k)|\, dr.$$

Отсюда, в силу (43), будем иметь

$$V(\Pi_\omega; 0) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 |\widetilde{A}_\omega'(r; z_k)|\, dr. \tag{44}$$

Оценим интеграл

$$K_\omega = \int_0^1 |\bar{A}_\omega'(r; z_k)|\, dr.$$

Очевидно, что

$$K_\omega \leq \int_0^1 |\bar{A}_1(r; \zeta)|\, dr +$$

$$+\int_0^1 |\widetilde{A}'_\infty(r;\zeta)-\widetilde{A}'_1(r;\zeta)|\,dr = K_\infty^{(1)}+K_\infty^{(2)}. \tag{45}$$

Поскольку

$$\Pi_1(z;z_k)=\prod_{k=1}^{\infty}|z_k|\,B(z;z_k)=c\cdot B(z;z_k),$$

то

$$K_\infty^{(1)}\leqslant\frac{c\pi}{2}\,|b_1(0;\zeta)-b_1(1;\zeta)|<$$

$$<c\pi A_0\cdot|C(\zeta;\omega)|\int_{|\zeta|}^{1}\omega(x)\,dx<$$

$$<c\,\pi A_0\,|C(\zeta;\omega)|\int_{|\zeta|^*}^{1}\omega(x)\,dx. \tag{46}$$

Для оценки $K_\infty^{(2)}$ заметим, что

$$\widetilde{A}_\infty(r;\zeta)-\widetilde{A}_1(r;\zeta)=\widetilde{A}_1(r;\zeta)\cdot[e^{\widetilde{U}_1(r;\zeta)-\widetilde{U}_\infty(r;\zeta)}-1].$$

Следовательно

$$\widetilde{A}'_\infty(r;\zeta)-\widetilde{A}'_1(r;\zeta)=A'_1(r;\zeta)\cdot[e^{\widetilde{U}_1(r;\zeta)-\widetilde{U}_\infty(r;\zeta)}-1]+$$

$$+\widetilde{A}_1(r;\zeta)\,e^{\widetilde{U}_1(r;\zeta)-\widetilde{U}_\infty(r;\zeta)}\,[\widetilde{U}'_1(r;\zeta)-\widetilde{U}'_\infty(r;\zeta)]. \tag{47}$$

Аналогичным образом, из (16) получим

$$|1-e^{\widetilde{U}_1(r;\zeta)-\widetilde{U}_\infty(r;\zeta)}|<|\widetilde{U}_\infty(r;\zeta)-\widetilde{U}_1(r;\zeta)|. \tag{48}$$

Теперь согласно (14), (16), (48)

$$|\widetilde{A}'_\infty(r;\zeta)-\widetilde{A}'_1(r;\zeta)|<|\widetilde{U}_1(r;\zeta)-\widetilde{U}_\infty(r;\zeta)|\cdot|\widetilde{A}'_1(r;\zeta)|+$$

$$+|\widetilde{U}'_\infty(r;\zeta)-\widetilde{U}'_1(r;\zeta)|. \tag{49}$$

Итак для $K_\infty^{(2)}$ имеем

$$K_\infty^{(2)}\leqslant\int_0^1|\widetilde{U}_1(r;\zeta)-\widetilde{U}_\infty(r;\zeta)|\,|\widetilde{A}'_1(r;\zeta)|\,dr+$$

$$+\int_0^1|\widetilde{U}'_\infty(r;\zeta)-\widetilde{U}'_1(r;\zeta)|\,dr=\bar{K}_\infty^{(2)}+\bar{\bar{K}}_\infty^{(2)}. \tag{50}$$

В силу (21) и (46) для первого слагаемого получим оценку

$$\widetilde{K}_{\omega}^{(2)} \leqslant c\,|\zeta|^{-2}\,|C(\zeta;\omega)|\cdot\int\limits_{|\zeta|^2}^{1}\omega(x)\,dx. \tag{51}$$

Теперь оценим второе слагаемое. Из (9) следует, что

$$\widetilde{U}_{\omega}(r;\zeta)-\widetilde{U}_{1}(r;\zeta)=\int\limits_{|\zeta|^2}^{1}\frac{\omega(x)-1}{x}\,dx+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\Delta_k}\left\{\int\limits_0^1\omega(x)\,x^{k-1}\,dx-\int\limits_0^1\omega(|\zeta|^2x)\,x^{k-1}\,dx\right\}\cdot(r\zeta)^k.$$

Отсюда в силу (10) имеем

$$\widetilde{U}_{\omega}(r;\zeta)-\widetilde{U}_{1}(r;\zeta)=\int\limits_{|\zeta|^2}^{1}\frac{\omega(x)-1}{x}\,dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^1\frac{\omega(x)-\omega(|\zeta|^2)\,x)}{x}\,\{S(r\zeta x;\omega)-1\}\,dx. \tag{52}$$

Вычислив производную, получим

$$|\widetilde{U}_{\omega}'(r;\zeta)-\widetilde{U}_{1}'(r;\zeta)|=\frac{|\zeta|}{2}\cdot\int\limits_0^1[\omega(x)-\omega(|\zeta|^2x)]\,|S'(r\zeta x;\omega)|\,dx. \tag{53}$$

Итак нам нужно оценить следующий интеграл:

$$\widetilde{K}_{\omega}^{(2)}=\frac{|\zeta|}{2}\int\limits_0^1[\omega(x)-\omega(|\zeta|^2x)]\,dx\int\limits_0^1|S'(r\zeta x;\omega)|\,dr. \tag{54}$$

Из (18) и (19) имеем

$$\widetilde{K}_{\omega}^{(2)}\leqslant 8\,|\zeta|\int\limits_0^1[\omega(x)-\omega(|\zeta|^2x)]\,dx+$$

$$+80\,|\zeta|\,\{1+|S(\zeta;\omega)|\}\int\limits_0^1[\omega(x)-\omega(|\zeta|^2x)]\,dx. \tag{55}$$

При этом

$$\int\limits_0^1[\omega(x)-\omega(|\zeta|^2x)]\,dx=\int\limits_0^1[\omega(x)-1]\,dx\,-$$

$$-\int_0^1 [\omega(|\zeta|^2 x)-1]\,dx = \int_{|\zeta|^2}^1 [\omega(x)-1]\,dx < \int_{|\zeta|^2}^1 \omega(x)\,dx, \tag{56}$$

откуда в силу (56), из (55) будем иметь

$$\bar{K}_\omega^{(2)} \leqslant 8\,|\zeta| \int_{|\zeta|^2}^1 \omega(x)\,dx + 160\,|\zeta|\,|C(\zeta;\omega)| \int_{|\zeta|^2}^1 \omega(x)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant c\cdot|\zeta|\cdot|C(\zeta;\omega)| \int_{|\zeta|^2}^1 \omega(x)\,dx. \tag{57}$$

Из неравенств (45,) (46), (50), (51) и (57), согласно условию (42), следует справедливость теоремы.

§ 3. Радиальные изменения произведений B_ω и Π_ω на единичной окружности

Теорема 3. *Пусть $\omega(x)\in\Omega_0$, тогда если последовательность комплексных чисел $\{z_k\}_1^\infty$ $(0<|z_k|\leqslant|z_{k+1}|<1)$ удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=1}^\infty \int_{|z_k|}^1 \omega(x)\,dx < +\infty \tag{58}$$

или

$$\sum_{k=1}^\infty \int_{|z_k|^2}^1 \omega(x)\,dx < +\infty, \tag{59}$$

то произведения B_ω и Π_ω при условиях (58) и (59) всюду на множестве $[0;\,2\pi]$ имеют конечные радиальные изменения, за исключением, быть может, множества $E\subset[0,2\pi]$, для которого $C_\omega^*(E)=0$.

Доказательство. Доказательство этой теоремы непосредственно следует из теоремы А.

Действительно, положив

$$\delta_k = \int_{|z_k|}^1 \omega(x)\,dx$$

или

$$\delta_k = \int_{|z_k|^2}^1 \omega(x)\,dx \quad (k=1,2,\cdots),$$

можем утверждать, что ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} |C(e^{-i\theta} z_k; \omega)| \int_{|z_k|}^{1} \omega(x)\, dx$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} |C(e^{-i\theta} z_k; \omega)| \int_{|z_k|^2}^{1} \omega(x)\, dx$$

соответственно при условии (58) и (59) могут расходиться на множестве $E \subset [0; 2\pi]$, для которого $C_\omega(E) = 0$, а это и означает, что на отрезке $[0; 2\pi]$, за исключением множества E, выполняются условия теорем 1 и 2.

Армянский государственный педагогический
институт им. Х. Абовяна

Поступила 26.I.1978

Լ. Ա. ՍԵԽՊՈՍՅԱՆ. Բլյաշկե-Ջրբաշյանի B_ω և Π_ω արտադրյալների շառավղային փոփոխությունը (*ամփոփում*)

Հոդվածում քննարկվում է տվյալ կետում B_ω և Π_ω արտադրյալների շառավղային փոփոխության հարցը։

Մասնավորապես ապացուցվում է, որ հետևյալ տիպի պայմանը

$$\sum_{k=1}^{\infty} |C(e^{-i\theta} z_k; \omega)| \int_{|z_k|^2}^{1} \omega(x)\, dx < +\infty; \quad \omega(x) \in \Omega_0$$

բավարար է, որպեսզի B_ω և Π_ω արտադրյալները $e^{i\theta}$ կետում ունենան վերջավոր շառավղային փոփոխություն։ Հոդվածի վերջում ապացուցվում է նաև միավոր շրջանագծի B_ω և Π_ω արտադրյալների շառավղային փոփոխության վերաբերյալ թեորեմ։

L. A. SEGPOSIAN. *Radial variations of B_ω and Π_ω Blaschke—Djrbashian products* (summary)

It is proved in the article, that if a sequence $\{z_k\}_1^\infty$ satisfies the condition

$$\sum_{k=1}^{\infty} |C(e^{-i\theta} z_k; \omega)| \int_{|z_k|^2}^{1} \omega(x)\, dx < +\infty; \quad \omega(x) \in \Omega_0$$

then the radial variance of the products B_ω and Π_ω at the point $e^{i\theta}$ are both finite.

It is proved also, that under a certain condition the B_ω and Π_ω products possess finite variance in every point of $[0; 2\pi]$, except, may be, for a set whose ω-capacity is equal zero.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Otto Frostman*. Sur les produits de Blaschke. Kungl. Fysiografiska Sälska pets hund Förhandlingar, 12, 1942, 169—182.
2. *М. М. Джрбашян*. Теория факторизации функций, мероморфных в круге, Мат. сб. 79 (121), 1969, 517—615.

3. В. С. Захарян. Радиальные пределы и радиальные изменения произведения $B_\alpha(z, z_n)$, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», III, № 1, 1968, 38—51.
4. Р. С. Галоян. О мероморфных функциях класса $N\{\omega\}$. Изв. АН Арм.ССР «Математика», VII, № 5, 1972, 334—360.
5. М. М. Джрбашян. О каноническом представлении мероморфных в единичном круге функций. ДАН Арм.ССР, 3, № 1, 1945.
6. М. М. Джрбашян. К проблеме представимости аналитических функций. Сообщ. инст. матем. и мех. АН Арм.ССР, 2, 1948, 3—40.
7. W. Rudin. The radial variation of analytic functions, Duke Mathematical journal 22, 1955, 235—242.
8. М. М. Джрбашян, В. С. Захарян. Граничные свойства подклассов мероморфных функций ограниченного вида, Изв. АН СССР, сер. матем., 34, 1970, 1262—1339.
9. М. М. Джрбашян, В. С. Захарян. Граничные свойства подклассов мероморфных функций ограниченного вида, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», VI, №№ 2—3 1971, 182—194.