ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XIV, № 4, 1979 Математика

Е. Я. МЕЛАМУД

РЕАЛИЗАЦИЯ ПОЗИТИВНЫХ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ ПО ДАРЛИНГТОНУ. ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ В СЛУЧАЕ ВЫРОЖДЕНИЯ

Эта работа примыкает к статье автора [1]. Пусть $z(\lambda)$ — рациональная матрица-функция n-го порядка класса **P** (см. [2]): $z(\lambda) + z^*(\lambda) \geqslant 0$ при $\operatorname{Re}\lambda > 0$ (позитивная матрица-функция). В [1] доказано, что $z(\lambda)$ представима в виде дробно-линейного преобразования

$$z(\lambda) = [a(\lambda) R + b(\lambda)][c(\lambda) R + d(\lambda)]^{-1}, \qquad (1)$$

где $R = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0_{n-m} \end{pmatrix}$, $m = \operatorname{rang}[z(\lambda) + z^*(-\bar{\lambda})]$, а матрица коэффициентов $A(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ c(\lambda) & d(\lambda) \end{pmatrix}$ — рациональная, J-растягивающая в правой полуплоскости и J-унитарная на мнимой оси, $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$. Такое представление $z(\lambda)$ называется реализацией по Дарлингтону (D-реализацией) ([3]).

В [1] построена одна из возможных D-реализаций $z(\lambda)$; в настоящей статье дается описание всего многообразия D-реализаций. Результат применяется, в частности, для получения необходимых и достаточных условий существования полиномиальной D-реализации.

Отметим, что в невырожденном случае ($m = n$) описание многообразия D-реализацией получено Д. З. Аровым [4]. Нас интересует случай вырождения ($0 < m < n$) (при этом, как и в [1], не ограничивая общности, будем считать, что главный минор порядка m матрицы $z(\lambda) + z^*(-\bar{\lambda})$, отличный от тождественного нуля, находится в ее левом верхнем углу).

§ 1. D-реализации матриц-функций класса P

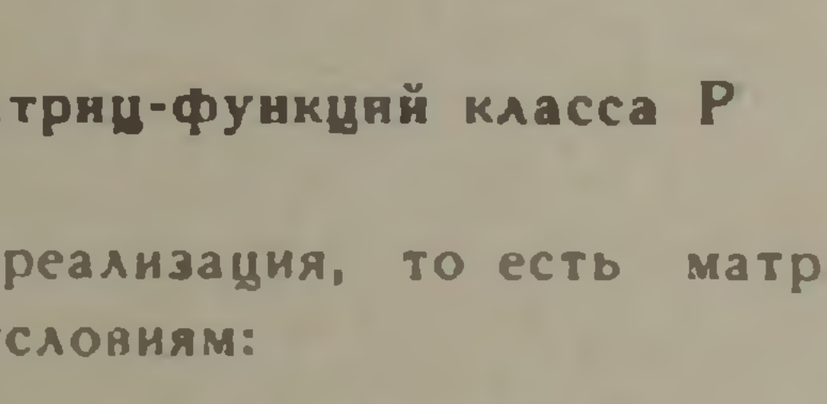
Пусть $z(\lambda) \in$ **P** и (1) — ее D-реализация, то есть матрица коэффициентов $A(\lambda)$ удовлетворяет условиям:

$$A^*(\lambda) JA(\lambda) - J \geqslant 0 \quad (\operatorname{Re}\lambda > 0), \qquad (2_1)$$

$$A^*(i\tau) JA(i\tau) - J = 0 \quad (\bar{\tau} = \tau). \qquad (2_2)$$

Положим

$$a(\lambda) R + b(\lambda) = p_r(\lambda), \; c(\lambda) R + d(\lambda) = q_r(\lambda). \qquad (3)$$



Поскольку

$$\frac{z(i)+z^*(i)}{2}-q_1^{-1*}(i)\,Rq_1^{-1}(i)=q_1^{-1*}(i)\,[RI]\frac{A^*(i)\,JA(i)-J}{2}\left|\begin{matrix}R\\I\end{matrix}\right|q_1^{-1}(i),$$

то из (2_1), (2_2) следует, что в правой полуплоскости

$$\frac{z(i)+z^*(i)}{2}\geqslant q_1^{-1*}(i)\,Rq_1^{-1}(i), \tag{4_1}$$

а на мнимой оси

$$\frac{z(i\tau)+z^*(i\tau)}{2}\equiv q_1^{-1*}(i\tau)\,Rq_1^{-1}(i\tau). \tag{4_2}$$

Отсюда ясно, что матрица-функция $Y(i)=[I_m\ 0]\,q_1^{-1}(i)$ регулярна в правой полуплоскости и является решением факторизационной задачи ([6])

$$\frac{z(i)+z^*(-\bar{i})}{2}=Y^*(-\bar{i})\,Y(i). \tag{4_3}$$

Рассмотрим матрицу $B(i)=jJA^{-1}(i)\,Jj$, $j=\begin{pmatrix}I_n & 0\\ 0 & -I_n\end{pmatrix}$ и положим

$$[p_X(i)\,q_X(i)]=[RI]\,B(i).$$

Так как

$$[RI]\,B(i)\,jJA(i)\left[\begin{matrix}R\\I\end{matrix}\right]=[RI]\,jJ\left[\begin{matrix}R\\I\end{matrix}\right]=0,$$

то $q_X(i)\,p_Y(i)=p_X(i)\,q_Y(i)$; из обратимости $q_Y(i)$ и $B(i)$ вытекает, что $q_X(i)$ обратима и

$$z(i)=p_Y(i)\,q_Y^{-1}(i)=q_X^{-1}(i)\,p_X(i). \tag{5}$$

Далее, поскольку

$$\frac{z(i)+z^*(i)}{2}-q_X^{-1}(i)\,Rq_X^{-1*}(i)=q_X^{-1}(i)\,[RI]\frac{B(i)\,J\,B^*(i)-J}{2}\times$$
$$\times\left|\begin{matrix}R\\I\end{matrix}\right|q_X^{-1*}(i),$$

то в правой полуплоскости

$$\frac{z(i)+z^*(i)}{2}\geqslant q_X^{-1}(i)\,Rq_X^{-1*}(i), \tag{4_3}$$

а на мнимой оси

$$\frac{z(i\tau)+z^*(i\tau)}{2}\equiv q_X^{-1}(i\tau)\,Rq_X^{-1*}(i\tau), \tag{4_4}$$

из чего следует, что матрица $X(i)=q_X^{-1}(i)\left[\begin{matrix}I_m\\0\end{matrix}\right]$ регулярна в правой полуплоскости и является решением факторизационной задачи

$$\frac{z(i)+z^*(-\bar{i})}{2} - X(i)\,X^*(-\bar{i}). \qquad (4_X)$$

Из (2_2) видно, что $JA^{-1}(i)\,J = A^*(-\bar{i})$ следовательно $B^*(-\bar{i}) = j\,A(i)\,j$, поэтому

$$p_X^*(-\bar{i}) = a(i)\,R - b(i),\quad q_X^*(-\bar{i}) = -c(i)\,R + d(i). \qquad (6)$$

Из (3) и (6) находим

$$a(i)R = \frac{p_Y(i)+p_X^*(-\bar{i})}{2},\quad b(i) = \frac{p_Y(i)-p_X^*(-\bar{i})}{2}, \qquad (7)$$

$$c(i)\,R = \frac{q_Y(i)-q_X^*(-\bar{i})}{2},\quad d(i) = \frac{q_Y(i)+q_X^*(-\bar{i})}{2}.$$

Введем обозначения:

$$r(i) = q_Y^{-1}(i)\,q_X^*(-\bar{i}),\quad L(i) = \begin{pmatrix} q_Y^{-1}(i) & -r(i) \\ 0 & I \end{pmatrix},\quad \mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I & -I \\ I & I \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

Тогда

$$L^*(i)\,\mathbf{U}^*\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}[A^*(i)\,JA(i) - J]\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\mathbf{U}\,L(i) =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{z(\lambda)+z^*(i)}{2} - q_Y^{-1*}(i)\,Rq_Y^{-1}(i) & q_Y^{-1*}(\lambda)\,Rr(i) - q_X^{-1}(i)\,R \\ r^*(\lambda)\,Rq_Y^{-1}(\lambda) - Rq_X^{-1*}(i) & R - r^*(i)\,Rr(\lambda) \end{pmatrix}, \qquad (9)$$

и отсюда, в частности, вытекает

$$r^*(i)\,Rr(i) \leqslant R \quad (Re\,\lambda > 0), \qquad (10_1)$$

$$r^*(i\tau)\,Rr(i\tau) \equiv R \quad (\bar{\tau} = \tau). \qquad (10_2)$$

Разобьем $q_X^{-1}(i)$ и $q_Y^{-1}(i)$ на блоки

$$q_X^{-1}(\lambda) = \begin{pmatrix} X_{11}(\lambda) & X_{12}(\lambda) \\ X_{21}(\lambda) & X_{22}(\lambda) \end{pmatrix},\quad q_Y^{-1}(\lambda) = \begin{pmatrix} Y_{11}(\lambda) & Y_{12}(\lambda) \\ Y_{21}(\lambda) & Y_{22}(\lambda) \end{pmatrix},$$

где $X_{11}(\lambda)$, $Y_{11}(\lambda)$ — квадратные матрицы порядка m. Из (4_X) и (4_Y) следуют равенства

$$Y_{11}^*(-\bar{\lambda})\,Y_{11}(\lambda) = X_{11}(\lambda)\,X_{11}^*(-\bar{\lambda}), \qquad (4_5)$$

$$Y_{11}^*(-\bar{\lambda})\,Y_{22}(\lambda) = X_{11}(\lambda)\,X_{21}^*(-\bar{\lambda}), \qquad (4_6)$$

$$Y_{12}^*(-\bar{\lambda})\,Y_{12}(\lambda) = X_{21}(\lambda)\,X_{21}^*(-\bar{\lambda}). \qquad (4_7)$$

Используя их и (10_2), находим

$$Rr(\lambda) = \begin{pmatrix} r_{11}(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \text{где}\ r_{11}(\lambda) = Y_{12}(\lambda)\,X_{11}^{-1*}(-\bar{\lambda}) = Y_{11}^{-1*}(-\bar{\lambda})\,X_{11}(\lambda).$$

Из (10_1) следует, что $r_{11}(\lambda)$ — сжимающая (следовательно, регулярная) в правой полуплоскости.

Впредь пару решений $X(\lambda) = \begin{vmatrix} X_{11}(\lambda) \\ X_{21}(\lambda) \end{vmatrix}$, $Y(\lambda) = [Y_{11}(\lambda) \quad Y_{12}(\lambda)]$ факторизационных задач (4_X), (4_Y), для которых $r_{11}(\lambda)$ регулярна при $Re\,\lambda > 0$, будем называть допустимой.

Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Если* $A(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ c(\lambda) & d(\lambda) \end{pmatrix}$ *— матрица коэффициентов D-реализации* (1) *матрицы-функции* $z(\lambda) \in \mathbf{P}$, *то матрицы* $X(\lambda) = [-Rc^*(-\bar{\lambda}) + d^*(-\bar{\lambda})]^{-1} \begin{vmatrix} I_m \\ 0 \end{vmatrix}$ *и* $Y(\lambda) = |I_m\ 0][c(\lambda)R + d(\lambda)]$ *— допустимая пара решений факторизационных задач* (4_X) *и* (4_Y).

Дадим теперь описание всех матриц $A(\lambda)$, отвечающих произвольной допустимой паре $X(\lambda)$, $Y(\lambda)$.

Теорема 2. *Пусть* $X(\lambda)$ *и* $Y(\lambda)$ *— произвольная допустимая пара решений факторизационных задач* (4_X) *и* (4_Y). *Каждая матрица коэффициентов* $A(\lambda)$ *D-реализации* $z(\lambda)$, *соответствующая этой паре, представима в виде*

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \dfrac{p_X(\lambda) + p_X^*(-\bar{\lambda})}{2} + a(\lambda)(I-R)\dfrac{p_Y(\lambda) - p_X^*(-\bar{\lambda})}{2} \\ \dfrac{q_Y(\lambda) - q_X^*(-\bar{\lambda})}{2} + c(\lambda)(I-R)\dfrac{q_1(\lambda) + q_X^*(-\bar{\lambda})}{2} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где

$$p_X(\lambda) = q_X(\lambda)\,z(\lambda),\ p_Y(\lambda) = z(\lambda)\,q_Y(\lambda),\ q_X(\lambda) = \begin{pmatrix} I & \beta_X(\lambda) \\ 0 & \delta_X(\lambda) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_{11}(\lambda) & 0 \\ X_{21}(\lambda) & I \end{pmatrix}^{-1},$$

$$q_Y(\lambda) = \begin{pmatrix} Y_{11}(\lambda) & Y_{12}(\lambda) \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} I & 0 \\ \beta_Y(\lambda) & \delta_Y(\lambda) \end{pmatrix},\ c(\lambda)(I-R) = \begin{pmatrix} 0 & c_{12}(\lambda) \\ 0 & c_{22}(\lambda) \end{pmatrix},$$

$$c_{12}(\lambda) = -Y_{11}^{-1}(\lambda)\,Y_{12}(\lambda)\,c_{22}(\lambda) + \frac{X_{11}^{-1*}(-\bar{\lambda})\,\beta_X(\lambda) - Y_{11}^{-1}(\lambda)\,\beta_Y^*(-\bar{\lambda})}{2}\,\delta_X^{-1}(\lambda), \quad (12)$$

$$a(\lambda)(I-R) = q_X^{-1}(\lambda)(I-R) + z(\lambda)\,c(\lambda)(I-R), \quad (13)$$

при этом выполнены следующие (необходимые и достаточные условия:

1) $\delta_X^*(-\bar{\lambda}) = \delta_Y(\lambda)$;

2) $c_{22}(\lambda)\,\delta_X(\lambda) + \delta_Y(\lambda)\,c_{22}^*(-\bar{\lambda}) + \dfrac{\beta_Y(\lambda)\,\beta_Y^*(-\bar{\lambda}) - \beta_X^*(-\bar{\lambda})\beta_X(\lambda)}{2} = 0$;

3) $q_{1X}(\lambda) = q_X(\lambda) - (I-R)\,c^*(-\bar{\lambda})$ *и* $q_{1Y}(\lambda) = q_Y(\lambda) + c(\lambda)(I-R)$

таковы, что $q_X^{-1}(\lambda)$, $q_Y^{-1}(\lambda)$ *и* $r_1(\lambda) = q_Y^{-1}(\lambda)\, q_X(-\bar{\lambda})$ *регулярны в полуплоскости* $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$;

4) $z(\lambda) + q_X^{-1}(\lambda)(I - R)\, q_Y^{-1}(\lambda) = z_1(\lambda) \in \mathbf{P}$.

Доказательство необходимости. Пусть $A(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ c(\lambda) & d(\lambda) \end{pmatrix}$ — матрица коэффициентов, отвечающая допустимой паре $X(\lambda)$, $Y(\lambda)$. Определив $q_X(\lambda)$, $q_Y(\lambda)$ согласно (3) и (6), введем матрицы

$$h_X(\lambda) = q_X(\lambda) \begin{pmatrix} X_{11}(\lambda) & 0 \\ X_{21}(\lambda) & I \end{pmatrix}, \quad h_Y(\lambda) = \begin{pmatrix} Y_{11}(\lambda) & Y_{12}(\lambda) \\ 0 & I \end{pmatrix} q_Y(\lambda). \tag{14}$$

Так как

$$q_1^{-1}(\lambda) = \begin{pmatrix} X_{11}(\lambda) & X_{12}(\lambda) \\ X_{21}(\lambda) & X_{22}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad q_Y^{-1}(\lambda) = \begin{pmatrix} Y_{11}(\lambda) & Y_{12}(\lambda) \\ Y_{21}(\lambda) & Y_{22}(\lambda) \end{pmatrix},$$

то $h_X(\lambda)$, $h_Y(\lambda)$ обратимы и имеют блочно-треугольный вид

$$h_X(\lambda) = \begin{pmatrix} I & \beta_X(\lambda) \\ 0 & \delta_X(\lambda) \end{pmatrix}, \quad h_Y(\lambda) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ \beta_Y(\lambda) & \delta_Y(\lambda) \end{pmatrix}, \tag{15}$$

поэтому $\delta_X(\lambda)$, $\delta_1(\lambda)$ обратимы.

Так как

$$\frac{q_Y(\lambda) - q_X^*(-\bar{\lambda})}{2} = c(\lambda)\, R, \text{ то } \delta_X^*(-\bar{\lambda}) = \delta_Y(\lambda).$$

Разбив $c(\lambda)$ на блоки $c(\lambda) = \begin{pmatrix} c_{11}(\lambda) & c_{12}(\lambda) \\ c_{21}(\lambda) & c_{22}(\lambda) \end{pmatrix}$, где $c_{11}(\lambda)$ имеет порядок m, найдем выражения для $c_{12}(\lambda)$ и $a(\lambda)(I-R)$. Для этого перепишем условие (2_2) в виде $A^*(-\bar{\lambda})\, JA(\lambda) = J$ и получим равенства:

$$(I - R)\,[a^*(-\bar{\lambda})\, c(\lambda) + c^*(-\bar{\lambda})\, a(\lambda)]\,(I - R) = 0, \tag{16$_1$}$$

$$(I - R)\,[a^*(-\bar{\lambda})\, c(\lambda) + (c^*(-\bar{\lambda})\, a(\lambda)]\, R = 0, \tag{16$_2$}$$

$$(I - R)\,[a^*(-\bar{\lambda})\, d(\lambda) + c^*(-\bar{\lambda})\, b(\lambda)] = I - R. \tag{16$_3$}$$

Из (16_2) и (16_3), учитывая связь между $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$, получим:

$$(I - R)\,[a^*(-\bar{\lambda})\, q_Y(\lambda) + c^*(-\bar{\lambda})\, p_1(\lambda)] = I - R,$$

$$[q_X(\lambda)\, a(\lambda) - p_X(\lambda)\, c(\lambda)](I - R) = I - R.$$

Приравнивая вытекающие отсюда два выражения для $a(\lambda)(I - R)$ (одно из них совпадает с (13)):

$$a(\lambda)(I - R) = [q_Y^{-1*}(-\bar{\lambda}) - z^*(-\bar{\lambda})\, c(\lambda)](I - R) = [q_X^{-1}(\lambda) + z(\lambda)\, c(\lambda)]\,(I - R), \tag{13$_1$}$$

получим

$$[z(\lambda) + z^*(-\bar{\lambda})]\, c(\lambda)(I-R) = [q_Y^{-1*}(-\bar{\lambda}) - q_X^{-1}(\lambda)]\,(I-R),$$

а с учетом (4_X), (4_Y), (14) и (15) отсюда следует:

$$Y_{11}(\lambda)\, c_{12}(\lambda) + Y_{12}(\lambda)\, c_{22}(\lambda) =$$

$$= Y_{11}(\lambda)\, \frac{X_{11}^{-1*}(-\bar{\lambda})\, \beta_X(\lambda)\, \delta_X^{-1}(\lambda) - Y_{11}^{-1}(\lambda)\, \beta_Y^*(-\bar{\lambda})\, \delta_Y^{-1*}(-\bar{\lambda})}{2},$$

откуда вытекает (12).

Из (16_1) и (13_1) получаем

$$(I-R)[q_Y^{-1}(\lambda)\; c(\lambda) + c^*(-\bar{\lambda})\, q_X^{-1}(\lambda)](I-R) = 0$$

или

$$[Y_{21}(\lambda)\; Y_{22}(\lambda)] \begin{vmatrix} c_{12}(\lambda) \\ c_{22}(\lambda) \end{vmatrix} + [c_{12}^*(-\bar{\lambda})\; c_{22}^*(-\bar{\lambda})] \begin{vmatrix} X_{12}(\lambda) \\ X_{22}(\lambda) \end{vmatrix} = 0,$$

что с учетом (14), (15) и (12) перепишется так:

$$\delta_Y^{-1}(\lambda)[-\beta_Y(\lambda)\; I] \begin{vmatrix} Y_{11}(\lambda)\, c_{12}(\lambda) + Y_{12}(\lambda)\, c_{22}(\lambda) \\ c_{22}(\lambda) \end{vmatrix} +$$

$$+ [c_{12}^*(-\bar{\lambda})\, X_{11}(\lambda) + c_{22}^*(-\bar{\lambda})\; X_{21}(\lambda)\, c_{22}^*(-\bar{\lambda})] \begin{vmatrix} -\beta_X(\lambda) \\ I \end{vmatrix} \delta_X^{-1}(\lambda) = 0$$

или с учетом (4_5), (4_6):

$$[-\beta_Y(\lambda)\; I] \begin{vmatrix} Y_{11}(\lambda)\, \dfrac{X_{11}^{-1*}(-\bar{\lambda})\, \beta_X(\lambda) - \beta_Y^*(-\bar{\lambda})}{2} \end{vmatrix} +$$

$$+ \left[\frac{\beta_X^*(-\bar{\lambda}) - \beta_Y(\lambda)\; Y_{11}^{-1*}(-\bar{\lambda})\, X_{11}(\lambda)}{2}\, \delta_Y(\lambda)\, c_{22}^*(-\bar{\lambda}) \right] \begin{bmatrix} -\beta_X(\lambda) \\ I \end{bmatrix} = 0.$$

Отсюда в виду (4_5) следует условие 2).

Учитывая (7), получаем для $A(\lambda)$ выражение (11), где $c_{12}(\lambda)$ и $a(\lambda)(I-R)$ определяются формулами (12), (13), а $c_{22}(\lambda)$ и блоки матриц $h_X(\lambda)$, $h_Y(\lambda)$ удовлетворяют условиям 1), 2).

Проверим теперь выполнение условий 3), 4).

Положим

$$A(\lambda) \begin{vmatrix} I \\ I \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_Y(\lambda) + a(\lambda)(I-R) \\ q_Y(\lambda) + c(\lambda)(I-R) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_{IY}(\lambda) \\ q_{IY}(\lambda) \end{vmatrix},$$

$$[I\; I]\, B(\lambda) = [p_X(\lambda) + (I-R)\, a^*(-\bar{\lambda})\; q_X(\lambda) - (I-R)\, c^*(-\bar{\lambda})] =$$

$$= [p_{IX}(\lambda)\; q_{IX}(\lambda)].$$

Очевидно, $q_{IX}(\lambda)\, p_{IY}(\lambda) = p_{IX}(\lambda)\, q_{IY}(\lambda)$. Из J-унитарности $A(\lambda)$ на мнимой оси вытекает, что $q_{IY}(\lambda)$ (а значит и $q_{IX}(\lambda)$) обратима, поэтому существует

$$p_{IY}(\lambda)\, q_{IY}^{-1}(\lambda) = q_{IX}^{-1}(\lambda)\, p_{IX}(\lambda) = z_I(\lambda).$$

Легко убедиться, что $z_1(\lambda)$ связана с $z(\lambda)$ равенствами

$$z_1(\lambda) = z(\lambda) + q_X^{-1}(\lambda)(I - R)\, q_{IV}^{-1}(\lambda) = z(\lambda) + q_{IX}^{-1}(\lambda)(I - R)\, q_1^{-1}(\lambda).$$

Так как

$$z_1(\lambda) = [a(\lambda) I + b(\lambda)][c(\lambda) I + d(\lambda)]^{-1}, \tag{17}$$

то

$$\frac{z_1(\lambda) + z_1^*(\lambda)}{2} - q_{IV}^{-1*}(\lambda)\; q_{II}^{-1}(\lambda) = q_{IV}^{-1*}(\lambda)\, \frac{A^*(\lambda) J A(\lambda) - J}{2}\, q_{IV}^{-1}(\lambda),$$

и из (2_1) следует, что $z_1(\lambda)$ — позитивная матрица-функция (условие 4)). Так как $\operatorname{rang} |z_1(\lambda) + z_1^*(-\bar{\lambda})] = n$, то из (2_1) и (2_2) следует, что (17) — D-реализация для $z_1(\lambda)$.

Теперь, рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 1, придем к выводу, что $q_{IX}^{-1}(\lambda)$ и $q_{IV}^{-1}(\lambda)$ регулярны в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > 0$ вместе с $r_1(\lambda) = q_{IV}^{-1}(\lambda)\, q_{IX}^{*}(-\bar{\lambda})$ (условие 3)).

Доказательство достаточности. Пусть $A(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ c(\lambda) & d(\lambda) \end{pmatrix}$ определена формулами (11), (12), (13) и выполнены условия 1)—4). Равенство (1) очевидно, поэтому нам остается убедиться в том, что $A(\lambda)$ удовлетворяет условиям (2_1) и (2_2).

Так как $c(\lambda) + d(\lambda) = q_{II}(\lambda)$, $d(\lambda) - c(\lambda) = q_{IX}^{*}(-\bar{\lambda})$, то

$$c(\lambda) = \frac{q_{IV}(\lambda) - q_{IX}^{*}(-\bar{\lambda})}{2},\quad d(\lambda) = \frac{q_{IV}(\lambda) + q_{IX}^{*}(-\bar{\lambda})}{2}. \tag{7_1}$$

Сделаем $q_{IX}(\lambda)\, z_1(\lambda) = p_{IX}(\lambda)$, $z_1(\lambda)\, q_{II}(\lambda) = p_{IV}(\lambda)$. Из условия 2) вытекает равенство $(I - R)[q_V^{-1}(\lambda)\, c(\lambda) + c^*(-\bar{\lambda}) q_X^{-1}(\lambda)](I - R) = 0$, из которого следует, что $q_X^{-1}(\lambda)(I - R)\, q_{II}^{-1}(\lambda) = q_{IX}^{-1}(\lambda)(I - R)\, q_V^{-1}(\lambda)$; учитывая это, (12), (4_5), и (4_6), получим: $a(\lambda) - b(\lambda) = p_{IX}^{*}(-\bar{\lambda})$. Совместно с очевидным равенством $a(\lambda) + b(\lambda) = p_{II}(\lambda)$ это приводит к соотношениям

$$a(\lambda) = \frac{p_{IV}(\lambda) + p_{IX}^{*}(-\bar{\lambda})}{2},\quad b(\lambda) = \frac{p_{II}(\lambda) - p_{IX}^{*}(-\bar{\lambda})}{2}. \tag{7_2}$$

Используя (7_1) и (7_2) и полагая $L_1(\lambda) = \begin{pmatrix} q_{IV}^{-1}(\lambda) & -r_1(\lambda) \\ 0 & I \end{pmatrix}$, находим

$$L_1^*(\lambda)\, \mathbf{U}^*\, [A^*(\lambda) J A(\lambda) - J]\, \mathbf{U}\, L_1(\lambda) =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{z_1(\lambda) + z_1^*(\lambda)}{2} - q_{IV}^{-1*}(\lambda)\, q_{II}^{-1}(\lambda) & q_{IV}^{-1*}(\lambda)\, r_1(\lambda) - q_{IX}^{-1}(\lambda) \\ r_1^*(\lambda)\, q_{II}^{-1}(\lambda) - q_{IX}^{-1*}(\lambda) & I - r_1^*(\lambda)\, r_1(\lambda) \end{pmatrix} =$$

$$= G(\lambda) - \Phi^*(\lambda)\, \Phi(\lambda),$$

где

$$G(\lambda) = Re\begin{pmatrix} z_l(\lambda) & -2q_{lX}^{-1}(\lambda) \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad \Phi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I & I \\ I & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -q_{lY}^{-1}(\lambda) & 0 \\ 0 & r_l(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Из условий 1), 2) и равенств (12), (4_5), (4_6) вытекают тождества

$$\frac{z_l(i\tau) + z_l^*(i\tau)}{2} \equiv q_{lY}^{-1*}(i\tau)\, q_{lY}^{-1}(i\tau) \equiv q_{lX}^{-1}(i\tau)\, q_{lX}^{-1*}(i\tau), \tag{18}$$

из которых следует, что

$$G(i\tau) - \Phi^*(i\tau)\,\Phi(i\tau) \equiv 0, \tag{19}$$

и поэтому выполняется условие (2_2), то есть $A(\lambda)$ J-унитарна на мнимой оси. Покажем теперь, что она J-растягивающая при $Re\,\lambda > 0$.

Допустим сначала, что $z_l(\lambda)$ не имеет мнимых полюсов. Тогда как видно из (18), их не имеют и матрицы-функции $q_{lX}^{-1}(\lambda)$, $q_{lY}^{-1}(\lambda)$, $r_l(\lambda)$. Из условий 3) и 4) ясно, что $G(\lambda)$ — гармоническая, а $\Phi^*(\lambda) \times \Phi(\lambda)$ — субгармоническая в правой полуплоскости (при этом обе они непрерывны при $Re\,\lambda \geqslant 0$). Так как субгармоническая матрица-функция $\Phi^*(\lambda)\Phi(\lambda)$ на границе области совпадает с гармонической матрицей-функцией $G(\lambda)$ (см. (19)), то, согласно принципу максимума, внутри области справедливо неравенство $G(\lambda) \geqslant \Phi^*(\lambda)\,\Phi(\lambda)$, из которого следует, что $A(\lambda)$ является J-растягивающей в правой полуплоскости (условие (2_1)).

Если $z_l(\lambda)$ имеет полюсы на мнимой оси, то она, как известно, ([5]) представима в виде

$$z_l(\lambda) = z_0(\lambda) + \tilde{z}_l(\lambda),$$

где $z_0(\lambda)$ и $\tilde{z}_l(\lambda)$ — позитивные матрицы-функции, причем $\tilde{z}_l(\lambda)$ не имеет мнимых полюсов, а $z_0(\lambda) + \dot{z}_0(-\bar{\lambda}) \equiv 0$.

Обозначим $\begin{pmatrix} I & z_0(\lambda) \\ 0 & I \end{pmatrix} = A_0(\lambda)$ и рассмотрим матрицу $\tilde{A}(\lambda) = A_0^{-1}(\lambda)\,A(\lambda)$. Очевидно

$$\tilde{A}(\lambda) = \begin{pmatrix} \dfrac{\tilde{p}_{lY}(\lambda) + \dot{\tilde{p}}_{lX}(-\bar{\lambda})}{2} & \dfrac{\tilde{p}_{lY}(\lambda) - \dot{\tilde{p}}_{lX}(-\bar{\lambda})}{2} \\ \dfrac{q_{lY}(\lambda) - \dot{q}_{lX}(-\bar{\lambda})}{2} & \dfrac{q_{lY}(\lambda) + \dot{q}_{lX}(-\bar{\lambda})}{2} \end{pmatrix},$$

где $\tilde{p}_{lX}(\lambda) = q_{lX}(\lambda)\,\tilde{z}_l(\lambda)$, $\tilde{p}_{lY}(\lambda) = \tilde{z}_l(\lambda)\,q_{lY}(\lambda)$, при этом

$$\frac{\tilde{z}_l(i\tau) + \dot{\tilde{z}}_l(i\tau)}{2} \equiv q_{lY}^{-1*}(i\tau)\,q_{lY}^{-1}(i\tau) \equiv q_{lX}^{-1}(i\tau)\,q_{lX}^{-1*}(i\tau).$$

Так как $\tilde{z}_l(\lambda)$ — позитивная без мнимых полюсов, то, по предыдущему, $\tilde{A}^*(\lambda)\,J\,\tilde{A}(\lambda) - J \geqslant 0$ при $Re\,\lambda > 0$. Остается заметить, что $A(\lambda) = A_0(\lambda)\,\tilde{A}(\lambda)$ — произведение двух J-растягивающих матриц-функций, и поэтому также является J-растягивающей при $Re\,\lambda > 0$.

Примечание. Из доказанного ясно, что каждой допустимой паре $X(\lambda)$, $Y(\lambda)$ отвечает столько D-реализаций $z(\lambda)$, сколько существует различных наборов матриц

$$c_{22}(\lambda),\ h_X(\lambda)=\begin{pmatrix} I & \beta_X(\lambda) \\ 0 & \delta_X(\lambda) \end{pmatrix},\ h_Y(\lambda)=\begin{pmatrix} I & 0 \\ \beta_Y(\lambda) & \delta_Y(\lambda) \end{pmatrix},$$

удовлетворяющих условиям 1)—4) теоремы 2. Впредь каждый такой набор матриц $c_{22}(\lambda)$, $h_X(\lambda)$, $h_Y(\lambda)$ будем называть реализующим набором.

§ 2. Полиномиальная D-реализация

Выясним условия, при которых среди D-реализаций рациональной позитивной матрицы-функции $z(\lambda)$ имеется реализация с полиномиальной матрицей коэффициентов $A(\lambda)$ (полиномиальная D-реализация). В невырожденном случае ($m = n$), как показано в [4], для существования полиномиальной D-реализации необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия:

1°. $[z(\lambda) + z^*(-\bar{\lambda})]^{-1}$ — полиноминальная;

2°. $z(\lambda)$ не имеет мнимых полюсов (здесь и в дальнейшем подразумеваются полюсы в *конечных* точках мнимой оси).

Мы рассмотрим случай вырождения ($0 < m < n$). Теперь условие 1° теряет смысл, а условие 2° не является необходимым. Так, например, позитивная матрица-функция $z(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{\lambda}{\lambda^2+1} \end{pmatrix}$ имеет полиномиальную D-реализацию

$$z(\lambda) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2+1 \end{pmatrix}\right]^{-1}.$$

Далее, в невырожденном случае полиномиальная D-реализация в существенном единственна (если $A_1(\lambda)$ и $A_2(\lambda)$ — матрицы двух полиномиальных D-реализаций, то $A_2(\lambda) = A_1(\lambda)\,T$, где T — постоянная матрица). В случае же вырождения это не так. Например

$$z(\lambda) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\lambda+1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

допускает две существенно различные полиномиальные D-реализации с матрицами

$$A_1(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A_2(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 1 & 0 \\ \lambda & \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Последнее объясняется тем, что если при $m = n$ мьтрица $A(\lambda)$ однозначно определяется допустимой парой решений $q_X^{-1}(\lambda)$, $q_Y^{-1}(\lambda)$ факторизационных задач (4_1) и (4_2) (при $R = 1$), то в случае вырождения одной допустимой паре решений $X(\lambda)$, $Y(\lambda)$ факторизационных задач (4_X), (4_Y) отвечает множество матриц $A(\lambda)$.

Теорема 3. *Если $z(\lambda)$ допускает полиномиальную D-реализацию (1), то $q_X^{-1}(\lambda) = |-Rc^*(-\bar{\lambda}) + d^*(-\bar{\lambda})|^{-1}$ и $q_Y^{-1}(\lambda) = [c(\lambda)R + d(\lambda)]^{-1}$ не вырождаются ни в одной точке правой полуплоскости (и, следовательно*

$$X(\lambda) = q_X^{-1}(\lambda)\left|\begin{matrix} I_m \\ 0 \end{matrix}\right| \text{ и } Y(\lambda) = [I_m\ 0]\, q_Y^{-1}(\lambda)$$

имеют полный ранг).

Действительно, так как $c(\lambda)$ и $d(\lambda)$ полиномиальные, то $q_X^{-1}(\lambda)$ и $q_Y^{-1}(\lambda)$ не вырождаются в точках, где они регулярны. По теореме 1 $X(\lambda)$ и $Y(\lambda)$ регулярны при $Re\,\lambda > 0$, поэтому регулярны $q_X^{-1}(\lambda)R$ и $Rq_Y^{-1}(\lambda)$. Регулярность же $q_X^{-1}(\lambda)(I-R)$ и $(I-R)q_Y^{-1}(\lambda)$ при $Re\,\lambda > 0$ непосредственно следует из (13_1).

Решения факторизационных задач (4_X), (4_Y), имеющие полный ранг в каждой точке правой полуплоскости, называются экстремальными. Экстремальное решение единственно с точностью до унитарного множителя ([6]).

Замечание. Имея в виду дальнейшее, отметим, что в случае $m = n$ условие 1° можно заменить таким равносильным условием:

$1^{\circ\circ}$. Экстремальные решения $q_X^{-1}(\lambda)$, $q_Y^{-1}(\lambda)$ факторизационных задач (4_1), (4_2) (при $R = I$) таковы, что $q_X(\lambda)$ и $q_Y(\lambda)$ — полиномиальные матрицы.

В случае вырождения имеет место

Теорема 4. *Для того чтобы $z(\lambda) \in \mathbf{P}$ допускала полиномиальную D-реализацию, необходимо и достаточно, чтобы по крайней мере для одной * пары экстремальных решений $X(\lambda)$, $Y(\lambda)$ факторизационных задач (4_X), (4_Y) существовал такой реализующий набор полиномиальных матриц $c_{22}(\lambda)$, $h_X(\lambda)$, $h_Y(\lambda)$, что:*

I. *$c_{12}(\lambda)$, $q_X(\lambda)$, $q_Y(\lambda)$ — полиномиальные;*

II. *$z_1(\lambda) = z(\lambda) + q_X^{-1}(\lambda)(I - R)q_Y^{-1}(\lambda)$ не имеет мнимых полюсов.*

Необходимость. Пусть (1) — полиномиальная D-реализация $z(\lambda)$ и $X(\lambda) = \left|\begin{matrix} X_{11}(\lambda) \\ X_{21}(\lambda) \end{matrix}\right|$, $Y(\lambda) = [Y_{11}(\lambda)\ Y_{12}(\lambda)]$ — соответствую-

* Если условия теоремы выполняются для одной экстремальной пары $X(\lambda)$, $Y(\lambda)$, то для любой другой экстремальной пары $X(\lambda)u$, $vY(\lambda)$ $(uu^* = v^*v = I)$ они также выполняются.

щие решения задач (4_X), (4_Y) (из теоремы 3 следует, что эти решения — экстремальные). Поскольку $A(i)$ имеет вид (11), то $q_X(i)$, $q_Y(i)$, $h_X(i)$, $h_Y(i)$, $c(i)(I-R)$ — полиномиальные матрицы.

Далее, как показано при доказательстве теоремы 2, равенство (17) есть D-реализация матрицы $z_l(i)$, а так как эта реализация полиномиальная и $\operatorname{rang}[z_l(i)+z_l^*(-\bar{i})]=n$, то $z_l(i)$ не имеет мнимых полюсов (условие 2^0).

Достаточность. Рассмотрим пару экстремальных решений $X(\lambda)$, $Y(i)$ и отвечающий ей реализующий набор полиномиальных матриц $c_{22}(i)$, $h_X(i)$, $h_Y(\lambda)$ и построим матрицу $A(i)$ по формулам (11), (12), (13). Из условия теоремы следует, что $q_{lX}(i)$ и $q_{lY}(i)$, а значит (в виду (7_1)) $c(\lambda)$ и $d(\lambda)$ — полиномиальные. Так как $z_l(\lambda)$ позитивная и не имеет мнимых полюсов, то $p_{lX}(i)=q_{lX}(i)z_l(i)$ и $p_{lY}(\lambda)=z_l(\lambda)q_{lY}(i)$ регулярны при $Re\,\lambda>0$. Из (18) следуют равенства

$$P_{lX}^*(-\bar{i})=q_{lX}^{-1}(i)[2\cdot I-p_{lX}(i)q_{lX}^*(-\bar{i})],$$

$$p_{lY}^*(-\bar{i})=[2\cdot I-q_{lY}^*(-\bar{i})p_{lY}(i)]q_{lY}^{-1}(i),$$

и так как $q_{lX}^{-1}(i)$ и $q_{lY}^{-1}(i)$ регулярны при $Re(i)>0$, то $p_{lX}(-i)$, $p_{lY}(-\lambda)$ также регулярны, а значит $p_{lX}(i)$, $p_{lY}(i)$ регулярны в полуплоскости $Re\,\lambda<0$. Таким образом, $p_{lX}(i)$ и $p_{lY}(i)$, а в виду (7_2) $a(i)$ и $b(i)$ — полиномиальные.

Остановимся теперь на одном простом достаточном условии существования полиномиальной D-реализации.

Теорема 5. *Пусть* $\dfrac{z(i)+z^*(-\bar{i})}{2}=\begin{pmatrix}M(i) & K(i)\\ K^*(-\bar{i}) & S(i)\end{pmatrix}$, *где* $M(i)$ *— невырожденный блок порядка* m.

Если $z(i)$ *не имеет мнимых полюсов, а* $M^{-1}(i)K(i)$ *и* $M^{-1}(i)$ *— полиномиальные, то полиномиальная* D*-реализация* $z(i)$ *существует.*

Пусть $X_{11}(i)$ и $Y_{11}(i)$ — экстремальные решения факторизационных задач

$$M(i)=X_{12}(i)X_{11}^*(-\bar{i}),\quad M(\lambda)=Y_{11}^*(-\bar{i})Y_{11}(i).$$

Положим

$$X_{21}(i)=K^*(-\bar{i})M^{-1*}(-\bar{i})X_{11}(i),\quad Y_{12}(i)=Y_{11}(i)M^{-1}(i)K(i),$$

$$X(i)=\begin{bmatrix}X_{11}(i)\\ X_{21}(i)\end{bmatrix}\quad\text{и}\quad Y(i)=[Y_{11}(i)\;\;Y_{12}(i)]$$

регулярны и имеют полный ранг в каждой точке правой полуплоскости. Так как $S(i)-K^*(-\bar{i})M^{-1}(i)K(i)=0$, то имеют место равен-

ства (4_X) и (4_Y). Таким образом, $X(\lambda)$ и $Y(\lambda)$ — экстремальная пара решений факторизационных задач (4_X), (4_Y). Этой паре отвечает реализующий набор $c_{22}(\lambda)=0$, $h_X(\lambda)=h_Y(\lambda)=I$ такой, что

$$c_{12}(\lambda)=0,\ q_X(\lambda)=\begin{pmatrix} X_{11}^{-1}(\lambda) & 0 \\ -K^*(-\bar{\lambda})\,M^{-1*}(-\bar{\lambda}) & I \end{pmatrix},$$

$$q_Y(\lambda)=\begin{pmatrix} Y_{11}^{-1}(\lambda) & -M^{-1}(\lambda)\,K(\lambda) \\ 0 & I \end{pmatrix},\ z_1(\lambda)=z(\lambda)+I-R.$$

Так как $X_{11}(\lambda)$ и $Y_{11}(\lambda)$ регулярны и не вырождаются в правой полуплоскости, а $M^{-1}(\lambda)$ — полиномиальная, то

$X_{11}^{-1}(\lambda)$, $Y_{11}^{-1}(\lambda)$, $X_{11}^{-1}(-\lambda)=X_{11}^{*}(\bar{\lambda})\,M^{-1*}(\bar{\lambda})$, $Y_{11}^{-1}(-\lambda)=M^{-1*}(\bar{\lambda})\,Y_{11}^{*}(\bar{\lambda})$

при $Re\,\lambda\geqslant 0$ не имеют полюсов, а значит $X_{11}^{-1}(\lambda)$, $Y_{11}^{-1}(\lambda)$, а с ними и $q_X(\lambda)$, $q_Y(\lambda)$ — полиномиальные (условие I). Условие II очевидно.

Примечание. Если $M^{-1}(\lambda)\,K(\lambda)$ — полиномиальная, а $M^{-1}(\lambda)$ — не полиномиальная матрица, то полиномиальная D-реализация невозможна.

§ 3. D-реализации матриц-функций класса P_{clr}

В приложениях, в частности в теории цепей ([2]), особый интерес представляют позитивные матрицы-функции $z(\lambda)$ класса P_{clr}, т. е. удовлетворяющие условиям вещественности $(\bar{z}(\bar{\lambda})=z(\lambda))$ и симметричности $(z'(\lambda)=z(\lambda))$. В этом случае представление (1) называют D-реализацией, если $A(\lambda)$ — реактивная матрица-функция класса $\mathfrak{M}_{clr}$, т. е. кроме (2_1) и (2_2) обладает свойствами

$$\bar{A}(\bar{\lambda})=A(\lambda)\quad\text{(вещественность)},\qquad (2_3)$$

$$A'(\lambda)\,jJA(\lambda)=jJ\ \text{(симплектичность)}.\qquad (2_4)$$

Из (2_2)—(2_4) следует равенство $A(-\lambda)=jA(\lambda)\,j$, поэтому $a(\lambda)$ и $d(\lambda)$ — четные, а $b(\lambda)$ и $c(\lambda)$ — нечетные матрицы-функции. Отсюда, в частности, следует, что $q_X^{*}(\bar{\lambda})=q_Y(\lambda)=q(\lambda)$ — вещественная и $Y(\lambda)=[I_m\ 0]\,q^{-1}(\lambda)$ — вещественное допустимое решение факторизационной задачи

$$\frac{z(\lambda)+z(-\lambda)}{2}=Y'(-\lambda)\,Y(\lambda)\qquad (20)$$

(при этом $r_{11}(\lambda)=Y_{11}(\lambda)\,Y_{11}^{-1}(-\lambda)$).

Справедлива следующая

Теорема 2′. *Пусть* $z(\lambda)\in P_{clr}$, $\operatorname{rang}[z(\lambda)+z(-\lambda)]=m$, $Y(\lambda)=[Y_{11}(\lambda)\ \ Y_{12}(\lambda)]$ — *произвольное вещественное допустимое решение факторизационной задачи* (20). *Каждая матрица коэффициентов* $A(\lambda)$ D-*реализации* $z(\lambda)$, *соответствующая этому решению, представима в виде*

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} \dfrac{p(\lambda)+p(-\lambda)}{2} & +a(\lambda)(I-R)\dfrac{p(\lambda)-p(-\lambda)}{2} \\ \dfrac{q(\lambda)-q(-\lambda)}{2}+c(\lambda)(I-R) & \dfrac{q(\lambda)+q(-\lambda)}{2} \end{pmatrix},$$

где

$$p(\lambda)=z(\lambda)\,q(\lambda),\quad q(\lambda)=\begin{pmatrix} Y_{11}(\lambda) & Y_{12}(\lambda) \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} I & 0 \\ \beta(\lambda) & \delta(\lambda) \end{pmatrix},$$

$$c(\lambda)(I-R)=\begin{pmatrix} 0 & c_{12}(\lambda) \\ 0 & c_{22}(\lambda) \end{pmatrix},$$

$$c_{12}(\lambda)=-Y_{11}^{-1}(\lambda)\,Y_{12}(\lambda)\,c_{22}(\lambda)+\frac{Y_{11}^{-1}(-\lambda)\beta'(\lambda)-Y_{11}^{-1}(\lambda)\beta'(-\lambda)}{2}\,\delta'^{-1}(\lambda),$$

$$a(\lambda)(I-R)=q'^{-1}(\lambda)(I-R)+z(\lambda)\,c(\lambda)(I-R),$$

при этом выполнены следующие (необходимые и достаточные) условия:

1′) *Все матрицы вещественны*: $\delta(-\lambda)=\delta(\lambda)$; $c_{22}(-\lambda)=-c_{22}(\lambda)$;

2′) *Матрица* $c_{22}(\lambda)\,\delta'(\lambda)+\dfrac{\beta(\lambda)\beta'(-\lambda)}{2}$ — *симметрическая*;

3′) $q_1^{-1}(\lambda)=[q(\lambda)+c(\lambda)(I-R)]^{-1}$ *и* $r_1(\lambda)=q_1^{-1}(\lambda)\,q_1(-\lambda)$ *регулярны в полуплоскости* $Re\,\lambda>0$;

4′) $z(\lambda)+q'^{-1}(\lambda)(I-R)\,q_1^{-1}(\lambda)=z_1(\lambda)\in \mathbf{P}_{nn}$.

На соответствующей модификации теоремы 4 мы не останавливаемся, так как она очевидна.

Одесский технологический институт
холодильной промышленности

Поступила 15.VI.1976

Ե. Յա. ՄԵԼԱՄՈՒԴ. Ըստ Դարլինգտոնի դրական մատրից-ֆունկցիաների իրագործումը բազմանդամային իրագործումը վերասերման դեպքում (ամփոփում)

Հոդվածում տրվում է ըստ Դարլինգտոնի ամբողջական $z(\lambda)$ մատրից-ֆունկցիայի բոլոր իրագործումների նկարագրությունը $\det[z(\lambda)+z^*(-\bar{\lambda})]\not\equiv 0$ պայմանի դեպքում։ Ստացված արդյունքները կիրառվում են բազմանդամային իրագործման գոյության անհրաժեշտ և բավարար պայմանների ստացման համար։

E. Y. MELAMUD. *Realization of positive matrix-functions after Darlington. Polynomial realization in case of degeneration* (summary)

The description of all rational positive matrix-function realizations after Darlington is given under the condition that

$$\det[z(\lambda)+z^*(-\bar{\lambda})]\not\equiv 0.$$

The results are used to obtain necessary and sufficient conditions for existence of polynomial realization.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Е. Я. Меламуд.* Об одном обобщении теоремы Дарлингтона. Изв. АН Арм.ССР, сер. «Математика», VII, № 3, 1972, 183—195.
2. *А. В. Ефимов, В. П. Потапов.* J-растягивающие матрицы-функции и их роль в аналитической теории электрических цепей, УМН, XXVIII, вып. 1 (169), 1973, 65—130.
3. *S. Darlington.* Synthesis of Reactance 4-Poles, J. Math. and Phys., 18, 1939 257—353.
4. *Д. З. Аров.* Реализация канонической системы с диссипативным граничным условием на одном конце сегмента по коэффициенту динамической податливости. Сибирский матем. журнал, XVI, № 3, 1975, 440—463.
5. *W. Cauer.* Theorie der linearen Wechselstromschaltungen, Berlin, 1954.
6. *Ю. А. Розанов.* Стационарные случайные процессы, Ф.—М., 1963, 63—66.