Г. Г. ЭМИН

ПРЕДМНОГООБРАЗИЯ, ГРУППОИД МНОГООБРАЗИЙ И СТРОГИЕ РАДИКАЛЫ В КАТЕГОРИИ МОДУЛЕЙ НАД ВСЕМИ КОЛЬЦАМИ

Рассматривается категория $\mathfrak{M}$, объектами которой являются всевозможные пары (A, U) , где U — ассоциативное кольцо, A — правый U -модуль, в общем случае не унитарный, а множество морфизмов модуля (A, U) в модуль (B, V) состоит из пар отображений $\varphi = (\varphi_A, \varphi_U)$, где φ_A (соответственно φ_U) — гомоморфизм группы A в группу B (кольца U в кольцо V), причем $(a \cdot u) \varphi_A = a \varphi_A \cdot u \varphi_U$, $a \in A$, $u \in U$. Такая пара отображений называется гомоморфизмом модуля (A, U) в модуль (B, V) . Идея этой категории появилась в неявном виде еще тогда, когда стали рассматривать превращения V -модулей в U -модули отступлением вдоль кольцевого гомоморфизма $\varphi: U \rightarrow V$. В книге [5] на стр. 35 наряду с категориями модулей над фиксированными кольцами, в качестве одного из основных примеров, приводится категория $\mathfrak{M}$. В работе [8] изучались короткие точные последовательности в категории $\mathfrak{M}$, а в [10] описывались радикалы в некоторой модификации этой категории. Имеется также взаимосвязь с некоторыми из тех категорий пар, которые изучали Б. И. Плоткин и его ученики (см., например, [3], § 2).

В 1958 году академик А. И. Мальцев ввел понятие рефлексивной подкатегории (см. [2], гл. IV, § 4). О важности этого понятия говорит число работ, появившихся с тех пор по этому вопросу.

В настоящей работе изучаются специальные классы рефлексивных подкатегорий категории $\mathfrak{M}$, а именно, предмногообразия, то есть рефлексивные подкатегории, замкнутые относительно подобъектов многообразия, то есть предмногообразия, замкнутые относительно нормальных эпиморфизмов, строгие радикалы в смысле А. Г. Куроша (легко проверить, что полупростые классы для строгих радикалов являются предмногообразиями, а классы радикальных объектов для таких же радикалов дают нам примеры копредмногообразий) и кручения. Теоремы, которые доказаны в данной работе, носят следующий характер: вопрос об изучении некоторого класса рефлексивных подкатегорий категории $\mathfrak{M}$ сводится к изучению системы соответствующих классов рефлексивных подкатегорий в категории ассоциативных колец и в некоторых категориях $\mathfrak{M}$ правых U -модулей над фиксированным ассоциативным кольцом U , причем эти системы рефлексивных подкатегорий удовлетворяют соответствующим условиям согласован-

ности. Кроме того, в работе описаны все насыщенные многообразия категории $\mathfrak{M}$ и найдена формула умножения таких многообразий. Оказалось, что насыщенные многообразия составляют подполугруппу $Se(\mathfrak{M})$ в группоиде $Gr(\mathfrak{M})$, всех многообразий категории $\mathfrak{M}$. Ни $Gr(\mathfrak{M})$, ни $Se(\mathfrak{M})$ не являются свободными. $Gr(\mathfrak{M})$ не является группоидом с левым или правым сокращением. В $Se(\mathfrak{M})$, а следовательно, и в $Gr(\mathfrak{M})$ имеются делители нуля и нильпотентные элементы. Доказано, что совокупности всех предмногообразий категории абелевых групп и категории $\mathfrak{M}$ не являются множествами. В категории $\mathfrak{M}$ имеется класс бикатегорных структур.

Известно, что если в любой категории брать произведение трех многообразий, третье из которых является бимногообразием, то в этом случае операция умножения многообразий будет ассоциативной. Возникал вопрос, будет ли иметь место ассоциативность, если бимногообразие брать не на третьем месте, а в середине, или же в начале произведения? Ответ отрицательный. В категории $\mathfrak{M}$ построен пример, который показывает, что если даже на первых двух местах стоит одно и то же идемпотентное бимногообразие, все равно, в общем случае ассоциативности не будет.

§ 1. Предмногообразия, многообразия и группоид многообразий

Пусть $\mathbf{K}$ — категория, удовлетворяющая следующим условиям: 1. $\mathbf{K}$ — нормальная категория, 2. $\mathbf{K}$ — локально малая справа бикатегория с нормальными кообразами и с ядерными парами морфизмов, 3. $\mathbf{K}$ — категория с прямыми произведениями.

Полная подкатегория $\mathbf{K}$, замкнутая относительно подобъектов и прямых произведений, называется предмногообразием категории $\mathbf{K}$ ([2], стр. 216).

Пусть $\mathbf{P}^{(1)}$ и $\mathbf{P}^{(2)}$ — два предмногообразия категории $\mathbf{K}$. Обозначим через $\mathbf{P}^{(1)}\mathbf{P}^{(2)}$ полную подкатегорию $\mathbf{K}$, порожденную всеми объектами $A \in \mathbf{K}$, для каждого из которых существует по крайней мере одна такая точная последовательность

$$A^{(2)} \xrightarrow{\mu} A \xrightarrow{\nu} A^{(1)},$$

что $A^{(2)} \in \text{Ob } \mathbf{P}^{(2)}$ и $A^{(1)} \in \text{Ob } \mathbf{P}^{(1)}$. Эта полная подкатегория является предмногообразием категории $\mathbf{K}$ (см. [2], стр. 217), называемым произведением предмногообразий $\mathbf{P}^{(1)}$ и $\mathbf{P}^{(2)}$.

Рассмотрим действие кольцевого гомоморфизма $\varphi: U \rightarrow V$. Любой правый V -модуль A становится правым U -модулем, если действие операторов определить следующим образом: $a \circ u = a(u\varphi)$; мы будем говорить, что модуль A превращен в U -модуль A_φ отступлением вдоль φ .

Обозначим категорию абелевых групп — $\mathbf{Ab}$, категорию ассоциативных колец — $\mathbf{As}$, категорию правых U -модулей — $\mathfrak{M}_U$. Категория $\mathfrak{M}$ и категории $\mathfrak{M}_U$ ($U \in \mathbf{As}$), $\mathbf{Ab}$ и $\mathbf{As}$ удовлетворяют всем условиям, наложенным на категорию $\mathbf{K}$ ([1], § 1).

Пусть U — некоторое ассоциативное кольцо, не обязательно с единицей, P_U — некоторое предмногообразие категории $\mathfrak{M}_U$ правых U -модулей, а L — некоторое предмногообразие категории $\mathfrak{A}b$. Легко проверить, что все U -модули $A \in P_U$ такие, что абелева группа $A \in L$, составляют предмногообразие в P_U и, следовательно, в $\mathfrak{M}_U$. Это предмногообразие назовем ограничением предмногообразия P_U по предмногообразию L и обозначим $P_{U,L}$.

Пусть P — некоторое предмногообразие категории $\mathfrak{M}$. Точно так же, как это делалось для многообразий при доказательстве теоремы 2.2 работы [1], можно показать, что все абелевы группы A такие, что для некоторого ассоциативного кольца U , модуль $(A, U) \in P$, составляют некоторое предмногообразие L в категории $\mathfrak{A}b$, все ассоциативные кольца U такие, что для некоторой абелевой группы A модуль $(A, U) \in P$, составляют некоторое предмногообразие P_A в категории $\mathfrak{A}s$ и все модули $(A, U) \in P$, где кольцо $U \in P_A$, зафиксировано, составляют некоторое предмногообразие P_U категории $\mathfrak{M}_U$. Получили некоторую систему предмногообразий $S = \{P_{U,L} | U \in P_A\}$.

Лемма 1.1. Полученная система предмногообразий $S = \{P_{U,L} | U \in P_A\}$ удовлетворяет следующим условиям:

а) Если U -модуль $A \in P_{U,L}$, где $P_{U,L} \in S$, $\mu: V \rightarrow U$ — мономорфизм в категории $\mathfrak{A}s$, а (A_1, V) — превращение U -модуля A в V -модуль A_1 отступлением вдоль μ , то V -модуль A_1 принадлежит предмногообразию $P_{V,L} \in S$ (ясно, что кольцо $V \in P_A$);

б) если модуль $(A, U) \in P_{U,L}$, а модуль $(B, W) \in P_{W,L}$, где $P_{U,L}$ и $P_{W,L}$ принадлежат S , то прямое произведение этих модулей $(A \times B, U \times W)$ принадлежит предмногообразию $P_{U \times W, L} \in S$ (ясно, что кольцо $U \times W \in P_A$).

Доказательство. Пусть модуль $(A, U) \in P_{U,L}$, где $P_{U,L} \in S$ и $\mu: V \rightarrow U$ — мономорфизм в категории $\mathfrak{A}s$. Тогда модуль $(A, U) \in P$. Рассмотрим V -модуль A_1 . Так как отображение $(1, \mu): (A_1, V) \rightarrow (A, U)$ является мономорфизмом в категории $\mathfrak{M}$, то модуль $(A_1, V) \in P$. Значит, V -модуль $A_1 \in P_{V,L}$, где $P_{V,L} \in S$.

Пусть модуль $(A, U) \in P_{U,L}$, а модуль $(B, W) \in P_{W,L}$. Эти модули принадлежат предмногообразию P , поэтому прямое произведение этих модулей $(A \times B, U \times W) \in P$. Значит $U \times W$ -модуль $A \times B \in P_{U \times W, L}$, где $P_{U \times W, L} \in S$. Лемма 1.1 доказана.

Рассмотрим систему предмногообразий $S = \{P_{U,L} | U \in P_A\}$, где P_A — некоторое предмногообразие категории $\mathfrak{A}s$, L — некоторое предмногообразие категории $\mathfrak{A}b$, а $P_{U,L} (U \in P_A)$ — ограничение некоторого предмногообразия P_U категории $\mathfrak{M}_U$ по предмногообразию L . Систему предмногообразий $S = \{P_{U,L} | U \in P_A\}$, удовлетворяющую условиям а) и б) леммы 1.1, назовем согласованной системой предмногообразий (ССП). Очевидно, что существуют такие системы предмногообразий, которые не являются согласованными.

Пусть S — некоторая ССП. Рассмотрим полную подкатегорию $P(S)$ категории $\mathfrak{M}$, объектами которой являются всевозможные модули $(A, U) \in P_{U,L}$ ($P_{U,L} \in S$), при всевозможных $U \in P_{\Lambda_S}$.

Лемма 1.2. *Полная подкатегория $P(S)$, порожденная согласованной системой предмногообразий S , является предмногообразием категории $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Пусть модуль $(A, U) \in P(S)$, то есть $(A, U) \in P_{U,L}$ ($P_{U,L} \in S$), а $\mu = (\mu_B, \mu_V): (B, V) \rightarrow (A, U)$ — мономорфизм в категории $\mathfrak{M}$. U -модуль A отступлением вдоль μ_V превращается в V -модуль A_μ , который принадлежит предмногообразию $P_{V,L} \in S$, в силу согласованности системы S . Отображение $(\mu_B, 1_V): (B, V) \rightarrow (A_\mu, V)$ является мономорфизмом в категории правых V -модулей $\mathfrak{M}_V$, поэтому V -модуль $B \in P_{V,L}$, где $P_{V,L} \in S$. Следовательно, подмодуль (B, V) также принадлежит подкатегории $P(S)$.

Пусть дано некоторое семейство модулей $(A_i, U_i) \in P(S)$, $i \in I$. Покажем, что прямое произведение модулей этого семейства

$$(\prod_{i \in I} A_i, \prod_{i \in I} U_i) = (A, U)$$

также принадлежит подкатегории $P(S)$. Ясно, что абелева группа $A \in L$, а кольцо $U \in P_{\Lambda_S}$. Ясно также, что если кольцо $W \in P_{\Lambda_S}$, то нулевой модуль $(0, W) \in P_{W,L}$, где $P_{W,L} \in S$. Значит, из условия б) леммы 1.1 следует, что для любого $i \in I$, U -модуль

$$(A_i^0, U) = (0 \times \dots \times A_i \times 0 \times \dots, \prod_{j \in I} U_j) = ((\prod_{j < i} A_j \times \prod_{j > i} A_j), \prod_{j \in I} U_j),$$

где $A_j = 0$, если $j \neq i$, принадлежит предмногообразию $P_{U,L} \in S$. Так как $P_{U,L}$ — предмногообразие в категории $\mathfrak{M}_U$ правых U -модулей, то прямое произведение (рассматриваемое в категории $\mathfrak{M}_U$) этих всех U -модулей A_i^0 также должно принадлежать предмногообразию $P_{U,L} \in S$. Очевидно, что это прямое произведение совпадает с модулем $(A, U) = (\prod_{i \in I} A_i, \prod_{i \in I} U_i)$. Значит, модуль $(A, U) \in P(S)$. Лемма 1.2 доказана.

Из этих двух лемм следует

Теорема 1.1. *Любое предмногообразие P категории $\mathfrak{M}$ однозначно определяет согласованную систему предмногообразий S . Каждая согласованная система предмногообразий S однозначно определяет предмногообразие $P(S)$ в категории $\mathfrak{M}$. Эти сопоставления — взаимно обратные.*

Пусть $S_1 = \{P_{U_i, L_i}^{(1)} | U_i \in P_{\Lambda_S}^{(1)}\}$ и $S_2 = \{P_{U_i, L_i}^{(2)} | U_i \in P_{\Lambda_S}^{(2)}\}$ — две ССП. Возьмем некоторое кольцо $U \in P_{\Lambda_S}^{(1)} \cdot P_{\Lambda_S}^{(2)}$ и рассмотрим полную подкатегорию $P_{U, L_1, L_2}^{(1,2)}$ категории $\mathfrak{M}_U$, порожденную всеми теми U -модулями (A, U) , для каждого из которых существует по крайней мере одна такая точная последовательность

$$(B, V) \longrightarrow (A, U) \longrightarrow (C, W),$$

что $(B, V) \in P_{V, L_1}^{(2)}$, а $(C, W) \in P_{W, L_2}^{(1)}$, где $P_{V, L_1}^{(2)} \in S_2$, а $P_{W, L_2}^{(1)} \in S_1$.
 Когда U пробегает все $P_{AS}^{(1)} \cdot P_{AS}^{(2)}$, мы получаем систему

$$S_{1,2} = \{P_{U, L_1, L_2}^{(1,2)} | U \in P_{AS}^{(1)} \cdot P_{AS}^{(2)}\}$$

полных подкатегорий категорий $\mathfrak{X}_U$. С другой стороны, произведение предмногообразий $P(S_1)$ и $P(S_2)$ является предмногообразием в $\mathfrak{X}$, поэтому существует такая ССП S , что $P(S_1) \cdot P(S_2) = P(S)$. Из построения системы $S_{1,2}$ и определения произведения предмногообразий следует, что системы полных подкатегорий S и $S_{1,2}$ совпадают. Так как S — ССП, то и $S_{1,2}$ — ССП.

Предложение 1.1. Произведение двух предмногообразий $P(S_1)$ и $P(S_2)$ категории $\mathfrak{X}$ определяется по формуле $P(S_1) \times P(S_2) = P(S_{1,2})$.

Пусть Y — класс групп. Тогда SY есть класс всех подгрупп, SY есть класс всех декартовых произведений Y — групп, C_0RY — класс всех групп, аппроксимирующихся Y -группами.

Если Y — произвольный класс групп, $X(Y)$ — порожденное им предмногообразие, то $X(Y) = SCY = C_0R \cdot SY$.

Лемма 1.3. Совокупность всех предмногообразий категории абелевых групп не является множеством.

Доказательство. Известно, [4], что для всякой бесконечной мощности m существует 2^m неизоморфных подпрямо неразлагающихся абелевых групп без кручения, каждая из которых имеет мощность m . Выберем для каждой мощности m абелеву группу A_m такого вида и рассмотрим предмногообразие $X(A_m)$, порожденное этой группой. Пусть мощность $m < n$. Так как $X(A_m) = C_0R \cdot S[A_m]$, то каждая $X(A_m)$ -группа аппроксимируется подгруппами группы A_m , а так как A_n — подпрямо неразлагающаяся абелева группа, мощность которой больше мощности группы A_m , то группа $A_n \notin X(A_m)$. Получили, что $X(A_m) \neq X(A_n)$. Лемма 1.3 доказана.

Теорема 1.2. Связность всех предмногообразий категории $\mathfrak{X}$ не является множеством.

Доказательство. Пусть L — некоторое предмногообразие категории абелевых групп, а $\{0\}$ — тривиальное предмногообразие категории As . Рассмотрим согласованную „систему“ предмногообразий $\{X_{O,L} | O \in \{0\}\}$, где $X_{O,L}$ — это совокупность всех тех O -модулей A , для которых абелева группа $A \in L$. Очевидно, что для различных предмногообразий L категории Ab получаются различные предмногообразия категории $\mathfrak{X}$ выше рассмотренного вида. Из леммы 1.3 следует, что теорема 1.2 доказана.

Рассмотрим теперь многообразия категории $\mathfrak{X}$. Если предмногообразие P категории $\mathfrak{X}$ является многообразием N категории $\mathfrak{X}$,

то вместо системы предмногообразий $S = \{P_{U, L} \mid U \in \mathcal{P}_{\mathbf{Ab}}\}$ мы получим систему многообразий $S = \{N_{V_T(U), L(n)} \mid U \in T\}$ (см. [1], доказательство теоремы 2.2), где $L(n)$ (n — неотрицательное целое число) — многообразие категории $\mathbf{Ab}$, определяемое тождеством $nx = 0$, T и T' — такие многообразия категории $\mathbf{As}$, что $T' \subseteq T \cap T(n)$, где $T(n)$ — многообразие категории $\mathbf{As}$, определяемое тождеством $nx = 0$, $V_T(U)$ — значение вербала V_T многообразия T' на кольце U , а $N_{V_T(U), L(n)} (U \in T)$ — ограничение по многообразию $L(n)$ многообразия $N_{V_T(U)}$ категории $\mathcal{M}_U$ определяемое идеалом $V_T(U)$ кольца U . Очевидно, что полученная система многообразий удовлетворяет условиям а) и б) леммы 1.1.

Пусть $\theta: U \rightarrow W$ — гомоморфизм колец. Тогда для любого модуля (A, U) подмодуль $(A \cdot \text{Ker } \theta, \text{Ker } \theta)$ является идеалом ([1], § 1) этого модуля, поэтому наряду с каждым модулем (A, U) мы можем рассматривать также и фактор-модуль $(A/A \cdot \text{Ker } \theta, U/\text{Ker } \theta)$ модуля (A, U) по идеалу $(A \cdot \text{Ker } \theta, \text{Ker } \theta)$.

Лемма 1.4. Система многообразий $S = \{N_{V_T(U), L(n)} \mid U \in T\}$ кроме условий а) и б) леммы 1.1 удовлетворяет еще и условию в) если U -модуль $(A, U) \in N_{V_T(U), L(n)}$, где $N_{V_T(U), L(n)} \in S$ и $\theta: U \rightarrow W$ является сюръективным гомоморфизмом в категории $\mathbf{As}$, то модуль $(A/A \cdot \text{Ker } \theta, U/\text{Ker } \theta)$ принадлежит многообразию $N_{V_T(U/\text{Ker } \theta), L(n)} \in S$ (ясно, что кольцо $U/\text{Ker } \theta \in T$).

Доказательство. Пусть модуль $(A, U) \in N_{V_T(U), L(n)}$ и $\theta: U \rightarrow W$ — гомоморфизм „на“ в категории $\mathbf{As}$. Тогда модуль $(A, U) \in N$, поэтому фактор-модуль $(A/A \cdot \text{Ker } \theta, U/\text{Ker } \theta)$ также принадлежит многообразию N как эпиморфный образ модуля (A, U) при естественном эпиморфизме. Лемма 1.4 доказана.

Систему многообразий $S = \{N_{V_T(U), L(n)} \mid U \in T\}$, удовлетворяющую условиям а) и б) леммы 1.1 и условию в) леммы 1.4, назовем согласованной системой многообразий (ССМ).

Пусть $S = \{N_{V_T(U), L(n)} \mid U \in T\}$ — некоторая ССМ. Рассмотрим полную подкатегорию $N(S)$ категории $\mathcal{M}$, объектами которой являются всевозможные модули $(A, U) \in N_{V_T(U), L(n)}$, при всевозможных $U \in T$.

Лемма 1.5. Полная подкатегория $N(S)$ категории $\mathcal{M}$, порожденная согласованной системой многообразий S , является многообразием категории $\mathcal{M}$.

Доказательство. ССМ является ССП, поэтому в силу леммы 1.2 подкатегория $N(S)$ замкнута относительно подобъектов и прямых произведений. Покажем, что она замкнута относительно идеалов.

Пусть модуль $(A, U) \in N(S)$, то есть U -модуль $(A, U) \in N_{V_T(U), L(n)}$, где $N_{V_T(U), L(n)} \in S$, а $(\theta_A, \theta): (A, U) \rightarrow (B, W)$ — нормальный эпиморфизм

в категории $\mathfrak{X}$, то есть гомоморфизм „на“ (см. [1], предложение 1.5). Гомоморфизм $\psi: U \rightarrow W$ — гомоморфизм „на“, поэтому фактор-модуль $(A/A \cdot \text{Ker } \psi, U/\text{Ker } \psi)$ принадлежит многообразию $N_{V_T, (U/\text{Ker } \psi), L(n)} \in S$, в силу согласованности системы S , и существует изоморфизм $\xi: U/\text{Ker } \psi \rightarrow W$. Рассмотрим модуль $(B_1, U/\text{Ker } \psi) = (B, U/\text{Ker } \psi)$ и отображение $(\psi, 1): (A/A \cdot \text{Ker } \psi, U/\text{Ker } \psi) \rightarrow (B, U/\text{Ker } \psi)$, которое переводит всякий элемент $(a + A \cdot \text{Ker } \psi) \in A/A \cdot \text{Ker } \psi$ в элемент $a \psi \in B$, а на кольцах действует как тождественный автоморфизм. Отображение ψ определено корректно, так как легко проверить, что $A \cdot \text{Ker } \psi \subseteq \text{Ker } \psi_1$. Очевидно, что отображение $(\psi, 1)$ является гомоморфизмом „на“ в категории $\mathfrak{X}$ и, даже более того, является гомоморфизмом „на“ в категории $\mathfrak{X}_{U/\text{Ker } \psi}$. Поэтому, так как $U/\text{Ker } \psi$ — модуль $A/A \cdot \text{Ker } \psi$ принадлежит многообразию $N_{V_T, (U/\text{Ker } \psi), L(n)}$ категории $\mathfrak{X}_{U/\text{Ker } \psi}$, то $U/\text{Ker } \psi$ — модуль B также принадлежит многообразию $N_{V_T, (U/\text{Ker } \psi), L(n)}$. Модуль $(B, W) = (B_{-1}, W)$, поэтому модуль $(B, W) \in N_{V_T, (W), L(n)}$, где $N_{V_T, (W), L(n)} \in S$. Лемма 1.5 доказана.

Из этих двух последних лемм следует

Теорема 1.3. Любое многообразие N категории $\mathfrak{X}$ однозначно определяет согласованную систему многообразий S . Каждая согласованная система многообразий S однозначно определяет многообразие $N(S)$ в категории $\mathfrak{X}$. Эти сопоставления — взаимно обратные.

Замечание 1.1. Пусть n — неотрицательное целое число, а T и T' — такие многообразия категории As , что $T \subseteq T \cap T'(n)$. Обозначим через $N(n, T, T')$ многообразие категории $\mathfrak{X}$, определенное тройкой (n, T, T') (см. [1], § 2). Из доказательства теоремы 2.3 работы [1] видно, что формулу умножения многообразий категории $\mathfrak{X}$ можно записать и в такой форме

$$N(n_1, T_1, T'_1) \cdot N(n_2, T_2, T'_2) = N(n_1 n_2, T_1 T_2, T'_1 T'_2 \cap T_1 T_2 T(n_1) \cap \cap [T_1, T_1 T_2] \cap T_1 T'_2).$$

Напомним, что $[\hat{T}_1, \hat{T}_2]$, где $\hat{T}_1$ и $\hat{T}_2$ — некоторые многообразия категории As , это то многообразие категории As , чей вербал $V_{[\hat{T}_1, \hat{T}_2]}$ определяется равенством

$$V_{[\hat{T}_1, \hat{T}_2]}(U) = V_{\hat{T}_1}(U) \cdot V_{\hat{T}_2}(U),$$

где $V_{\hat{T}_1}$ и $V_{\hat{T}_2}$ — вербалы многообразий $\hat{T}_1$ и $\hat{T}_2$, а U — любое ассоциативное кольцо. Когда n_1 или n_2 , или же оба они одновременно равны нулю, то есть когда задаваемое ими многообразие абелевых групп совпадает с Ab (в работе [1] этому случаю соответствовал индекс $n = \infty$, однако обозначение $n = 0$ лучше, так как ясно, что $T(0) = \text{As}$), удобнее пользоваться этой новой формой записи формулы умножения многообразий категории $\mathfrak{X}$. В этой записи вместо $T(d)$, где d — наибольший общий дели-

тель чисел n_1 и n_2 , стоит $T(n_1)$, опущен член $T(n_1 n_2)$, так как из условия $T_1 \subseteq T(n_1)$ следует, что всегда $T_1 T(n_2) \subseteq T(n_1) T(n_2) = T(n_1 n_2)$ ([2], стр. 218). Из следствия IV.6.10 (см. [9], стр. 237) и из определения бимногообразия (см. [1], стр. 232) следует, что если в произвольной категории брать произведение трех многообразий, третье из которых является бимногообразием, то в этом случае операция умножения многообразий будет ассоциативной. Так как $T(n_1)$ — бимногообразие в категории $\mathbf{As}$, то

$$(T_1 T_2) T(n_1) = T_1 (T_2 T(n_1)) = T_1 T_2 T(n_1).$$

Обозначим группоид всех многообразий категории $\mathfrak{X}$ через $Gr(\mathfrak{X})$. Это группоид с нулем $\mathbf{N}(0, T(0), T(0)) = \mathbf{N}(0, \mathbf{As}, \mathbf{As}) = \mathfrak{X}$ и единицей $\mathbf{N}(1, T(1), T(1)) = \{(O, O)\}$.

Пусть $\mathbf{N}$ — некоторое многообразие категории $\mathfrak{X}$. Тогда $\mathbf{N} = \mathbf{N}(n, T, T)$ (см. [1], теорема 2.2),

Определение 1.1. Многообразие $\mathbf{N}$ категории $\mathfrak{X}$ назовем насыщенным, если из того, что модуль $(A, U) \in \mathbf{N}$, а $\theta: W \rightarrow U$ является нормальным эпиморфизмом в категории $\mathbf{As}$, следует, что W -модуль A_θ также принадлежит многообразию $\mathbf{N}$ (см. [3], стр. 92 и 101).

Теорема 1.4. Многообразие $\mathbf{N}(n, T, T)$ категории $\mathfrak{X}$ является насыщенным многообразием тогда и только тогда, когда $T = \mathbf{As}$. Существует взаимно однозначное соответствие между всеми парами (n, T) (n — неотрицательное целое число, а T — такое многообразие категории $\mathbf{As}$, что $T \subseteq T(n)$), и всеми насыщенными многообразиями $\mathbf{N}(n, \mathbf{As}, T)$ категории $\mathfrak{X}$.

Доказательство. Если многообразие $\mathbf{N}(n, T, T)$ — насыщенное, то так как нулевой модуль (O, O) принадлежит этому многообразию и для любого ассоциативного кольца U , гомоморфизм $U \rightarrow O$ является гомоморфизмом „на“, получаем что для любого ассоциативного кольца U модуль $(O, U) \in \mathbf{N}(n, T, T)$. Значит, $T = \mathbf{As}$. Обратное, если модуль $(A, U) \in \mathbf{N}(n, \mathbf{As}, T)$ и $\theta: W \rightarrow U$ — нормальный эпиморфизм в категории $\mathbf{As}$, то модуль (A_θ, W) также принадлежит многообразию $\mathbf{N}(n, \mathbf{As}, T)$, так как из существования коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\theta} & U \\ \downarrow \sigma_w & & \downarrow \sigma_u \\ V_{\hat{T}}(W) & \xrightarrow{V_{\hat{T}}(\theta)} & V_{\hat{T}}(U) \end{array}$$

следует, что для любого $a \in A$ и для любого $w \in V_{\hat{T}}(W)$, $a \circ w = a \cdot (w^\theta) = a \cdot (w V_{\hat{T}}(\theta)) = 0$. Вторая часть теоремы следует из предложения 2.4 работы [1]. Теорема 1.4 доказана.

Следствие. Для насыщенных многообразий, соответствующая система кольцевых тождеств пуста. Значит, насыщенные многообра-

зия — это классы модулей, задаваемые одним и лишь наборами битожеств (см. [3], стр. 103 и [1], стр. 218).

Теорема 1.5. Произведение любых двух насыщенных многообразий $N(n_1, As, T_1)$ и $N(n_2, As, T_2)$ является насыщенным многообразием, которое определяется по формуле

$$N(n_1, As, T_1) \cdot N(n_2, As, T_2) = N(n_1 n_2, As, T_1 T(n_2)).$$

Доказательство. Очевидно, что многообразие As является нулем группоида всех многообразий ассоциативных колец. Поэтому из формулы умножения многообразий категории $\mathfrak{M}$ следует, что $T_1 T(n_2) \cap As \cdot T_2 \cdot T(n_1) \cap [T_1, As \cdot T_2] \cap As \cdot As = T_1 T(n_2)$, так как из того, что $As \subseteq [T_1, As]$ (см. [1], стр. 230), следует, что $[T_1, As] = As$. Теорема 1.5 доказана.

Следствие 1. Насыщенные многообразия категории $\mathfrak{M}$ образуют подгруппоид $Se(\mathfrak{M})$ с нулем $N(0, As, As) = \mathfrak{M}$ и правой единицей $N(1, As, T(1))$ в группоиде всех многообразий $Gr(\mathfrak{M})$ этой категории. Этот подгруппоид является двусторонним идеалом в $Gr(\mathfrak{M})$.

Следствие 2. Так как для любых двух многообразий T_1 и T_2 категории As , $N(0, As, T_1) \cdot N(0, As, T_2) = N(0, As, As)$, то в группоиде $Gr(\mathfrak{M})$ многообразия вида $N(0, As, T)$ образуют двусторонний идеал с нулевым умножением. Значит, в группоиде $Gr(\mathfrak{M})$ имеются делители нуля и нильпотентные элементы.

Теорема 1.6. Подгруппоид $Se(\mathfrak{M})$ является полугруппой.

Доказательство. Достаточно показать, что если $N_1 = N(m_1, As, T_1)$ и $N_2 = N(m_2, As, T_2)$ — два насыщенных многообразия, то для любого модуля (A, U) значение вербала $V_{N_1}(V_{N_2}(A, U))$ является идеалом в модуле (A, U) (см. [9], стр. 237). Действительно, вербал

$$V_{N_1}(V_{N_2}(A, U)) = V_{N_1}(m_1 A + A \cdot V_{T_1}(U), 0) = (m_2 m_1 A + m_2 A \cdot V_{T_1}(U), 0)$$

(см. [1], предложение 2.5). Теорема 1.6 доказана.

Лемма 1.6. Если любое многообразие $N(n, \hat{T}, T')$ категории $\mathfrak{M}$ умножить справа на любое многообразие вида $N(1, T, T(1))$, то соответствующие тройки перемножаются покомпонентно, то есть $N(n, \hat{T}, T') \cdot N(1, T, T(1)) = N(n, \hat{T} \cdot T, T')$.

Доказательство. По формуле умножения многообразий ([1], теорема 2.3), мы получим выражение

$$T' \cdot T(1) \cap \hat{T} \cdot T(1) \cdot T(1) \cap [T', \hat{T} T(1)] \cap \hat{T} \cdot T;$$

которое равняется T' , так как $T(1)$ — единица группоида многообразий категории As , $T' \subseteq \hat{T}$ и $[T', \hat{T}] \supseteq T'$.

Лемма 1.6 доказана.

В конце замечания 1.1 указывалось, что если в произвольной категории брать произведение трех многообразий, третье из которых является бимногообразием, то в этом случае операция умножения многообразий будет ассоциативной. Возникает вопрос, а как будут обстоя-

ять дела, если бимногообразие брать в середине, или же в начале произведения? Будет ли в этих случаях ассоциативность? Мы покажем, что это не так, что если даже на первых двух местах стоит одно и то же идемпотентное бимногообразие, то все равно, в общем случае ассоциативности не будет.

Известно, что $\mathbf{N}(0, T(1), T(1))$ — идемпотентное бимногообразие в категории $\mathfrak{M}$ ([1], § 3).

Предложение 1.2. $[\mathbf{N}(0, T(1), T(1)) \cdot \mathbf{N}(0, T(1), T(1))] \cdot \mathbf{N}(1, A_s, T(1)) \neq \mathbf{N}(0, T(1), T(1)) \cdot [\mathbf{N}(0, T(1), T(1)) \cdot \mathbf{N}(1, A_s, T(1))]$.

Доказательство. В силу леммы 1.6 и формулы умножения бимногообразий ([1], теорема 3.2), левая часть этого выражения равна $\mathbf{N}(0, A_s, T(1))$. Мы показали, что $\mathbf{N}(0, T(1), T(1)) \cdot \mathbf{N}(1, A_s, T(1)) = \mathbf{N}(0, A_s, T')$. Значит, правая часть нашего выражения равняется $\mathbf{N}(0, T(1), T(1)) \cdot \mathbf{N}(0, A_s, T') = \mathbf{N}(0, A_s, T')$, где $T' = T(1) \cdot T(0) \cap T(1) \cdot T(1) \cdot T(0) \cap [T(1) \cdot T(1), T(1)] \cap T(1) \cdot A_s = [T(1), T(1)]$. Так как существует такое кольцо U , что $U \neq U^2$, то вербал $V_{[T(1), T(1)]}(U) = V_{T(1)}(U) \cdot V_{T(1)}(U) = U \cdot U \neq U = V_{T(1)}(U)$. Это означает, что многообразие $[T(1), T(1)] \neq T(1)$. Значит, многообразие $\mathbf{N}(0, A_s, T(1)) \neq \mathbf{N}(0, A_s, [T(1), T(1)])$ ([1], предложение 2.4). Предложение 1.2 доказано.

С л е д с т в и е. Умножение многообразий категории $\mathfrak{M}$ не ассоциативно.

В силу следствия 2 теоремы 1.5, для любых двух насыщенных многообразий $\mathbf{N}(0, A_s, T_1)$ и $\mathbf{N}(0, A_s, T_2)$ вида $\mathbf{N}(0, A_s, \hat{T})$ и для любого многообразия $\mathbf{N}(n, T, T')$ категории $\mathfrak{M}$ имеет место равенство $\mathbf{N}(0, A_s, T_1) \cdot \mathbf{N}(n, T, T') \cdot \mathbf{N}(0, A_s, T_2) = \mathbf{N}(0, A_s, A_s) = \mathfrak{M}$. Более того, для любого насыщенного многообразия $\mathbf{N}(n, A_s, \hat{T})$,

$$\mathbf{N}(n, A_s, \hat{T}) \cdot \mathbf{N}(0, A_s, T) = \mathbf{N}(0, A_s, A_s),$$

то есть насыщенные многообразия вида $\mathbf{N}(0, A_s, T)$ являются правыми делителями нуля полугруппы $Se(\mathfrak{M})$. Из сказанного выше следует.

Т е о р е м а 1.7. Ни группоид $Gr(\mathfrak{M})$ ни полугруппа $Se(\mathfrak{M})$ не являются свободными.

Мы уже рассматривали некоторые свободные коммутативные подполугруппы группоида $Gr(\mathfrak{M})$ ([1], теорема 3.3). Рассмотрим еще две такие подполугруппы.

Рассмотрим все насыщенные многообразия вида $\mathbf{N}(n, A_s, T(n))$, где n — неотрицательное целое число. $Ob \mathbf{N}(n, A_s, T(n)) = \{(A, U) | na = 0, \text{ для любого } a \in A\}$, так как для любого элемента $a \in A$ и любого элемента $u \in U$, равенство $a \cdot (nu) = 0$ выполняется автоматически в силу того, что $a \cdot (nu) = (na) \cdot u = 0 \cdot u = 0$. Нетрудно проверить, что насыщенные многообразия выше рассмотренного вида образуют свободную коммутативную полугруппу с формально присоединенными

нулем $N(0, A_s, T(0))$ и единицей $N(1, A_s, T(1))$, свободными образующими которой являются насыщенные многообразия вида $N(p, A_s, T(p))$, p —простое число. Эта полугруппа изоморфна мультипликативной полугруппе всех неотрицательных целых чисел. Из формулы умножения следует, что эта полугруппа является правым идеалом в $Se(\mathfrak{M})$.

Легко проверить, что многообразия вида $N(1, T(k), T(1))$, где $k=1, 2, \dots$, образуют свободную коммутативную подполугруппу в $Gr(\mathfrak{M})$ с формально присоединенной единицей $N(1, T(1), T(1))$, свободными образующими которой являются многообразия вида $N(1, T(p), T(1))$, где p —простое число. Эта полугруппа изоморфна мультипликативной полугруппе всех натуральных чисел.

Рассмотрим теперь все насыщенные многообразия вида $N(n, A_s, T(m))$, где m —делитель n , если n —натуральное число и m —любое натуральное число или нуль, если $n=0$. Легко проверить, что все насыщенные многообразия такого вида образуют подполугруппу в полугруппе $Se(\mathfrak{M})$. Эта подполугруппа является правым идеалом в полугруппе $Se(\mathfrak{M})$. Она изоморфна мультипликативной полугруппе всех пар (n, m) , где n и m удовлетворяют тем же условиям, что и выше и для любых двух пар (n_1, m_1) и (n_2, m_2) мультипликативная операция определена следующим образом: $(n_1, m_1) \cdot (n_2, m_2) = (n_1 n_2, m_1 m_2)$. Очевидно, что эта подполугруппа не является свободной и что правая единица $N(1, A_s, T(1))$ не является в ней единицей.

Замечание 1.2. Если произвольное многообразие $N(n, T, T')$ умножить слева на любое насыщенное многообразие $N(m, A_s, T)$, то многообразия T и T' никакой роли не будут играть в этом умножении, так как из формулы умножения многообразий следует, что

$$N(m, A_s, T) \cdot N(n, T, T') = N(mn, A_s, T \cdot T'(n)).$$

Отсюда следует, что $Gr(\mathfrak{M})$ не является группоидом с левым сокращением. Кроме того, нетрудно проверить, что для любого бимногообразия $N(m, T(m), T(m))$ ([1], § 3), $N(m, T(n_1), T(m)) \cdot N(n, A_s, T(n)) = N(m, A_s, T(m)) \cdot N(n, A_s, T(n)) = N(mn, A_s, T(mn))$. Значит, $Gr(\mathfrak{M})$ не является также и группоидом с правым сокращением. Заметим еще, что $N(n, A_s, T(n)) \cdot N(m, T(m), T(m)) = N(n, A_s, T(n)) \cdot N(m, A_s, T(m)) = N(mn, A_s, T(mn))$.

Предложение 1.3. Для того чтобы многообразие $N(n, T, T')$ было идемпотентом в группоиде $Gr(\mathfrak{M})$, необходимо и достаточно, чтобы оно или было вида $N(1, T, T(1))$ или же вида $N(0, T, T)$, где в обоих случаях T —идемпотент в группоиде всех многообразий категории A_s .

Доказательство. Из формулы умножения многообразий видно, что для того чтобы многообразие $N(n, T, T')$ было идемпотентом в группоиде $Gr(\mathfrak{M})$, необходимо, чтобы $n^2 = n$, то есть чтобы $n=1$ или же $n=0$.

Пусть $n = 1$, тогда $T' = T(1)$, так как $T' \subseteq T(1) = \{0\}$. В силу леммы 1.6 $(N(1, T, T(1)))^2 = N(1, T^2, T(1))$. Значит, многообразие $N(1, T, T(1))$ тогда и только тогда идемпотентно, когда $T^2 = T$.

Пусть $n = 0$. Тогда имеем многообразие вида $N(0, T, T')$, где $T' \subseteq T$. Из условия $N(0, T, T') = (N(0, T, T'))^2 = N(0, T^2, \hat{T})$ получаем, что для того чтобы многообразие $N(0, T, T')$ было идемпотентом, необходимо, чтобы $T^2 = T$. В силу формулы умножения многообразий категории $\mathfrak{X}$ имеем, что

$$\begin{aligned} \hat{T} &= T' \cdot T(0) \cap T \cdot T' \cdot T(0) \cap [T', T \cdot T'] \cap T^2 = [T', T \cdot T'] \cap T^2 = \\ &= [T', T \cdot T'] \cap T, \end{aligned}$$

так как $T^2 = T$. А из неравенства $[T', T \cdot T'] \supseteq T \cdot T' \supseteq T$ получаем что $\hat{T} = T$. Из условия $N(0, T, T') = N(0, T^2, \hat{T})$ и из предложения 2.4 работы [1] следует, что $T' = \hat{T} = T$. Получили многообразие вида $N(0, T, T)$. Предложение 1.3 доказано.

Следствие 1. Единственным нетривиальным идемпотентом в полугруппе $B(\mathfrak{X})$ всех бимногообразий категории $\mathfrak{X}$ ([1], § 3), является бимногообразие $N(0, T(1), T(1))$.

Следствие 2. Единственным нетривиальным идемпотентом в полугруппе $Se(\mathfrak{X})$ всех насыщенных многообразий категории $\mathfrak{X}$, является ее правая единица $N(1, As, T(1))$.

В работе [1] доказано, что для любых многообразий $N(n_1, T_1, T_1)$ и $N(n_2, T_2, T_2)$, $N(n_1, T_1, T_1) \cdot N(n_2, T_2, T_2) = N(n_1 n_2, T_1 \cdot T_2, T_1 \cdot T_2)$. Значит, многообразия вида $N(n, T, T)$ образуют подгруппоид $\Gamma(\mathfrak{X})$ в $Gr(\mathfrak{X})$.

Предложение 1.4. $\Gamma(\mathfrak{X}) \cap Se(\mathfrak{X}) = \{\mathfrak{X}\}$.

Доказательство. Если многообразие $N(n, T, T) \in Se(\mathfrak{X})$, то в силу теоремы 1.4, $T = As$, а так как $T \subseteq T(n)$ ([1], замечание 2.2), то это возможно лишь тогда, когда $n = 0$. Значит, $N(n, T, T) = N(0, As, As) = \mathfrak{X}$. Предложение 1.4 доказано.

Следствие. $B(\mathfrak{X}) \cap Se(\mathfrak{X}) = \{\mathfrak{X}\}$.

Предложение 1.5. Для того чтобы многообразия $N(n_1, T_1, T_1)$ и $N(n_2, T_2, T_2)$ коммутировали, необходимо и достаточно, чтобы $T_1 T_2 = T_2 T_1$ и $T_1 T(n_2) \cap T_1 T_2 T(d) \cap [T_1, T_1 T_2] \cap T_1 T_2 = T_2 T(n_1) \cap T_2 T_1 T(d) \cap [T_2, T_2 T_1] \cap T_2 T_1$, где d — наибольший общий делитель чисел n_1 и n_2 . Если n_1 или n_2 , или же они оба равны нулю, то вместо $T(d)$, в левой части равенства надо подставить $T(n_1)$, а в правой части $T(n_2)$.

Доказательство следует из формулы умножения многообразий категории $\mathfrak{X}$ и из предложения 2.4 работы [1].

Следствие 1. Для того чтобы коммутировали насыщенные многообразия $N(n_1, As, T_1)$ и $N(n_2, As, T_2)$, необходимо и достаточно, чтобы $T_1 T(n_2) = T_2 T(n_1)$.

Следствие 2. Для того чтобы многообразия $\mathbf{N}(n_1, T_1, T_1)$ и $\mathbf{N}(n_2, T_2, T_2)$ группоид $\Gamma(\mathfrak{M})$ коммутировали, необходимо и достаточно, чтобы $T_1 T_2 = T_2 T_1$.

§ 2. Бикатегорные структуры

Известно, что совокупность всех бикатегорных структур в категории ассоциативных колец не является множеством (см. [6], теорема 1).

Теорема 2.1. Совокупность всех бикатегорных структур в категории $\mathfrak{M}$ не является множеством.

Доказательство. Возьмем в категории $\mathbf{As}$ некоторую бикатегорную структуру $(\mathbf{As}, E_{\mathbf{As}}, M_{\mathbf{As}})$ и построим по ней бикатегорную структуру $(\mathfrak{M}, E_{\mathfrak{M}}, M_{\mathfrak{M}})$ в категории $\mathfrak{M}$.

Пусть $(\varphi_A, \varphi_U): (A, U) \rightarrow (B, V)$ — любой морфизм категории $\mathfrak{M}$ и $\varphi_U = \theta\mu$ ($\theta: U \rightarrow W, \mu: W \rightarrow V$) — допустимое разложение кольцевого гомоморфизма φ в бикатегорной структуре $(\mathbf{As}, E_{\mathbf{As}}, M_{\mathbf{As}})$.

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} (A, U) & \xrightarrow{(\varphi_A, \varphi_U)} & (B, V) \\ (\pi, \theta) \searrow & & \nearrow (i, \mu) \\ & \text{Im } \varphi_A + \text{Im } \varphi_A \circ W, W & \end{array} \quad (2.1)$$

где $\text{Im } \varphi_A + \text{Im } \varphi_A \circ W$ — это W -подмодуль W -модуля B , порожденный подгруппой $\text{Im } \varphi_A$, гомоморфизм π переводит любой элемент $a \in A$ в элемент $a\varphi_A \in \text{Im } \varphi_A$, i -вложение подгруппы $\text{Im } \varphi_A + \text{Im } \varphi_A \circ W$ группы B в B . Покажем, что пары (π, θ) и (i, μ) являются морфизмами категории $\mathfrak{M}$.

Для всякого $a \in A$ и для всякого $u \in U$, $(a \cdot u)\pi = (a \cdot u)\varphi_A = (a\varphi_A) \cdot (u\varphi_U) = a\varphi_A \cdot (u\theta)\mu = a\varphi_A \circ u\theta = a\pi \circ u\theta$.

Для всякого $(a_1\varphi_A + a_2\varphi_A \circ \omega) \in \text{Im } \varphi_A + \text{Im } \varphi_A \circ W$ и для всякого $\bar{\omega} \in W$, $[(a_1\varphi_A + a_2\varphi_A \circ \omega) \circ \bar{\omega}]i = (a_1\varphi_A \circ \bar{\omega} + a_2\varphi_A \circ \omega\bar{\omega})i = a_1\varphi_A \circ \bar{\omega} + a_2\varphi_A \circ \omega\bar{\omega} = (a_1\varphi_A) \cdot (\bar{\omega}\mu) + (a_2\varphi_A) \cdot (\omega\bar{\omega})\mu = (a_1\varphi_A) \cdot (\bar{\omega}\mu) + (a_2\varphi_A) \cdot (\omega\mu) \cdot (\bar{\omega}\mu) = [a_1\varphi_A + (a_2\varphi_A) \cdot (\omega\mu)] \cdot \bar{\omega}\mu = (a_1\varphi_A + a_2\varphi_A \circ \omega)i \cdot \bar{\omega}\mu$.

Очевидно, что диаграмма (2.1) коммутативна. Мы получили, что любой гомоморфизм (φ_A, φ_U) категории $\mathfrak{M}$ разлагается в произведение $(\varphi_A, \varphi_U) = (\pi, \theta) \cdot (i, \mu)$, где $\varphi_U = \theta\mu$ — допустимое разложение морфизма φ_U в бикатегорной структуре $(\mathbf{As}, E_{\mathbf{As}}, M_{\mathbf{As}})$. Покажем, что получили бикатегорную структуру $(\mathfrak{M}, E_{\mathfrak{M}}, M_{\mathfrak{M}})$ в категории $\mathfrak{M}$.

Очевидно, что $(i, \mu) \in \text{Mor } \mathfrak{X}$. Покажем, что $(\pi, \theta) \in \text{Epi } \mathfrak{X}$.

Пусть даны гомоморфизмы (ψ, ψ_W) и (χ, χ_W) такие, что $(\pi, \theta) \cdot (\psi, \psi_W) = (\pi, \theta) \cdot (\chi, \chi_W)$. Это означает, что $(\pi\psi, \theta\psi_W) = (\pi\chi, \theta\chi_W)$. Из равенства $\theta\psi_W = \theta\chi_W$ следует, что $\psi_W = \chi_W$, так как $\theta \in \text{Epi } \text{As}$. Покажем, что $\psi = \chi$. Действительно, для всякого

$$\begin{aligned} (a_1\varphi_A + a\varphi_A \circ \omega) \in \text{Im } \varphi_A + \text{Im } \varphi_A \circ W, \quad (a_1\varphi_A + a\varphi_A \circ \omega) \psi &= (a_1\varphi_A) \psi + \\ + (a\varphi_A \circ \omega) \psi &= (a_1\varphi_A) \psi + (a\varphi_A) \psi \cdot (\omega\psi_W) = (a_1\pi) \psi + (a\pi) \psi \cdot (\omega\psi_W) = a_1\pi\chi + \\ + (a\pi\chi) \cdot (\omega\chi_W) &= (a_1\varphi_A) \chi + (a\varphi_A) \chi \cdot \omega\chi_W = (a_1\varphi_A) \chi + (a\varphi_A \circ \omega) \chi = \\ &= (a_1\varphi_A + a\varphi_A \circ \omega) \chi. \end{aligned}$$

Значит, $\psi = \chi$. Получили, что $(\pi, \theta) \in \text{Epi } \mathfrak{X}$.

Пусть $\theta\mu = \rho\tau$ ($\rho: U \rightarrow R, \tau: R \rightarrow V$) — два различных разложения морфизма $\varphi_U \in \text{Mor } \text{As}$. Тогда существует такой изоморфизм колец $\xi_W: W \rightarrow R$, что $\rho = \theta\xi_W$ (см. [2], определение 1.8.1) и, значит, существует такой изоморфизм

$$(\xi, \xi_W): (\text{Im } \varphi_A + \text{Im } \varphi_A \circ W, W) \rightarrow (\text{Im } \varphi_A + \text{Im } \varphi_A \circ R, R),$$

что $(\pi, \rho) = (\pi, \theta)(\xi, \xi_W)$.

Ясно, что $\text{Iso } \mathfrak{X} \subseteq E_{\mathfrak{X}} \cap M_{\mathfrak{X}}$. Получили, что $(\mathfrak{X}, E_{\mathfrak{X}}, M_{\mathfrak{X}})$ является бикатегорной структурой в $\mathfrak{X}$.

Пусть даны две различные бикатегорные структуры $(\text{As}, E_{\text{As}}^{(1)}, M_{\text{As}}^{(1)})$ и $(\text{As}, E_{\text{As}}^{(2)}, M_{\text{As}}^{(2)})$ категории As . Пусть, например, $E_{\text{As}}^{(1)} \neq E_{\text{As}}^{(2)}$. Не нарушая общности можно считать, что $E_{\text{As}}^{(1)} \subseteq E_{\text{As}}^{(2)}$. Это означает, что существует такой эпиморфизм $\theta \in E_{\text{As}}^{(1)}$, что $\theta \notin E_{\text{As}}^{(2)}$. Из построения бикатегорной структуры $(\mathfrak{X}, E_{\mathfrak{X}}, M_{\mathfrak{X}})$ по бикатегорной структуре $(\text{As}, E_{\text{As}}, M_{\text{As}})$ следует, что эпиморфизм $(0, \theta) \in E_{\mathfrak{X}}^{(1)}$, но $(0, \theta) \notin E_{\mathfrak{X}}^{(2)}$. Аналогичным образом доказывается, что если $M_{\text{As}}^{(1)} \neq M_{\text{As}}^{(2)}$, то соответствующие классы морфизмов $M_{\mathfrak{X}}^{(1)} \neq M_{\mathfrak{X}}^{(2)}$. Теорема доказана.

Замечание 2.1. Так как категория $\mathfrak{X}$ является локально малой бикатегорией с нулевым объектом и с прямыми и свободными произведениями, то категория $\mathfrak{X}$ является биполной категорией с нулевым объектом.

§ 3. Строгие радикалы и кручения

В работе [12] установлено, что в произвольной категории $\mathbf{K}$ можно построить общую теорию радикалов в смысле А. Г. Куроша [11], если эта категория удовлетворяет условиям I—V работы [12]. Эти условия выполнены в категории $\mathfrak{X}$ (см. [1], § 1). При построении радикала в смысле А. Г. Куроша в категории $\mathbf{K}$ выделяется класс объектов, обладающих некоторым свойством R ; такие объекты называются R -объектами. Мы скажем, что свойство R радикально

или определяет в категории $\mathbf{K}$ R -радикал, если выполняются следующие условия:

(А) Если $\theta: B \rightarrow A$ — нормальный эпиморфизм и A — R -объект, то и B — R -объект.

(В) Для каждого объекта $A \in \mathbf{K}$ существует R -идеал $(R(A), \mu_A)$, содержащий все R -идеалы объекта A (идеал $(R(A), \mu_A)$ называется R -радикалом).

(С) Если $(\nu_A, S(A))$ -нормальный фактор-объект объекта A по его R -радикалу $(R(A), \mu_A)$, то объект $S(A)$ является R -полупростым, то есть он обладает лишь одним нулевым R -идеалом.

Из результатов работы [12] следует, что в категории $\mathfrak{X}$ свойство R радикально тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет условиям (А) и

(D) Объект A является R -объектом, если для любого ненулевого нормального эпиморфизма $\theta: A \rightarrow B$, B обладает ненулевым R -идеалом.

Мы будем говорить, что свойство R определяет в категории $\mathbf{K}$ строгий R -радикал, или что R является строго радикальным свойством, если оно радикально и удовлетворяет условию

(E) R -радикал $(R(A), \mu_A)$ любого объекта $A \in \mathbf{K}$ содержит все R -подобъекты объекта A .

Ясно, что в любой абелевой категории каждый R -радикал является строгим R -радикалом.

Пусть в категории $\mathfrak{X}$ задан некоторый строгий радикал R . Рассмотрим полную подкатегорию ${}_0\mathfrak{X}$ категории $\mathfrak{X}$, объектами которой являются все модули вида (O, U) . Любые идеалы и любые гомоморфные образы объектов из ${}_0\mathfrak{X}$ сами лежат в подкатегории ${}_0\mathfrak{X}$, следовательно, (см. [11], § 6), радикал R индуцирует вполне определенный радикал $R_{{}_0\mathfrak{X}}$ в подкатегории ${}_0\mathfrak{X}$, а это означает, что радикал R определяет вполне определенный радикал R_{A_s} в категории A_s . Все сказанное выше остается верным и для подкатегории $\mathfrak{X}_0$ категории $\mathfrak{X}$, объектами которой являются все модули вида (A, O) , поэтому радикал R определяет вполне определенный радикал R_0 в категории A_b .

Получили, что

$$R(A, O) = (R_0(A), O) \text{ и } R(O, U) = (O, R_{A_s}(U)). \quad (1)$$

Из строгости радикала R категории $\mathfrak{X}$ следует строгость радикала R_{A_s} категории A_s .

Пусть (A', U') — R -радикал модуля (A, U) . Обозначим $U' = R(U)$, $A' = R_{R(U)}(A)$.

Лемма 3.1. $R(U) = R_{A_s}(U)$ и $R_0(A) \subseteq R_{R(U)}(A)$.

Доказательство. Рассмотрим нормальный эпиморфизм $(0, \cdot)^2: (R_{R(U)}(A), R(U)) \rightarrow (O, R(U))$. Модуль $(R_{R(U)}(A), R(U))$ R -радикален, следовательно R -радикален модуль $(O, R(U))$. Значит, идеал

$R(U)$ кольца U R_{Λ_s} -радикален, поэтому $R(U) \subseteq R_{\Lambda_s}(U)$. Обратное включение следует из того, что модуль $(0, R_{\Lambda_s}(U))$ является R -подмодулем модуля (A, U) , поэтому этот модуль лежит в радикале $R(A, U) = (R_{R(U)}(A), R(U))$. Вторая часть леммы доказывается аналогичным образом. Отметим, что отображение $(1, 0): (R_{R(U)}(A), R(U)) \rightarrow (R_{R(U)}(A), 0)$ не является полулинейным отображением, если действие кольца $R(U)$ на абелеву группу $R_{R(U)}(A)$ не является нулевым. Лемма 3.1 доказана.

Замечание 3.1. Там, где будет ясно, что U — кольцо, мы всегда вместо $R_{\Lambda_s}(U)$ будем писать $R(U)$.

Замечание 3.2. Рассмотрим полную подкатегорию $\mathfrak{M}^0$ модулей с нулевым действием кольца. Такие модули будем обозначать $(A, U)_0$. Так как в случае модулей с нулевым действием кольца отображение $(1, 0): R((A, U)_0) = (R_{R(U)}(A), R(U))_0 \rightarrow (R_{R(U)}(A), 0)$ является нормальным эпиморфизмом в категории $\mathfrak{M}$, то $R_{R(U)}(A) \subseteq R_0(A)$. Следовательно, в случае модулей с нулевым действием кольца, $R((A, U)_0) = (R_0(A), R(U))_0$.

Лемма 3.2. Для любого модуля (A, U) ,

$$\begin{aligned} R(A, U) &= (R_{R(U)}(A), R(U)) = R(A, R(U)) = R(R_{R(U)}(A), U) = \\ &= R(R_{R(U)}(A), R(U)). \end{aligned} \quad (2)$$

Доказательство. Радикал R — строгий, следовательно из включения $R(A, R(U)) \subseteq (A, R(U)) \subseteq (A, U)$ следует, что $R(A, R(U)) \subseteq R(A, U)$. С другой стороны, $R(A, U) = (R_{R(U)}(A), R(U))$ является R -подмодулем модуля $(A, R(U))$, следовательно, $R(A, U) \subseteq R(A, R(U))$. Значит, $R(A, U) = R(A, R(U))$. Аналогичным образом доказывается, что $R(A, U) = R(R_{R(U)}(A), U)$. Лемма 3.2 доказана.

Покажем теперь, что для любого ассоциативного кольца U , строгий радикал R категории $\mathfrak{M}$ индуцирует вполне определенный радикал $R_{R(U)}$ в категории $R(U)$ -модулей $\mathfrak{M}_{R(U)}$. Именно, скажем, что правый $R(U)$ -модуль A $R_{R(U)}$ -радикален, если $(A, R(U))$ — R -радикальный объект категории $\mathfrak{M}$. Проверим, что свойство $R_{R(U)}$ действительно радикальное.

(А) Пусть $\theta: A \rightarrow B$ является нормальным эпиморфизмом в категории $\mathfrak{M}_{R(U)}$ и $R(U)$ -модуль A $R_{R(U)}$ -радикален. Так как отображение $(\theta, 1): (A, R(U)) \rightarrow (B, R(U))$ — нормальный эпиморфизм в категории $\mathfrak{M}$, то модуль $(B, R(U))$ R -радикален. Значит, $R_{R(U)}(B) = B$.

(Д) Пусть для любого ненулевого нормального эпиморфизма $R(U)$ -модулей $\psi: A \rightarrow D$, $R(U)$ -модуль D обладает ненулевым $R_{R(U)}$ -идеалом, в данном случае подмодулем. Покажем, что $R_{R(U)}(A) = A$. Действительно, пусть $(\psi, \pi): (A, R(U)) \rightarrow (B, V)$ — любой ненулевой нормальный эпиморфизм в категории $\mathfrak{M}$. Тогда имеем следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccc}
 (A, R(U)) & \xrightarrow{(\theta, \pi)} & (B, V) \\
 (\theta, 1) \searrow & & \nearrow (1, \pi) \\
 & (B_{\pi}, R(U)) &
 \end{array}$$

где B_{π} — превращение V -модуля B в $R(U)$ -модуль отступлением вдоль π . Если θ — ненулевой гомоморфизм, то пара $(\theta, 1)$ является ненулевым нормальным эпиморфизмом категории $\mathfrak{M}_{R(U)}$, поэтому в $R(U)$ -модуле B существует ненулевой $R_{R(U)}$ -модуль C , $R(C, R(U)) = (C, R(U))$. Рассмотрим ограничение нормального эпиморфизма $(1, \pi)$ на R -подмодуль $(C, R(U))$. Гомоморфным образом этого R -модуля будет ненулевой R -подмодуль (C, V) модуля (B, V) . Значит, $(0, 0) \neq (C, V) \subseteq R(B, V)$. Если же $\theta = 0$, то $B = 0$, так как θ — гомоморфизм „на“. Очевидно, что в этом случае модуль $(B_{\pi}, R(U)) = (0, R(U))$ является R -радикальным модулем, следовательно его гомоморфный образ $(0, V)$ также является ненулевым R -радикальным модулем. Получили, что для любого ненулевого нормального эпиморфизма $(\theta, \pi): (A, R(U)) \rightarrow (B, V)$, модуль (B, V) обладает ненулевым R -идеалом. Значит, $R(A, R(U)) = (A, R(U))$, а это означает, что $R_{R(U)}(A) = A$.

Итак, каждый строгий радикал R категории $\mathfrak{M}$ индуцирует вполне определенные строгий радикал R_{As} в категории As и радикалы $R_{R(U)}$ в категориях $\mathfrak{M}_{R(U)}$, причем для любого модуля (A, U) $R(A, U) = (R_{R(U)}(A), R(U))$. Из леммы 3.2 следует, что если

$$R(U) = 0, \text{ то } R_{R(U)} = R_0,$$

где R_0 — это тот самый радикал категории Ab , индуцированный радикалом R категории $\mathfrak{M}$, о котором говорилось до доказательства леммы 3.1. Покажем, что полученная система радикалов

$$\{R_{As}, R_{R(U)} \mid R(U) \in As\}$$

обладает следующими свойствами:

- (R1) Для любого $R(U)$ -модуля A , $A \cdot R(U) \subseteq R_{R(U)}(A)$.
- (R2) Для любого U -модуля A , $R_{R(U)}(A) \cdot U \subseteq R_{R(U)}(A)$.
- (R3) Если $\varphi: R(U) \rightarrow R(V)$ — гомоморфизм колец, то для $R(V)$ -модуля A , $R_{R(U)}(A) \subseteq R_{R(V)}(A)$.

Действительно, первые два условия следуют из того факта, что R -радикал любого модуля (A, U) является идеалом этого модуля. Напомним, (см. [1], § 1), что подмодуль (A_1, U_1) модуля (A, U) тогда и только тогда будет идеалом модуля (A, U) , когда U_1 — идеал кольца U и выполнены включения $A \cdot U_1 \subseteq A_1$ и $A_1 \cdot U \subseteq A_1$. Условие (R3) следует из существования следующей коммутативной диаграммы (см. [13], предположение 2).

$$\begin{array}{ccc}
 (A_\psi, R(U)) & \xrightarrow{(\sigma_U, \psi)} & (A, R(V)) \\
 \downarrow (\sigma_U, 1) & & \downarrow (\sigma_V, 1) \\
 (R_{R(U)}(A_\psi), R(U)) & \xrightarrow{(\sigma_U, \psi)} & (R_{R(V)}(A), R(V))
 \end{array}$$

где $i = 1_{A/R_{R(U)}(A_\psi)}$, а σ_U, σ_V — вложения радикалов.

Определение 3.1. Систему радикалов $\{R_{As}, R_{R(U)} | R(U) \in As\}$, где R_{As} — строгий радикал в категории As , назовем согласованной системой строгих радикалов, если она удовлетворяет условиям (R1) — (R3).

Теорема 3.1. Пусть в категории $\mathfrak{X}$ задан строгий радикал R . Тогда в категории As он индуцирует строгий радикал R_{As} , а на каждой категории $\mathfrak{X}_{R(U)}, R(U) \in As$, индуцирует такие радикалы $R_{R(U)}$, что система строгих радикалов $\{R_{As}, R_{R(U)} | R(U) \in As\}$ является согласованной. Обратно, каждая согласованная система строгих радикалов $\{R_{As}, R_{R(U)} | R(U) \in As\}$ задает вполне определенный строгий радикал R в категории $\mathfrak{X}$, радикальный класс которого составляют все такие модули (A, U) , что кольцо U — R_{As} -кольцо, то есть $U = R(U)$, а $R(U)$ -модуль A — $R_{R(U)}$ -радикальный модуль. Существует взаимно однозначное соответствие между всеми строгими радикалами категории $\mathfrak{X}$ и всеми согласованными системами строгих радикалов.

Доказательство. Первое утверждение теоремы мы уже доказали.

Пусть задана некоторая согласованная система строгих радикалов $\{R_{As}, R_{R(U)} | R(U) \in As\}$. Покажем, что класс R -модулей, о котором говорится в формулировке теоремы, является радикальным классом для некоторого строгого радикала R категории $\mathfrak{X}$.

(A) Пусть $(\pi, \theta): (A, U) \rightarrow (B, V)$ — нормальный эпиморфизм и (A, U) — R -модуль, то есть $(A, U) = (R_{R(U)}(A), R(U))$. Покажем, что (B, V) — R -модуль. Действительно, $\theta: U \rightarrow V$ — нормальный эпиморфизм в категории As и кольцо U — R_{As} -радикальное, следовательно, кольцо V является R_{As} -кольцом, $R(V) = V$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 (A, R(U)) & \xrightarrow{(\pi, \theta)} & (B, R(V)) \\
 (\pi, 1) \searrow & & \nearrow (1, \theta) \\
 & (B_\theta, R(U)) &
 \end{array}$$

$R(U)$ -модуль B_θ , как эпиморфный образ $R_{R(U)}$ -радикального $R(U)$ -модуля A , является $R_{R(U)}$ -модулем, $R_{R(U)}(B_\theta) = B$. Следовательно, из условия (R3) получаем, что $B = R_{R(U)}(B_\theta) \subseteq R_{R(V)}(B) \subseteq B$, то есть $R_{R(V)}(B) = B$. Значит, модуль (B, V) является R -модулем.

(B) и (E). Покажем, что для любого модуля (A, U) идеал, в силу (R1) и (R2), $(R_{R(U)}(A), R(U))$ является строгим R -радикалом модуля (A, U) , то есть надо показать, что этот идеал содержит все R -подмодули модуля (A, U) . Пусть (B, V) — R -подмодуль модуля (A, U) . Тогда кольцо V является R_{A_0} -подкольцом кольца U , следовательно, $V = R(V) \subseteq R(U)$, так как R_{A_0} — строгий радикал в категории A_0 . Получили, что модуль $(B, V) = (R_{R(V)}(B), R(V))$ является R -подмодулем модуля $(A, R(U))$. Рассмотрим коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} (B, R(V)) & \xrightarrow{(i, \varepsilon)} & (A, R(U)) \\ \downarrow (i, \varepsilon) & & \uparrow (i, \varepsilon) \\ & (A_0, R(V)) & \end{array}$$

где (i, ε) — вложение подмодуля $(B, R(V))$ в модуль $(A, R(U))$. $R(V)$ -модуль B является $R_{R(V)}$ -радикальным подмодулем $R(V)$ -модуля A_0 , следовательно, в силу свойства (R3), $B \subseteq R_{R(V)}(A_0) \subseteq R_{R(U)}(A)$. Значит, модуль $(B, V) \subseteq (R_{R(U)}(A), R(U))$.

(C) Покажем, что $R((A, U)/R(A, U)) = (0, 0)$. Действительно, из $R(U/R(U)) = 0$ следует, что

$$R(A/R_{R(U)}(A), U/R(U)) = (R_0(A/R_{R(U)}(A)), 0) = (0, 0),$$

так как если применить условие (R3) к гомоморфизму $0: R(U) \rightarrow R(U)$, то получим, что для любого $R(U)$ -модуля A , $R_0(A) \subseteq R_{R(U)}(A)$. Поэтому абелева группа $A/R_{R(U)}(A) \subseteq A/R_0(A)$. Но абелева группа $A/R_0(A)$ — R_0 -полупроста, следовательно, абелева группа $A/R_{R(U)}(A)$ также R_0 -полупроста.

Третье утверждение теоремы следует из первых двух утверждений, так как сопоставления, которые там указываются, взаимно обратные. Теорема 3.1 доказана.

Замечание 3.3. Если в согласованной системе строгих радикалов $\{R_{A_0}, R_{R(U)} | R(U) \in A_0\}$ — хотя бы для одного кольца $R(V)$ все $R(V)$ -модули $R_{R(V)}$ -радикальны, то для любого кольца $R(U) \in A_0$ все $R(U)$ -модули $R_{R(U)}$ -радикальны.

Выше мы доказали, что для любого $R(U)$ -модуля A , $R_0(A) \subseteq R_{R(U)}(A)$, поэтому достаточно доказать, что для любой абелевой группы A , $R_0(A) = A$. Рассмотрим нулевой гомоморфизм $0: R(V) \rightarrow 0$. Из условия (R3) имеем, что для любой абелевой группы A , $A = R_{R(V)}(A_0) \subseteq R_0(A) \subseteq A$. Значит, $R_0(A) = A$.

Замечание 3.4. Если в согласованной системе строгих радикалов $\{R_{A_0}, R_{R(U)} | R(U) \in A_0\}$ хотя бы для одного кольца $R(V)$ все $R(V)$ -модули являются $R_{R(V)}$ -полупростыми модулями, то все абелевы группы A являются R_0 -полупростыми абелевыми группами.

Действительно, любая абелева группа является $R(V)$ -модулем, если действие кольца $R(V)$ определить как нулевое, а для любого $R(V)$ -модуля A имеем, что $R_0(A) \subseteq K_{R(V)}(A) = 0$.

Замечание 3.5. Зафиксируем некоторый строгий радикал R_A в категории $\mathcal{A}$ и рассмотрим систему таких радикалов

$$\{R_{A_s}, K_{R(U)} | R(U) \in \mathcal{A}_s\},$$

что для каждого $R(U)$ -модуля A , $K_{R(U)}(A) = A$. Легко проверить, что эта система строгих радикалов является согласованной. Очевидно, что для различных строгих радикалов R_{A_s} категории $\mathcal{A}_s$ мы будем получать различные строгие радикалы категории $\mathcal{X}$.

Определение 3.2. Строгий радикал R категории $\mathcal{X}$ называется кручением (сильно наследственным строгим радикалом), если из $(A, U) \subseteq R(B, V)$, где (A, U) — подмодуль модуля (B, V) , следует, что $R(A, U) = (A, U)$, (см. [15], стр. 290).

Описание кручений (сильно наследственных строгих радикалов) категории ассоциативных колец дано в работе [7].

Теорема 3.2. *Согласованная система строгих радикалов $\{R_{A_s}, K_{R(U)} | R(U) \in \mathcal{A}_s\}$ тогда и только тогда является кручением в категории $\mathcal{X}$, когда она удовлетворяет следующим условиям:*

(R4) Радикал R_{A_s} является кручением в категории $\mathcal{A}_s$.

(R5) Если $\mu: R(U) \subseteq R(V)$ — вложение колец и $R(U)$ -модуль A лежит в $R(U)$ -модуле $[R_{R(V)}(B)]_\mu$, для некоторого $R(V)$ -модуля B , то $A = K_{R(U)}(A)$.

Доказательство. Если радикал R является кручением в категории $\mathcal{X}$, то из того, что U — подкольцо кольца V и $U \subseteq R(V)$ следует, что модуль $(0, U)$ — подмодуль модуля $(0, V)$ и $(0, U) \subseteq (0, R(V)) = R(0, V)$. Значит, $R(0, U) = (0, U)$, то есть $R(U) = U$. Условие (R4) выполнено. Если же модуль $(A, R(U)) \subseteq ([R_{R(V)}(B)]_\mu, R(U))$, где $\mu: R(U) \subseteq R(V)$ — вложение колец, то

$$(A, R(U)) \subseteq (K_{R(V)}(B), R(V)) = R(B, V)$$

и $(A, R(U))$ — подмодуль модуля (B, V) , поэтому $R(A, R(U)) = (A, R(U))$, то есть $K_{R(U)}(A) = A$. Условие (R5) также выполнено.

Обратно, пусть согласованная система строгих радикалов $\{R_{A_s}, K_{R(U)} | R(U) \in \mathcal{A}_s\}$ удовлетворяет условиям (R4) и (R5) и модуль $(A, U) \subseteq R(B, V) = (R_{R(V)}(B), R(V))$, где (A, U) — подмодуль модуля (B, V) . Тогда U является подкольцом кольца V и $U \subseteq R(V)$, следовательно, $R(U) = U$, так как R_{A_s} — кручение в категории $\mathcal{A}_s$. Из условия $(A, R(U)) \subseteq ([R_{R(V)}(B)]_\mu, R(V))$, где $(A, R(U))$ — подмодуль модуля (B, V) , следует, что $R(U)$ -модуль B лежит в $R(U)$ -модуле $[R_{R(V)}(B)]_\mu$, где μ — вложение подкольца $R(U)$ в кольцо $R(V)$. Значит, из (R5) следует, что $K_{R(U)}(A) = A$. Теорема 3.2 доказана.

Замечание 3.6. В частности, когда $R(U) = R(V)$, из условия (R5) следует, что для любого кольца $R(U)$ радикал $R_{R(U)}$ является кручением в категории $\mathcal{X}_{R(U)}$.

Замечание 3.7. Легко проверить, что если в согласованной системе строгих радикалов, рассматриваемом в замечании 3.5, в ка-

честве строгого радикала категории $\mathcal{A}s$ мы будем брать некоторое кручение категории $\mathcal{A}s$, то полученная система строгих радикалов будет определять кручение категории $\mathcal{X}$.

Замечание 3.8. Если в согласованной системе строгих радикалов $\{R_{\mathcal{A}s}, R_{R(U)} | R(U) \in \mathcal{A}s\}$ радикал $R_{\mathcal{A}s}$ — тривиальный радикал (для любого ассоциативного кольца U , $R(U) = O$), то эта система превращается в пару радикалов $\{R_{\mathcal{A}s}, R_0\}$, где R_0 — радикал в категории $\mathcal{A}b$. Зафиксируем некоторый радикал R в категории $\mathcal{A}b$ и рассмотрим пару $\{O_{\mathcal{A}s}, R\}$, где $O_{\mathcal{A}s}$ — тривиальный радикал категории $\mathcal{A}s$. Эта пара определяет строгий радикал в категории $\mathcal{X}$, так как условия (R1) и (R3) для нее выполняются автоматически, а выполнение условия (R2) следует из того факта, что для любой абелевой группы A и любого эндоморфизма f этой группы $f(R(A)) \subseteq R(A)$ (см. [13] и [14]). Очевидно, что если в качестве радикала R мы будем брать кручение категории абелевых групп, то пара $\{O_{\mathcal{A}s}, R\}$ будет определять кручение в категории $\mathcal{X}$.

Следствие. Совокупность всех строгих радикалов категории $\mathcal{X}$ не является множеством.

Замечание 3.9. Рассмотрим пару радикалов $\{O_{\mathcal{A}s}, 1\}$, где $O_{\mathcal{A}s}$ — тривиальный радикал категории $\mathcal{A}s$ и $1(A) = A$ для любой абелевой группы A . Эта пара задает кручение R в категории $\mathcal{X}$. Легко проверить, что это кручение удовлетворяет следствию 4.20 работы [15], поэтому полная подкатегория $\mathcal{X}_0$ категории $\mathcal{X}$, порожденная всеми R -радикальными объектами, является подкатегорией локализации. Значит, в неабелевой категории $\mathcal{X}$ существует нетривиальная подкатегория локализации.

Автор благодарен М. Ш. Цаленко, под руководством которого была написана эта статья.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 5.1.1978

Գ. Գ. ԷՄԻՆ. Մինչքաղաձևություններ, բազմաձևությունների խմբիդր և խիստ ուղիկալները բոլոր օղակների վրա մոդուլների կատեգորիայում (ամփոփում)

Տրված է բոլոր օղակների վրա մոդուլների կատեգորիայի մինչքաղաձևությունների, բազմաձևությունների, հարկեցված բազմաձևությունների, խիստ ուղիկալների և կարագրությունը Ուսումնասիրված է այդ կատեգորիայի բազմաձևությունների խմբիդր կառուցվածքը

G. G. EMIN, *Prevarieties the groupoid of varieties and strict radicals in the category of modules over all rings (summary)*

The $\mathcal{X}$ category is considered, its objects are all possible pairs (A, U) (A is the right U — module over associative ring U) and the morphisms are the pairs of homomorphisms (φ_A, φ_U) under the condition $(\alpha \cdot u) \varphi_A = \alpha \varphi_U \cdot u \varphi_U$.

The description of the prevarieties, varieties and Kurosh's strict radicals of the mentioned category is given. The groupoid of the varieties of the category $\mathcal{X}$ is studied.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Г. Эмин. Многообразия и бимногообразия в категории модулей над всеми кольцами. Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., IX, № 3, 1974, 212—235.
2. М. Ш. Цаленко, Е. Г. Шульгейфер. Основы теории категорий, М., Изд. «Наука», 1974.
3. Б. И. Плоткин. Радикалы и многообразия в представлениях групп, Латв. матем. ежегодник, 10, 1972, 75—132.
4. L. Fuchs. The existence of indecomposable abelian groups of arbitrary power. Acta math. Acad. scient. hung., 10, № 3—4, 1959, 453—457.
5. S. MacLane. Categories for the working mathematician, New York, Heidelberg, Berlin, Springer—Verlag, 1971.
6. С. В. Полин. Построение бикатегорных структур, Математические заметки, 16, № 3, 1974, 455—460.
7. Stewart Patrick N. Strict radical classes of associative rings, Proc. Amer. Math. Soc., 39, № 2, 1973, 273—278.
8. Б. М. Рудык. Расширение модулей, Труды ММО, 21, 1970, 209—244.
9. М. Ш. Цаленко, Е. Г. Шульгейфер. Лекции по теории категорий, М., Изд. МГУ, 1970.
10. Е. А. Горбачук. Радикалы над разными кольцами, Математические исследования, VII, вып. 1 (23), 1972, 44—59.
11. А. Г. Курош. Радикалы колец и алгебр, Матем. сб., 33, № 1, 1953, 13—26.
12. Е. Г. Шульгейфер. К общей теории радикалов в категориях, Матем. сб., 51, № 4, 1960, 487—500.
13. Е. Г. Шульгейфер. Функционная характеристика строгих радикалов в категориях, Сиб. мат. ж., VII, № 6, 1966, 1412—1421.
14. А. П. Мишина, Л. А. Скорняков. Абелевы группы и модули, М., Изд. «Наука», 1969.
15. Е. Г. Шульгейфер. Локализации и сильно наследственные строгие радикалы в категориях, Труды ММО, 19, 1968, 271—301.