В. А. ЯВРЯН

ОБ АСИМПТОТИКЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ
 И СЛЕДЕ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В настоящей заметке уточняются и обобщаются результаты работы И. Вайдмана [1] и автора [2], [3]. При доказательстве полученных результатов существенную роль играет следующая (см. [4], стр. 240, 246)

Теорема М. Г. Крейна. Пусть $A = A_R + iA_I$ — вольтерров оператор, A_R и A_I — самосопряженные операторы и $A_I \in S_1$ где S_1 — пространство ядерных операторов. Тогда

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_-(r, A_R)}{r} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_-(r, A)}{r} = \frac{1}{\pi} \int_{\langle P \rangle} |dPA_I dP|_1. \quad (1)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{|\lambda_n| > \epsilon} \lambda_n(A_R) = 0. \quad (2)$$

Здесь $n_+(r, B)$ и $n_-(r, B)$ означают соответственно количества характеристических чисел оператора B в интервалах $[0, r]$ и $[-r, 0]$, $|B|_1$ — ядерная норма оператора B , $\langle P \rangle$ — любая максимальная собственная цепочка оператора A , $\lambda_n(B)$ — собственные значения оператора B .

Пусть $A(x)$ и $B(x)$ — прямоугольные, соответственно $n \times m$ и $m \times n$, матрицы-функции с элементами из пространства $L^2(a, b)$, $-\infty < a < b < \infty$.

В пространстве $L^2(a, b; H_n)$ n -мерных вектор-функций с интегрируемым квадратом модуля рассмотрим интегральный оператор

$$(Gf)(x) = \int_a^b G(x, t) f(t) dt \quad (a < x < b), \quad (3)$$

где квадратная матрица-функция n -го порядка $G(x, t)$ задается формулой

$$G(x, t) = \begin{cases} A(x) B(t), & x \leq t \\ B^*(x) A^*(t), & x > t. \end{cases}$$

Легко видеть, что оператор G принадлежит классу Гильберта—Шмидта. Справедлива

Теорема 1. Характеристические числа оператора G удовлетворяют асимптотическому соотношению

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_{\pm}(r, G)}{r} = \frac{1}{2\pi} \int_a^b |B^*(x) A^*(x) - A(x) B(x)|_1 dx. \quad (4)$$

Оператор G имеет след в смысле главного значения и

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{|\lambda_n| > \epsilon} \lambda_n(G) = \frac{1}{2} \int_a^b \text{Sp} (B^*(x) A^*(x) + A(x) B(x)) dx. \quad (5)$$

Доказательство. В пространстве $L^2(a, b; H_n)$ введем в рассмотрение вольтерров оператор

$$(Kf)(x) = \int_a^x (B^*(x) A^*(t) - A(x) B(t)) f(t) dt.$$

Легко видеть, что мнимая часть K_j оператора K выражается формулой

$$(K_j f)(x) = \frac{1}{2i} \int_a^x (B^*(x) A^*(t) - A(x) B(t)) f(t) dt$$

и является конечномерным, а именно $2m$ -мерным оператором. Очевидно также, что семейство ортогональных проекторов в $L^2(a, b; H_n)$

$$(P_t f)(x) = \begin{cases} 0, & a \leq x \leq t \\ f(x), & t < x \leq b, \end{cases} \quad P_a = I, P_b = 0 \quad (a \leq t \leq b)$$

служит собственной максимальной цепочкой для оператора K . Мы должны вычислить правую часть формулы (1).

Сначала предположим, что матрицы-функции $A(x)$ и $B(x)$ являются ступенчатыми, т. е.

$$A(x) = A_j, B(x) = B_j \quad \text{при } x \in \Delta_j = (x_j, x_{j+1}),$$

где $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_l = b$. Очевидно, что

$$(2iP_{\Delta_j} K_j P_{\Delta_j}) (x) = \begin{cases} (B_j^* A_j^* - A_j B_j) \int_{\Delta_j} f(t) dt, & x \in \Delta_j \\ 0, & x \notin \Delta_j, \end{cases}$$

где $P_{\Delta_j} = P_{x_{j+1}} - P_{x_j}$, $j = 0, 1, 2, \dots, l-1$.

Если обозначить через $\lambda_k^{(j)}$ и $\varphi_k^{(j)}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) собственные числа и соответствующие собственные элементы оператора $B_j^* A_j^* - A_j B_j$, действующего в пространстве H_n , то, очевидно, что система функций

$$f_k^{(j)}(t) = \begin{cases} \varphi_k^{(j)}, & t \in \Delta_j \\ 0, & t \notin \Delta_j \end{cases}$$

будет полной системой собственных элементов оператора $2i P_{\Delta_j} K_j P_{\Delta_j}$, которые соответствуют собственным значениям $\lambda_n^{(j)} \Delta_j$. Следовательно,

$$\|2i P_{\Delta_j} K_j P_{\Delta_j}\|_1 = \sum_{k=1}^n |\lambda_n^{(j)}| \Delta_j = \|B^* A^* - A B\|_1 \Delta_j.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{j=1}^l \|P_{\Delta_j} K_j P_{\Delta_j}\|_1 = \frac{1}{2} \int_a^b \|B^*(x) A^*(x) - A(x) B(x)\|_1 dx. \quad (6)$$

С другой стороны, очевидно, что в этом случае

$$\int_{\{P\}} \|dP K_j dP\|_1 = \sum_{j=1}^l \|P_{\Delta_j} K_j P_{\Delta_j}\|_1.$$

Таким образом, формула (4) в случае ступенчатых матриц-функций доказана.

Перейдем к общему случаю. Пусть $\tilde{A}(x)$ и $\tilde{B}(x)$ — такие ступенчатые матрицы-функции, что

$$\int_a^b |A(x) - \tilde{A}(x)|^2 dx < \varepsilon^2, \quad \int_a^b |B(x) - \tilde{B}(x)|^2 dx < \varepsilon^2,$$

$$\int_a^b |\tilde{A}(x)|^2 dx \leq 2 \int_a^b |A(x)|^2 dx, \quad \int_a^b |\tilde{B}(x)|^2 dx \leq 2 \int_a^b |B(x)|^2 dx.$$

Через $|C|$ обозначается норма оператора, порожденного матрицей C в пространстве H_n . Оценим норму оператора $P_{\Delta} (K_j - \tilde{K}_j) P_{\Delta}$, где K_j — мнимая часть оператора

$$(\tilde{K}f)(x) = \int_a^b (\tilde{B}^*(x) \tilde{A}^*(t) - \tilde{A}(x) \tilde{B}(t)) f(t) dt.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} \left| \int_{\Delta} (A(x) B(t) - \tilde{A}(x) \tilde{B}(t)) f(t) dt \right|^2 dx &\leq \int_{\Delta} |f(t)|^2 dt \int_{\Delta} dx \times \\ &\times \int_{\Delta} |A(x) B(t) - \tilde{A}(x) \tilde{B}(t)|^2 dt \leq \int_{\Delta} |f(t)|^2 dt \int_{\Delta} dx \int_{\Delta} (|A(x) - \\ &- \tilde{A}(x)| |B(t)| + |\tilde{A}(x)| |B(t) - \tilde{B}(t)|)^2 dt \leq 2 \int_{\Delta} |f(t)|^2 dt \times \end{aligned}$$

$$\times \left(\int_a^b |B(t)|^2 dt \int_a^b |A(t) - \bar{A}(t)|^2 dt + 2 \int_a^b |A(t)|^2 dt \int_a^b |B(t) - \bar{B}(t)|^2 dt \right).$$

Отсюда легко следует, что

$$|P_{\Delta_j} (K_j - \bar{K}_j) P_{\Delta_j}| \leq 6 \int_a^b |f(t)|^2 dt \left(\int_a^b |B(t)|^2 dt \int_a^b |A(t) - \bar{A}(t)|^2 dt + \right. \\ \left. + \int_a^b |A(t)|^2 dt \int_a^b |B(t) - \bar{B}(t)|^2 dt \right).$$

Следовательно

$$|P_{\Delta_j} (K_j - \bar{K}_j) P_{\Delta_j}| \leq 2 \left(\int_a^b |B(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_a^b |A(t) - \bar{A}(t)|^2 dt \right)^{1/2} + \\ + \left(\int_a^b |A(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_a^b |B(t) - \bar{B}(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^l |P_{\Delta_j} (K_j - \bar{K}_j) P_{\Delta_j}| \leq \left(\sum_{j=1}^l \int_{\Delta_j} |B(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^l \int_{\Delta_j} |A(t) - \bar{A}(t)|^2 dt \right)^{1/2} + \\ + \left(\sum_{j=1}^l \int_{\Delta_j} |A(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^l \int_{\Delta_j} |B(t) - \bar{B}(t)|^2 dt \right)^{1/2} = \\ = \left(\int_a^b |B(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_a^b |A(t) - \bar{A}(t)|^2 dt \right)^{1/2} + \left(\int_a^b |A(t)|^2 dt \right)^{1/2} \times \\ \times \left(\int_a^b |B(t) - \bar{B}(t)|^2 dt \right)^{1/2} \leq \varepsilon \left[\left(\int_a^b |B(t)|^2 dt \right)^{1/2} + \left(\int_a^b |A(t)|^2 dt \right)^{1/2} \right] = c\varepsilon.$$

Таким образом, так как $K_j - \bar{K}_j$ есть $4m$ -мерный оператор, то

$$\left| \sum_{j=1}^l |P_{\Delta_j} K_j P_{\Delta_j}|_1 - \sum_{j=1}^l |P_{\Delta_j} \bar{K}_j P_{\Delta_j}|_1 \right| \leq 4m \sum_{j=1}^l |P_{\Delta_j} (K_j - \bar{K}_j) P_{\Delta_j}| \leq 8mc\varepsilon.$$

Учитывая соотношение (6), после предельного перехода отсюда получаем, что

$$\int_{\langle P \rangle} |dP K_j dP|_1 = \frac{1}{2} \int_a^b |B^*(x) A^*(x) - A(x) B(x)|_1 dx. \quad (7)$$

Это вместе с приведенной формулой (1) М. Г. Крейна дает (4).

Для доказательства соотношения (5) сначала заметим, что

$$((K_R - G) f)(x) = -\frac{1}{2} \int_a^b (B^*(x) A^*(t) + A(x) B(t)) f(t) dt, \quad (8)$$

где K_R — вещественная часть оператора K . Отсюда видно, что $K_R - G$ — конечномерный оператор. Следовательно, по теореме А. С. Маркуса ([5], стр. 115) имеем

$$\text{Sp}(K_R - G) = \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_j^+(K_R) - \lambda_j^+(G)) + \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_j^-(K_R) - \lambda_j^-(G)), \quad (9)$$

где $\lambda_k^+(B)$ ($\lambda_k^-(B)$) — положительные (отрицательные) собственные значения оператора B , расположенные в порядке убывания (возрастания). Так как оператор $K_R - G$ есть $2m$ -мерный оператор, то по известным неравенствам Куранта ([6], стр. 258)

$$\lambda_{n+2m}^+(G) \leq \lambda_n^+(K_R), \quad \lambda_{n+2m}^-(K_R) \leq \lambda_n^-(G).$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sum_{\lambda_j^+(K_R) > \varepsilon} \lambda_j^+(K_R) - \sum_{\lambda_j^+(G) > \varepsilon} \lambda_j^+(G) \right) = \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_j^+(K_R) - \lambda_j^+(G)),$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sum_{\lambda_j^-(K_R) < -\varepsilon} \lambda_j^-(K_R) - \sum_{\lambda_j^-(G) < -\varepsilon} \lambda_j^-(G) \right) = \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_j^-(K_R) - \lambda_j^-(G)).$$

Таким образом, формулу (9) можно переписать в виде

$$\text{Sp}(K_R - G) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sum_{|\lambda_j(K_R)| > \varepsilon} \lambda_j(K_R) - \sum_{|\lambda_j(G)| > \varepsilon} \lambda_j(G) \right).$$

Теперь заметим, что согласно формуле (2) М. Г. Крейна

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{|\lambda_j(K_R)| > \varepsilon} \lambda_j(K_R) = 0,$$

откуда

$$\text{Sp}(K_R - G) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{|\lambda_j(G)| > \varepsilon} \lambda_j(G).$$

С другой стороны, из (8) следует, что

$$\text{Sp}(K_R - G) = -\frac{1}{2} \int_a^b \text{Sp}(B^*(x) A^*(x) + A(x) B(x)) dx.$$

Последние две формулы и доказывают соотношение (5).

Следствие. Если ядро оператора (3), действующего в пространстве $L^2(a, b)$, имеет вид

$$G(x, t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^m u_k(x) v_k(t), & x \leq t \\ \sum_{k=1}^m \overline{u_k(t)} \overline{v_k(x)}, & x > t, \end{cases}$$

где $u_k(x) \in L^2(a, b)$ и $v_k(x) \in L^2(a, b)$, то

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_{\pm}(r, G)}{r} = \frac{1}{\pi} \int_a^b \left| 1 - \sum_{k=1}^m u_k(x) v_k(x) \right| dx. \quad (10)$$

Это следствие без доказательства приведено в [3].

Для доказательства надо положить

$$A(x) = (u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x)), \quad B^*(x) = (\overline{v_1(x)}, \overline{v_2(x)}, \dots, \overline{v_m(x)}).$$

В работе И. Вайдмана [1] вместо (10) доказано, что существует такое $M > 0$, что $M \lambda_n(G) > n$, где $\{\lambda_n(G)\}_{n=1}^{\infty}$ — характеристические числа оператора G .

Теорема 1 может быть обобщена следующим образом.

Теорема 2. Пусть $A(x, t)$ ($a \leq x, t \leq b$) — такая квадратная матрица n -го порядка с элементами из $L^2(a, b)$, что оператор

$$(Af)(x) = \int_a^b A(x, t) f(t) dt$$

является ядерным. Тогда для характеристических чисел интегрального оператора G , порожденного эрмитовым ядром

$$G(x, t) = \begin{cases} A(x, t), & x \leq t \\ A^*(t, x), & x > t, \end{cases}$$

справедлива асимптотическая формула

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_{\pm}(r, G)}{r} = \frac{1}{2\pi} \lim_{b \rightarrow 0} \int_a^b |A_i(x, x) - A_i(x, x)|_1 dx,$$

где

$$A_i(x, t) = \frac{1}{4i^2} \int_{x-b}^{x+b} \int_{t-b}^{t+b} A(u, v) dudv. \quad (11)$$

Доказательство. В пространстве $L^2(a, b; H_n)$ рассмотрим вольтерров оператор

$$(Kf)(x) = \int_a^x (A^*(t, x) - A(x, t)) f(t) dt.$$

Мнимая часть K_J этого оператора равна

$$(K_J f)(x) = \frac{1}{2i} \int_a^b (A^*(t, x) - A(x, t)) f(t) dt = -(A_J f)(x)$$

и по условию принадлежит классу S_1 .

Напишем разложение Шмидта оператора A :

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} s_i(\cdot, \psi_i) \varphi_i.$$

Здесь $s_i (i = 1, 2, \dots)$ — сингулярные числа оператора A , $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty}$ — ортонормальные системы в пространстве $L^2(a, b; H_n)$, а ряд сходится в ядерной норме, т. е. $\|A_N - A\|_1 \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, где

$$A_N = \sum_{i=1}^N s_i(\cdot, \psi_i) \varphi_i.$$

Ядро

$$A_N(x, t) = \sum_{i=1}^N s_i \varphi_i(x) \psi_i^*(t) \text{ (почти всюду)}$$

оператора A_N можно записать в виде

$$A_N(x, t) = A_N(x) B_N(t),$$

где

$$A_N(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_N(x)),$$

$$B_N^*(x) = (s_1 \psi_1(x), s_2 \psi_2(x), \dots, s_N \psi_N(x))$$

— прямоугольные $n \times N$ матрицы-функции со столбцами

$$\varphi_j(x) = \{\varphi_{kj}(x)\}_{k=1}^n \text{ и } \psi_j(x) = \{\psi_{kj}(x)\}_{k=1}^n \quad (j=1, 2, \dots, N)$$

соответственно. Согласно формуле (7) имеем

$$\int_{\langle P \rangle} |dP (K_N)_J dP|_1 = \frac{1}{2} \int_a^b |B_N^*(x) A_N^*(x) - A_N(x) B_N(x)|_1 dx, \quad (12)$$

где

$$(K_N f)(x) = \int_a^x (B_N^*(x) A_N^*(t) - A_N(x) B_N(t)) f(t) dt.$$

Так как $\|(K_N)_J - K_J\|_1 = \|(A_N)_J - A_J\|_1$ при $N \rightarrow \infty$, то учитывая непрерывность функционала, задаваемого левой частью (II) в ядерной метрике (см. [7], стр. 378), получаем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\langle P \rangle} |dP (K_N)_J dP|_1 = \int_{\langle P \rangle} |dP K_J dP|_1.$$

Нетрудно показать, что элементы

$$a_{jk}^{(N)}(x, t) = \sum_{l=1}^N s_l \varphi_{jl}(x) \overline{\psi_{kl}(t)}$$

матрицы-функции $A_N(x, t)$ в метрике $L^2(a, b)$ стремятся к соответствующим элементам $a_{jk}(x, t)$ матрицы-функции $A(x, t)$. Отсюда легко получить, что ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty} s_l \varphi_l(x) \psi_l^*(x) \stackrel{\text{онр.}}{=} A(x, x)$$

сходится поэлементно в пространстве $L^2(a, b)$. Это означает, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b |A_N(x) B_N(x) - A(x, x)| dx = 0.$$

Из очевидного неравенства $|T|_1 \leq n |T|$ для любой матрицы T n -го порядка получаем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b |A_N(x) B_N(x) - A(x, x)|_1 dx = 0.$$

Переходя к пределу в равенстве (12) и учитывая приведенную выше теорему М. Г. Крейна, получаем

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_{\pm}(r, K_R)}{r} = \frac{1}{2\pi} \int_a^b |A^*(x, x) - A(x, x)|_1 dx.$$

Легко видеть, что правую часть можно переписать в виде (11), где столбцы функций $\varphi_l(x)$ и $\psi_l(x)$ явно не участвуют, а фигурирует только ядро $A(x, t)$.

Теперь заметим, что

$$((G - K_R)f)(x) = \frac{1}{2} \int_a^b (A(x, t) + A^*(t, x)) f(t) dt = (A_R f)(x).$$

Отсюда вытекает, что $G - K_R = T \in S_1$, т. е. $\sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) < \infty$. Следовательно, $n s_n(T) \rightarrow 0$, при $n \rightarrow \infty$ и по теореме Фань Цюя (см. [4], стр. 52) заключаем, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_{\pm}(r, G)}{r} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_{\pm}(r, K_R)}{r}.$$

Теорема 2 доказана.

Эта теорема является обобщением одной теоремы М. Г. Крейна (см. [7], стр. 412). Действительно, если $B(x, t)$ — эрмитово ядро, по-

рождающее ядерный интегральный оператор, то для ядра $A(x, t) = -iB(x, t)$ будем иметь

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_r(r, G)}{r} &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_a^b |B_i^*(x, x) + B_i(x, x)|_1 dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_a^b |B_i(x, x)|_1 dx, \end{aligned}$$

где

$$(Gf)(x) = i \int_a^b \operatorname{sign}(x-t) B(x, t) f(t) dt.$$

Здесь учитывалось, что для эрмитова непрерывного ядра $B_i(x, t)$ матрица $B_i(x, x)$ будет эрмитовой.

В заключение заметим, что метод доказательства формулы (5) в предположениях теоремы 2 неприменим. Дело в том, что из $B - C \in S_1$, $B \in S_2$, $C \in S_2$, как легко видеть, не следует, что

$$\operatorname{Sp}(B - C) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\sum_{|\lambda_j(B)| > \epsilon} \lambda_j(B) - \sum_{|\lambda_j(C)| > \epsilon} \lambda_j(C) \right).$$

В этом случае можно только утверждать, что существует такая последовательность $\epsilon_n > 0$, $\epsilon_n \rightarrow 0$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{|\lambda_k| > \epsilon_n} \lambda_k(G) = \frac{1}{2} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_a^b \operatorname{Sp}(A_i^*(x, x) + A_i(x, x)) dx.$$

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 26.V.1978

Վ. Ա. ՅԱՎՐԻԱՆ. Որոշ ինտեգրալ օպերատորների սեփական արժեքների ասիմպտոտիկայի և նեյմի մասին (առփոփում)

Աշխատանքում ստացված է (3) ինտեգրալ օպերատորի սեփական արժեքների ասիմպտոտիկան (թեորեմ 1 և 2), ինչպես նաև հաշվված է նրա հետքը զրոավոր իմաստով:

V. A. JAVRIAN. On the asymptotics of eigenvalues and the spur of some integral operators (summary)

In the theorems 1 and 2 the asymptotics of the eigenvalues and the spur of the integral operator (3) is obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Weidmann. Wertteilung der Eigenwerte für eine Klasse von Integraloperatoren in $L_2(a, b)$, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 276, 1975, 213—220.

2. В. А. Яврян. О следе некоторых интегральных операторов, Изв. АН Арм.ССР, „Математика“, 12, № 2, 1977, 143—146.
3. В. А. Яврян. О собственных значениях некоторых интегральных операторов, Изв. АН Арм.ССР, „Математика“, 13, № 2, 1978, 122—127.
4. И. Ц. Гохбері, М. Г. Крейн. Введение в теорию линейных несамопряженных операторов, М., Изд. „Наука“, 1965.
5. А. С. Маркус. Собственные и сингулярные числа сумм и произведения линейных операторов, УМН, 19, вып. 4, (118), 1964, 93—123.
6. Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь. Лекции по функциональному анализу, М., ИИЛ, 1954.
7. И. Ц. Гохбері, М. Г. Крейн. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения, М., Изд. „Наука“, 1967.