ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIV, № 3, 1979 Математика

С. В. ХРУЩЕВ

АЛЬТЕРНАТИВА БРЕННАНА ДЛЯ МЕР С КОНЕЧНОЙ ЭНТРОПИЕЙ

§ 1. Введение

Всякий ли субнормальный оператор имеет нетривиальное инвариантное подпространство? Этот вопрос, получивший недавно утвердительный ответ в работе Scott'a Brown'a [1], привел к изучению пространств $H^p(\mu)$, являющихся замыканием семейства многочленов $\mathbf{P}$ в $L^p(\mu)$, где μ — неотрицательная мера из плоскости $\mathbf{C}$ с компактным носителем, а $p>1$. С помощью спектральной теоремы сформулированный выше вопрос сводится к вопросу о существовании инвариантных подпространств у оператора $\mathbf{z}$ умножения на z $(z(\xi)\equiv\xi,\ \xi\in\mathbf{C})$ в $H^2(\mu)$. Отбросим неинтересный случай $\mu=\delta(\xi)$, $\delta(\xi)$ — единичная нагрузка в точке ξ. Очевидно, что оператор $\mathbf{z}$ имеет инвариантное подпространство, если $L^2(\mu)=H^2(\mu)$ или, если существует точка ξ такая, что функционал $\varphi\to\varphi(\xi)$, $\varphi\in\mathbf{P}$ ограничен в $H^2(\mu)$. В результате мы приходим к следующей альтернативе, которую справедливо назвать альтернативой Бреннана, так как J. Brennan внес большой вклад в исследование этой возможности. Пусть $1\leqslant p<\infty$.

Определение. Альтернатива Бреннана с показателем p справедлива для меры μ, короче $\mu\in(B_p)$, если либо $H^p(\mu)=L^p(\mu)$, либо существует точка ξ, $\xi\in\mathbf{C}$ такая, что функционал $\varphi\to\varphi(\xi)$, $\varphi\in\mathbf{P}$ ограничен в $H^p(\mu)$.

Как уже отмечалось выше, с проблемой субнормальных операторов связана альтернатива (B_2), и хотя Scott Brown доказал, что всякий субнормальный оператор имеет нетривиальное инвариантное подпространство, все же остается неясным — для всякой ли меры μ справедливо включение $\mu\in(B_2)$. Brennan [2] доказал, что $\mu\in(B_p)$ для любой меры μ, если $p>2$. С другой стороны, нетрудно показать, что справедливость альтернативы Бреннана с показателем $p=1$ влечет ее справедливость при всех p. Действительно, если $H^p(\mu)\neq L^p(\mu)$, то существует функция g, $g\in L^q(\mu)$, $q=p/(p-1)$ такая, что

$$\int\varphi g\,d\mu=0 \tag{1}$$

для любого полинома φ. Рассмотрим неотрицательную меру $\nu=|g|\cdot\mu$. Из (1) следует, что $L^1(\nu)\neq H^1(\nu)$. Так как по предположению (B_1) совпадает с множеством всех неотрицательных мер с компактным носителем, то найдется точка ξ и постоянная C, $C>0$ такие, что

$$|\varphi(\xi)| \leq C\cdot\|\varphi\|_{L^1(\nu)} \leq C\cdot\|\varphi\|_{L^p(\mu)}\cdot\|g\|_{L^q(\mu)}.$$

Следовательно, функционал $\varphi \to \varphi(\xi)$ ограничен в $H^p(\mu)$.

В этой работе мы будем иметь дело с мерами μ, абсолютно непрерывными относительно обычной меры Лебега dS на плоскости. Речь пойдет об уточнении недавнего результата Бреннана [3], который доказал, что $\mu\in(B_1)$, если $\mu = f dS$ и $f\in L^{1+\varepsilon}(dS)$ для какого-нибудь ε, $\varepsilon>0$.

Теорема. *Пусть $\mu = f dS$, носитель меры μ компактен и*

$$\int f(\log^+ f)^p\, dS < +\infty,\quad p\geq 1.$$

Тогда $\mu\in(B_p)$.

Профессор Бреннан сообщил мне, что он может получить доказательство этой теоремы с помощью другого метода.

§ 2. Доказательство теоремы

Лемма 1. *Если теорема верна при $p=1$, то она верна и при любом p, $p\geq 1$.*

Доказательство. Пусть $p>1$ и $H^p(\mu)\neq L^p(\mu)$. Тогда существует функция g, $g\in L^q(\mu)$, удовлетворяющая условию (1). Проверим, что для меры $\nu = |g| f dS$ справедливы все предпосылки нашей теоремы. Имеем

$$\int |gf|\log^+|gf|\,dS \leq \int (|g|\log^+|g|)\cdot|f|\,dS + \int |g|\cdot f^{1/q}\cdot f^{1/p}\log^+ f\,dS \leq$$

$$\leq \text{Const.}\int |g|^q f\,dS + \|g\|_{L^q(\mu)}\Big(\int f(\log^+ f)^p\,dS\Big)^{1/p} < +\infty.$$

Так как мы предположили справедливость теоремы при $p=1$, то $\nu\in(B_1)$, откуда легко следует, что $\mu\in(B_p)$ (см. введение). ●

Перейдем к рассмотрению случая $p=1$. Условимся символом $\hat{\nu}$ обозначать интеграл Коши меры ν:

$$\hat{\nu}(z) \overset{\text{def}}{=} \int \frac{d\nu(\zeta)}{\zeta - z}.$$

Хорошо известно, что $\hat{\nu}\in L^1_{\text{loc}}(dS)$ для любой конечной меры ν на плоскости. Пусть $0<d<2$, ν — конечная борелевская мера на плоскости. Тогда

$$U^\nu_d(z) \overset{\text{def}}{=} \int \frac{d\nu(\zeta)}{|\zeta - z|^{2-d}}$$

— потенциал Рисса порядка d меры ν.

Предположим, что все функционалы значений в точке разрывны в $H^1(\mu)$. Мы докажем, что тогда $H^1(\mu) = L^1(\mu)$. Для этого достаточно показать, что

$$g \in L^{\infty}(\mu), \quad \int \varphi g\, d\mu = 0, \ \varphi \in \mathbf{P} \Rightarrow g = 0.$$

Итак, пусть $g \in L^{\infty}(\mu)$ и $\int \varphi g\, d\mu = 0$ для любого многочлена φ. Известное равенство (см. [4], стр. 49)

$$\bar{\partial}\hat{\nu} = -\pi\nu,$$

справедливое в смысле теории обобщенных функций, позволяет нам доказывать, что $\widehat{g\mu} = 0$ почти всюду по мере Лебега dS.

Пусть

$$\lambda > 0 \text{ и } E_{\lambda} \overset{\text{def}}{=} \{\zeta : |\widehat{g\mu}(\zeta)| \leqslant \lambda\}.$$

Бреннан показал, что множество E_{λ} является в некотором смысле „толстым“.

Определение. Измеримое множество E на плоскости называется „толстым“, если для всякой точки ξ, $\xi \in \mathbf{C}$ почти всякая окружность с центром в точке ξ пересекает E по множеству положительной дуговой меры.

Из [3] можно извлечь следующую теорему.

Теорема (Brennan [3]). Пусть μ — произвольная неотрицательная мера на плоскости с компактным носителем и пусть для всякого ξ, $\xi \in \mathbf{C}$ функционал значения в точке ξ не является ограниченным в $H^{p}(\mu)$, $1 \leqslant p < \infty$. Тогда если $g \in L^{q}(\mu)$, $q = p/(p-1)$ и $\int \varphi g\, d\mu = 0$ для любого многочлена φ, то при всяком λ, $\lambda > 0$ множество $E_{\lambda} = \{\xi : |\widehat{g\mu}(\xi)| \leqslant \lambda\}$ является толстым.

Доказательство этой теоремы короткое и мы приведем его для удобства читателей. Пусть $\xi \in \mathbf{C}$ и пусть X — ограниченное замкнутое множество положительной меры на полуоси $(0, +\infty)$ такое, что длина $E_{\lambda} \cap \{\zeta : |\xi - \zeta| = x\}) = 0$ для всякого x, $x \in X$. Множество $X^{*} = \bigcup_{x \in X} \{\zeta : |\xi - \zeta| = x\}$ имеет положительную плоскую меру Лебега и $S(E_{\lambda} \cap X^{*}) = 0$. Если $\varphi \in \mathbf{P}$, то

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{S(X^{*})} \int_{X^{*}} \varphi\, dS. \tag{2}$$

Подставляя в (1) $\dfrac{\varphi(\zeta) - \varphi(z)}{\zeta - z}$ вместо φ, получим, что $\varphi(z) = \dfrac{\widehat{\varphi g\mu}(z)}{\widehat{g\mu}(z)}$, если $\widehat{g\mu}(z) \neq 0$. Следовательно

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{S(X^{*})} \int_{X^{*}} \frac{\widehat{\varphi g\mu}(\zeta)}{\widehat{g\mu}(\zeta)}\, dS(\zeta) = \int_{\mathbf{C}} \varphi(z)\, g(z)\, d\mu(z)\, \frac{1}{S(X^{*})} \int_{X^{*}} \frac{dS(\zeta)}{\widehat{g\mu}(\zeta)(z - \zeta)}.$$

Внутренний интеграл есть непрерывная функция как свертка локально суммируемой функции z^{-1} и ограниченной $1/\widehat{g\mu} \mid X^*$. Итак

$$|\varphi(\xi)| \leqslant \text{Const.} \|\varphi\|_{L^p(\mu)} \cdot \|g\|_{L^q(\mu)}. \quad \bullet$$

Преобразования Коши $\hat{\nu}$ кооечных мер ν обладают некоторой „непрерывностью". Поэтому есть надежда, что множеству E_λ должны принадлежать и точки плоскости, близкие к нему. Точнее, если для какой-либо точки ξ, $\xi \in \mathbf{C}$ удастся расположить на E_λ семейство вероятностных мер $(\nu_\delta)_{\delta>0}$ так, чтобы

$$\widehat{g\mu}(\xi) = \lim_{\delta\to 0+} \int\limits_{\mathbf{C}} \widehat{g\mu}\, d\nu_\delta,$$

то, очевидно, $\xi \in E_\lambda$. Следующая лемма Карлесона [5] (см. также [6], стр. 170) позволяет сформулировать критерий существования такого семейства $(\nu_\delta)_{\delta>0}$. Положим $\Delta(\xi, \delta) \overset{\text{def}}{=} \{\zeta\colon |\xi - \zeta| < \delta\}$.

Лемма Карлесона. Пусть μ — конечная комплексная мера с компактным носителем на плоскости и пусть $U_1^{|\mu|}(\xi) < +\infty$. Предположим, что $(\nu_\delta)_{\delta>0}$ — семейство вероятностных мер, такое, что носитель меры ν_δ лежит в $\Delta(\xi, \delta)$ для каждого δ, $\delta > 0$ и что

$$\lim_{\delta\to 0+} \int\limits_{\Delta(\xi, 2\delta)} U_1^{\nu_\delta} d|\mu| = 0. \tag{*}$$

Тогда

$$\hat{\mu}(\xi) = \lim_{\delta\to 0+} \int\limits_{\mathbf{C}} \hat{\mu}\, d\nu_\delta.$$

Доказательство этой леммы приводится для полноты изложения Оригинальное доказательство близкого результата см. в [5].

$$\hat{\mu}(\xi) - \int \hat{\mu}\, d\nu_\delta = \int\limits_{|\zeta-\xi|<\delta} d\nu_\delta(\zeta) \int\limits_{|z-\xi|>2\delta} \left\{\frac{1}{z-\xi} - \frac{1}{z-\zeta}\right\} d\mu(z) +$$

$$+ \int\limits_{|\zeta-\xi|<\delta} d\nu_\delta(\zeta) \int\limits_{|z-\xi|<2\delta} \frac{d\mu(z)}{z-\xi} - \int d\nu_\delta(\zeta) \int\limits_{|z-\xi|<2\delta} \frac{d\mu(z)}{z-\zeta}.$$

Первый интеграл в правой части предыдущего равенства по модулю не превосходит интеграла

$$I_1(\delta) = \int\limits_{|z-\xi|>2\delta} \left| \hat{\nu}_\delta(z) - \frac{1}{\xi - z} \right| d|\mu|.$$

Так как $|\hat{\nu}_\delta(z)| \leqslant \dfrac{\text{Const}}{|z-\xi|}$ при $|z-\xi| > 2\delta$ и $\hat{\nu}_\delta(z) \to (\xi - z)^{-1}$ поточечно, то по теореме Лебега $\lim\limits_{\delta\to 0+} I_1(\delta) = 0$. Второй интеграл меньше интеграла $\int\limits_{|z-\xi|<2\delta} \frac{d\,|\mu|}{|z-\xi|}$, который стремится к нулю при $\delta \to 0+$. Последний интеграл стремится к нулю по условию. ●

Предположим, что нам удалось расположить для каждого δ, $\delta>0$ на множестве $E_\delta \cap \Delta(\xi, \delta)$ вероятностную меру ν_δ так, чтобы выполнялось условие (*). Тогда лемма Карлесона позволяет заключить, что $\xi \in E_1$, если, конечно, $U_1^{|\mu|}(\xi) < +\infty$. Так как последнее имеет место для почти всех ξ, $\xi \in \mathbf{C}$, то для завершения доказательства теоремы достаточно осуществить указанный выше выбор мер ν_δ для почти любой точки ξ плоскости. Следующая лемма принадлежит Бреннану [3].

Лемма Бреннана. Пусть E — „толстое" множество и $\delta>0$. Для любого ξ, $\xi \in \mathbf{C}$ существует вероятностная мера ν_δ на множестве $\Delta(\xi, \delta) \cap E$ такая, что для любой невозрастающей неотрицательной функции h на полуоси $(0, +\infty)$ справедливо неравенство

$$\int h(|\xi - z|)\, d\nu_\delta(\xi) \leqslant \frac{2}{\delta} \int\limits_0^\delta h(x)\, dx. \tag{3}$$

Доказательство. Можно считать, что $\xi = 0$. Пусть π — отображение, которое каждому r, $r>0$ сопоставляет первую точку пересечения окружности с центром в нуле и радиуса r с некоторым замкнутым подмножеством E, мера которого сколь угодно близка к мере множества E. Мера ν_δ — есть нормированный образ линейной меры Лебега на отрезке $(0, \delta)$ при отображении π. Подробности см. в [3] или в [6], стр. 169—170. ●

Мы докажем теперь, что семейство построенных мер $(\nu_\delta)_{\delta>0}$ обладает свойством (*), если только мера μ удовлетворяет условиям теоремы. Для этого нам потребуется оценка функций распределения потенциалов U_1^μ. Лемма Литтлвуда, использовавшаяся также в [3], позволяет это сделать без труда.

Лемма Литтлвуда. Пусть μ — вероятностная мера на плоскости и $p>2$. Тогда

$$\left(\int\limits_{\mathbf{C}} |U_1^\mu|^p\, dS\right)^{1/p} \leqslant K_p \,(\sup_{\zeta\in\mathbf{C}} U_q^\mu(\zeta))^{1/q}$$

и $\overline{\lim\limits_{p\to+\infty}} K_p < +\infty$.

Доказательство этой леммы основано на технике интерполяции. Его можно найти в книге Карлесона [7] на стр. 83—84. Стоит, однако, предупредить читателя, что в [7] эта лемма не сформулирована, а доказывается как часть одной специальной теоремы. Кроме того, так как эта лемма в [7] используется в грубой форме, то и заключительная оценка проведена с искусственным загрублением. Тем не менее доказательство леммы с помощью рассуждений из [7] восстанавливается без труда.

Комбинируя лемму Литтлвуда с неравенством (3), получим

$$\left(\int |U_1^{\nu_\delta}|^p \, dS\right)^{1/p} \leqslant K_p \left(\frac{2}{\delta}\int_0^\delta \frac{dx}{x^{2-q}}\right)^{1/q} = K_p \left(\frac{1}{q-1}\right)^{1/q} \cdot \left(\frac{1}{\delta^{2-q}}\right)^{1/q}.$$

Отсюда для y, $y > 0$

$$S(\{\xi:\, U_1^{\nu_\delta}(\xi) > y\}) \leqslant \frac{1}{y^p}\int |U_1^{\nu_\delta}|^p \, dS \leqslant \frac{K_p \delta}{y} \cdot \left(\frac{K_p}{y\delta(q-1)}\right)^{1/q-1}. \qquad (4)$$

Лемма 1. *Существует постоянная* C, $C > 0$ *такая, что для* y, $y > \frac{C}{\delta}$ *справедливо неравенство*

$$S(\{\xi:\, U_1^{\nu_\delta}(\xi) > y\}) < \mathrm{Const}\, \delta^2 e^{-ky\delta},$$

где k *и* Const — *абсолютные положительные постоянные.*

Доказательство. Положим в (4) $\frac{1}{q-1} = \frac{y\delta}{Ae}$, где A — пока произвольное положительное число. Элементарные вычисления показывают, что

$$\left(\frac{K_p}{y\delta(q-1)}\right)^{1/q-1} = \exp\left\{\frac{y\delta}{Ae}\log\frac{K_p}{Ae}\right\}.$$

Выберем теперь константу A так, чтобы $A > K_p$ для всех p, $p \geqslant 3$, т. е. для $q = \frac{p}{p-1} \leqslant 3/2$. Но $1 < q \leqslant 3/2$ в том и только в том случае, если $\frac{1}{q-1} \geqslant 2$. Значит, если положить постоянную C равной $2Ae$, то окажется возможным выбрать q так, что $\frac{1}{q-1} = \frac{y\delta}{Ae}$ и одновременно $A > K_p$. Отсюда

$$S(\{\xi:\, U_1^{\nu_\delta}(\xi) > y\}) \leqslant \frac{A\delta^2}{y\delta} e^{-\frac{y\delta}{Ae}} \leqslant \mathrm{Cost}\, \delta^3 d^{-ky\delta}. \; \bullet$$

Приступим к проверке условия (*) для почти всех ξ, $\xi \in \mathbf{C}$. Не уменьшая общности, можно считать, что

$$\int \frac{f \log^+ f}{|\zeta - \xi|}\, dS(\zeta) < +\infty. \qquad (5)$$

Положим $G = \Delta(\xi, 2\delta) \cap \left\{\zeta:\, U_1^{\nu_\delta} > \frac{C}{\delta}\right\}$. Ясно, что

$$\int_{\Delta(\xi,\, 2\delta)} U_1^{\nu_\delta}\, d\mu \leqslant \frac{C}{\delta}\int_{\Delta(\xi,\, 2\delta)} d\mu + \int_G U_1^{\nu_\delta}\, d\mu.$$

Ввиду (5), первое слагаемое в правой части предыдущего неравенства есть $o(1)$ при $\delta \to 0$.

Лемма 2. *Пусть h — неотрицательная функция на плоскости, а a — положительное число. Тогда*

$$\int_G hf\,dS \leqslant a\int_G f\log^+ f\,dS + \int_G he^{\frac{1}{a}h}\,dS.$$

Доказательство. Если $h \leqslant a\log f$, то $hf \leqslant af\log f$. Если же $h > a\log f$, то $f < e^{\frac{1}{a}h}$ и $hf \leqslant he^{\frac{1}{a}h}$. Следовательно,

$$hf \leqslant af\log^+ f + he^{\frac{1}{a}h} \bullet$$

Мы воспользуемся этой леммой с $h = U_1^{\gamma\delta}$, а постоянную a подберем позднее. Положим

$$G_n = \left\{\xi \in G\colon \frac{Cn}{\delta} < U_1^{\gamma\delta} \leqslant \frac{C(n+1)}{\delta}\right\}.$$

Из леммы 1 следует, что

$$S(G_n) \leqslant \mathrm{Const}\cdot\delta^2 e^{-kCn}.$$

Кроме того, $G = \bigcup_{n\geqslant 1} G_n$. Поэтому

$$\int_G U_1^{\gamma\delta} e^{\frac{1}{a}U_1^{\gamma\delta}}\,dS \leqslant \sum_{n\geqslant 1}\frac{C(n+1)}{\delta}e^{\frac{1}{a}\frac{C(n+1)}{\delta}}\cdot\delta^2 e^{-kCn} =$$

$$= C\delta\sum_{n\geqslant 1}(n+1)\exp\left\{C\left(\frac{n+1}{a\delta}-kn\right)\right\}.$$

Если теперь выбрать $a = \frac{4}{k\delta}$, то мы видим, что

$$\int_G U_1^{\gamma\delta} e^{\frac{1}{a}U_1^{\gamma\delta}}\,dS = O(\delta).$$

Отсюда

$$\int_G U_1^{\gamma\delta} f\,dS \leqslant \frac{4}{k\delta}\int_{\Delta(\zeta,\,2\delta)} f\log^+ f\,dS + O(\delta).$$

Это завершает доказательство теоремы.

Ленинградское отделение
Математического института АН СССР
им. В. А. Стеклова

Поступила 15.IV.1979

Ս. Վ. ԽՐՈՒՇՉՈՎ. Բրեննանի ալտերնատիվը վերջավոր էնտրոպիայով չափերի համար (ամփոփում)

Հոդվածում ապացուցված է հետևյալ արդյունքը։

Դիցուք $d\mu(s) = f(s)\,ds$, *որտեղ* $f(s) \geq 0$, ds-*ը Լեբեգի չափն է հարթության վրա։ Այդ դեպքում տեղի ունի հետևյալ պնդումներից մեկը և միայն մեկը.*
կամ $H^p(\mu) = L^p(\mu)$, *կամ գոյություն ունի* $\xi \in C^1$ *կետ այնպես, որ* $\varphi \to \varphi(\xi)$ *ֆունկցիոնալը սահմանափակ է* $H^p(\mu)$ *տարածությունում, որտեղ* $H^p(\mu)$-*ն բազմանդամների փակույթն է* $L^p(\mu)$ *տարածությունում։*

S. V. KCHRUSHEV. *The Brennan alternative for measures with finite entropy* (summary)

The following theorem is proved.

Let $d\mu(s) = f(s)\,ds$ where $f(s) \geq 0$, ds is the planar Lebesque measure.

If $\int f(\ln^+ f)^p\,ds < +\infty$, $1 < p < +\infty$ then either $H^p(\mu) = L^p(\mu)$ or there is a point $\xi \in C^1$ such that the functional $\varphi \to \varphi(\xi)$ is bounded in $H^p(\mu)$, where $H^p(\mu)$ is the closure of polinomials in the $L^p(\mu)$ space.

ЛИТЕРАТУРА

1. *S. W. Brown*. Some invariant subspaces for subnormal operators, preprint, 1978.
2. *J. E. Brennan*. Invariant subspaces and rational approximation, J. of Functional Analysis, 7, 1971, 285—310.
3. *J. E. Brennan*. Point evaluations, invariant subspaces and approximation in the mean by polynomials, preprint 1978, to appear in J. Functional Analysis.
4. *L. Schwartz*. Theorie des distributions, vol 1, Paris, Actualities Scient. et Indust., 1951.
5. *L. Carleson*. Mergeljan's theorem on uniform polynomial approximation, Math. Scand., 15, 1965, 167—175.
6. *J. Brennan*. Invariant subspaces and weighted polinomial approximation, Arkiv för Mat., 11, 1973, 167—189.
7. *Л. Карлесон*. Избранные проблемы теории исключительных множеств, М., Изд. „Мир", 1971.