

С. А. ГРИГОРЯН

ОБ АЛГЕБРАХ КОНЕЧНОГО ТИПА НА КОМПАКТНОЙ ГРУППЕ G

В в е д е н и е

Пусть G — компактная абелева группа и $C(G)$ — алгебра всех непрерывных комплекснозначных функций на G . Для равномерных алгебр B и A ($B \subset A$) рассмотрим семейство $\{D\}$ всех тех замкнутых подалгебр $C(G)$, что $B \subset D \subset A$. Семейство $\{D\}$ является частично упорядоченным множеством по включению. Пусть P — линейно упорядоченное подмножество семейства $\{D\}$.

Типом алгебры B относительно A назовем мощность

$$\gamma = \sup_P \text{card } P.$$

Тип алгебры B относительно A будем обозначать через $t_A(B)$. Если тип $t_A(B)$ конечен, то будем говорить, что алгебра B — конечного типа относительно A . Если же конечно $t_{C(G)}(B)$, то говорят, что B — алгебра конечного типа. Отметим, что в случае, когда $t_A(B) = 1$, B является максимальной подалгеброй алгебры A .

Пусть Γ — группа характеров компактной абелевой группы G и Γ_0 — подполугруппа группы Γ . Через D_{Γ_0} будем обозначать замкнутую подалгебру в $C(G)$, порожденную множеством Γ_0 .

О п р е д е л е н и е. Равномерную алгебру A на G называют алгеброй обобщенных аналитических функций или коротко алгеброй аналитических функций, если D_{Γ_0} совпадает с A для некоторой подполугруппы Γ_0 группы Γ .

Данная работа посвящена изучению типов и относительных типов алгебр обобщенных аналитических функций. Основные результаты сосредоточены в § 2 и § 3. В § 1 исследуются некоторые свойства абелевых полугрупп, необходимые для изучения типов алгебр обобщенных аналитических функций.

§ 1. Некоторые свойства абелевых полугрупп

Пусть Γ — абелева группа, и Γ_+ — подполугруппа группы Γ , удовлетворяющая условию $\Gamma_+ \cup (-\Gamma_+) = \Gamma$. На Γ можно задать порядок с помощью полугруппы Γ_+ ; под „ $a \geq b$ “ подразумеваем, что $a - b \in \Gamma_+$. Легко проверить, что

1. Если $a, b, c \in \Gamma$ и $a \geq b$, то $a + c \geq b + c$;
2. если $a \in \Gamma$, то либо $a \geq 0$, либо $a \leq 0$, причем могут выполняться оба неравенства.

Очевидно верно и обратное: если есть некоторый порядок на Γ , удовлетворяющий условиям 1 и 2, то всегда найдется полугруппа Γ_+ , задающая такой порядок. Говорят, что полугруппа Γ_+ вполне упорядочивает Γ , если Γ_+ задает порядок на Γ и $\Gamma_+ \cap (-\Gamma_+) = \{0\}$.

Говорят, что подгруппа определяет архимедово упорядочение на Γ , если для любых $a, b \in \Gamma_+$, где $-a \notin \Gamma_+$, существует такое целое число $n > 0$, что $n \cdot a - b \in \Gamma_+$.

Понятие „архимедово упорядочение“ равносильно понятию максимальнойности. Иными словами, если Γ_+ — максимальная подполугруппа группы Γ , то Γ_+ задает архимедов порядок на Γ . Верно и обратное: если Γ_+ задает архимедов порядок на Γ , то Γ_+ — максимальная подполугруппа группы Γ .

Пусть $\Gamma_0 \subset \Gamma^0$ — подполугруппы группы Γ . Последовательность полугрупп (включение строгое)

$$\Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \dots \subset \Gamma_m = \Gamma^0 \quad (1.1)$$

называется цепью полугрупп.

Уплотнением цепи (1.1) будет цепь, которая может быть получена вставлением конечного числа полугрупп в данную цепь.

Говорят, что цепь

$$\Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \dots \subset \Gamma_m = \Gamma^0 \quad (1.2)$$

неуплотняемая, если при всех i , $0 \leq i \leq m-1$, между Γ_i и Γ_{i+1} нет промежуточных подполугрупп. Число m называется длиной неуплотняемой цепи (1.2).

Если при всех i , $0 \leq i \leq m-1$, каждое Γ_i есть идеал в Γ_{i+1} , $0 \leq i \leq m-1$, то цепь (1.2) называют идеальным рядом. Напомним, что для идеального ряда есть хорошо известный аналог теоремы Жордана—Гёльдера—Шрейера, утверждающий, что любые два идеальных ряда с началом Γ_0 и концом Γ^0 имеют изоморфные уплотнения. В случае же, когда ряд (1.2) не идеальный, такого результата нет, т. е. могут существовать две неуплотняемые цепи различной длины.

Для дальнейшего нам необходимы следующие леммы.

Лемма 1.1. Пусть Γ_0 — максимальная, не содержащая нетривиальной группы, подполугруппа полугруппы Γ^0 и существует хотя бы один элемент из $\Gamma^0 \setminus \Gamma_0$, необратимый в Γ^0 . Тогда $\Gamma^0 \setminus \Gamma_0$ состоит из одного элемента.

Доказательство. Пусть $a \in \Gamma^0 \setminus \Gamma_0$ необратим в Γ^0 . Тогда для любого $b \in \Gamma^0$, $b \neq 0$, $a + b$ принадлежит Γ_0 . Действительно, если бы существовал $b \in \Gamma^0$ такой, что $a + b \notin \Gamma_0$, то полугруппа, порожденная множеством Γ_0 и элементом $a + b$ совпала бы с Γ^0 (в силу максимальнойности Γ_0 в Γ^0). Следовательно, для некоторого $d \in \Gamma_0$ нашлось бы такое положительное целое число n , что $n(a + b) + d = a$. Отсюда $nb + d = (1 - n)a \in \Gamma^0$, и поэтому $-a \in \Gamma^0$. А это противоречит допущению, что a необратим в Γ^0 . Таким образом, для каждого $b \in \Gamma^0$, $b \neq 0$, $a + b \in \Gamma_0$. А это и означает, что $\Gamma^0 = \Gamma_0 \cup \{a\}$. Лемма доказана.

Следствие. Если $\Gamma^0 \setminus \Gamma_0$ состоит из одного элемента, то $\Gamma^0 \setminus \{0\}$ — идеал для полугруппы Γ^0 .

Пусть Γ_1 — некоторая подполугруппа группы Γ . Через $\chi(\Gamma_1)$ будем обозначать порядок максимальной группы, содержащейся в Γ_1 .

Лемма 1.2. Пусть Γ_0 — максимальная подполугруппа полугруппы Γ^0 . Тогда справедливо одно из следующих соотношений:

а) $\Gamma^0 = \Gamma_0 \cup \{a\}$, $a \in \Gamma_0$, $n \in \mathbb{Z}_+$ — полугруппа целых неотрицательных чисел $n \geq 2$;

б) $\Gamma^0 = G^0 \cup H_0$, $\Gamma_0 = G_+^0 \cup H_0$, где H_0 — идеал для Γ^0 , а G_+^0 — подполугруппа в группе G^0 , задающая архимедов порядок на G^0 (в частности, когда G_+^0 не содержит нетривиальную группу, G_+^0 задает полный архимедов порядок на G);

в) $\Gamma^0 = G^0 \cup H_0$, $\Gamma_0 = G_0 \cup H_0$, где H_0 — идеал для Γ^0 , а G_0 — максимальная подгруппа группы G^0 (в случае, когда G_0 конечного порядка, группа G^0 — также конечного порядка);

г) $\Gamma^0 = G_0 \cup (G_0 + a_0) \cup H_0$, $\Gamma_0 = G_0 \cup H_0$, где G_0 — группа, H_0 — идеал в Γ^0 , $n \cdot a_0 \in H_0$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \geq 2$.

Доказательство. Если $\chi(\Gamma^0) = 1$, утверждение а) следует непосредственно из леммы 1.1. Предположим теперь, что $\chi(\Gamma^0) > 1$. Пусть G^0 — максимальная группа в Γ^0 . Тогда $H = \Gamma^0 \setminus G^0$ является идеалом в Γ^0 , и $\Gamma^0 = G^0 \cup H$. Если $a_0 \in \Gamma^0 \setminus \Gamma_0$, то возможны два случая: либо $a_0 \in G^0$, либо $a_0 \in H$.

Пусть $a_0 \in G^0$. Покажем, что $H \subset \Gamma_0$. Действительно, если бы $H \not\subset \Gamma_0$, то из максимальнойности Γ_0 в Γ^0 следовало бы, что $\Gamma^0 = \Gamma_0 + \mathbb{Z}_+ \cdot b$, где $b \in H \setminus \Gamma_0$. Поэтому в силу того, что $a_0 = d + n \cdot b$, где $n \geq 1$ и H — идеал для Γ^0 , $b \in H$, получаем $a_0 \in H$. А это противоречит допущению, что $a_0 \in G$. Таким образом, $H \subset \Gamma_0$, и $\Gamma_0 = G_0 \cup H_0$, где $G_0 = G^0 \cap \Gamma_0$ — полугруппа (или группа), максимальная в группе G^0 . Отсюда, если G_0 — группа, то выполняется условие в) леммы; если же G_0 — не группа, то G_0 задает архимедов порядок на G^0 , т. е. выполняется условие б). Аналогичными рассуждениями можно показать, что в случае, когда $a \in H$, выполняется условие г). Лемма доказана.

Предложение 1.3. Пусть $\Gamma_0 \subset \Gamma^0$ — две собственные подполугруппы группы Γ . Предположим, что $\chi(\Gamma^0)$ конечен. Тогда, если существует неуплотняемая цепь полугрупп с началом Γ_0 и концом Γ^0 , то найдется такая неуплотняемая цепь полугрупп

$$\Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \dots \subset \Gamma_{i_0} \subset \dots \subset \Gamma_n = \Gamma^0 \quad (1.3)$$

и число i_0 , $0 \leq i_0 \leq n$, что $\chi(\Gamma_i) > \chi(\Gamma_{i+1})$, когда $i > i_0$, и $\chi(\Gamma_i) = \chi(\Gamma_{i_0})$, когда $i \leq i_0$.

Доказательство предложения немедленно следует из леммы 1.2.

Число i_0 будем обозначать через $P(\Gamma^0, \Gamma_0)$. Заметим, что $P(\Gamma^0; \Gamma_0)$ является инвариантом для любых цепей полугрупп, удовлетворяющих предложению 1.3, т. е. оно не зависит от выбора цепи.

§ 2. Алгебры конечного типа на компактной группе G

Пусть Γ — некоторая дискретная абелева группа, а G — компактная группа ее характеров. Тогда по теореме двойственности Понтрягина, Γ — есть группа характеров группы G . Для каждого $a \in \Gamma$ через χ_a будем обозначать характер группы G , соответствующий элементу a .

Всюду в дальнейшем для равномерной алгебры A на G через Γ_A будем обозначать полугруппу $\{a \in \Gamma; \chi_a \in A\}$.

Теорема 2.1. Пусть $B \subset A$ — две алгебры обобщенных аналитических функций на G . Алгебра B является подалгеброй конечного типа относительно A тогда и только тогда, когда

а) существует хотя бы одна максимальная подполугруппа Γ_1 полугруппы Γ_A , содержащая Γ_B такая, что $\chi(\Gamma_1) < \infty$;

б) найдется хотя бы одна неуплотняемая цепь полугрупп с началом Γ_B и концом Γ_A .

Мы предполагаем, что все рассматриваемые полугруппы Γ содержат единичный элемент Γ .

Доказательству теоремы предположим несколько лемм.

Лемма 2.2. Пусть Γ_0 — подполугруппа группы Γ и D_{Γ_0} — равномерная алгебра на G , порожденная элементами из Γ_0 . Тогда $\Gamma_{D_{\Gamma_0}} \cap \Gamma = \Gamma_0$.

Доказательство следует из того, что характеры из Γ образуют ортонормированный базис в $L^2(\tau)$, где τ — мера Хаара на группе G .

Пусть Γ_0 — некоторая подполугруппа группы Γ . Обозначим через H_0 максимальную группу в Γ_0 . Если H_0 — группа характеров из G , равная 1 на H_0 , то легко заметить, что факторгруппа G/H_0 является группой характеров для H_0 .

Опишем все максимальные множества антисимметрии алгебры D_{Γ_0} .

Лемма 2.3. Максимальные множества антисимметрии алгебры D_{Γ_0} совпадают с классами смежности группы G по подгруппе $H_0^\perp$.

Доказательство. Пусть f — некоторая вещественная функция из D_{Γ_0} . Тогда формальный ряд Фурье функции f на G есть $\sum_{a \in \Gamma_0} c(a) \chi_a$. Поскольку f — вещественная функция, то для каждого χ_a , $a \in \Gamma_0$, такого, что $c(a) \neq 0$, — a также принадлежит Γ_0 . Но по условию H_0 — максимальная группа в Γ_0 , поэтому — $a \in H_0$ и f постоянна на каждом классе смежности группы G по подгруппе H_0 . С другой стороны, из построения $H_0^\perp$ видно, что для любых двух классов смежности G по $H_0^\perp$ найдется $a \in H_0$ такое, что χ_a принимает различное значение на этих классах. Тогда хотя бы одна из вещественных функций $\varphi_1 = \chi_a + \chi_{-a}$, $\varphi_2 = i(\chi_a - \chi_{-a}) \in D_{\Gamma_0}$ разделяет эти классы. Следовательно, максимальными множествами антисимметрии алгебры

D_{Γ_0} являются те и только те множества в G , которые совпадают с классами смежности группы G по подгруппе H_0^1 . Лемма доказана.

Лемма 2.4. Пусть Γ_0 — максимальная подполугруппа полугруппы Γ^0 . Если $\chi(\Gamma^0) = 1$, то

$$t_{D_{\Gamma_0}}(D_{\Gamma_0}) = \text{codim}_{D_{\Gamma_0}} D_{\Gamma_0} = 1.$$

Доказательство. Из леммы 1.1 следует, что $\Gamma^0 \setminus \Gamma_0$ состоит из одного элемента и если $a \in \Gamma^0$, то $n \cdot a \in \Gamma_0$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \geq 2$. Рассмотрим пространство $D_{\Gamma_0} + \mathbb{C} \chi_a$. Так как $(\chi_a)^2 = \chi_{2a} \in D_{\Gamma_0}$ и $\chi_a \times D_{\Gamma_0} \subset D_{\Gamma_0} + \mathbb{C} \chi_a$, то $D_{\Gamma_0} + \mathbb{C} \chi_a$ — алгебра. Очевидно, полученная алгебра замкнута в $\mathcal{C}(G)$. Теперь, применив лемму 2.2, получим, что $D_{\Gamma^0} = D_{\Gamma_0} + \mathbb{C} \chi_a$. Лемма доказана.

Лемма 2.5. Пусть Γ_0 — максимальная подполугруппа полугруппы Γ^0 и $\chi(\Gamma^0) = 1$. Тогда $t_{D_{\Gamma^0}}(D_{\Gamma_0})$ конечен.

Доказательство. Если $\chi(\Gamma^0) = 1$, то $t_{D_{\Gamma_0}}(D_{\Gamma_0}) = 1$ (см. лемму 2.4). Если же $\chi(\Gamma^0) > 1$, то тогда возможны два случая (см. лемму 1.2):

- а) $\Gamma^0 = G^0 \cup H_0$, $\Gamma_0 = G_+^0 \cup H_0$, где H_0 — идеал для Γ^0 , G^0 — максимальная группа в Γ^0 , а G_+^0 задает полный архимедов порядок на G^0 ;
- б) $\Gamma^0 = G^0 \cup H_0$, $\Gamma_0 = \{0\} \cup H_0$, где H_0 — идеал для Γ^0 , а G^0 — группа конечного порядка.

Рассмотрим сначала случай а). Покажем, что тогда $t_{D_{\Gamma^0}}(D_{\Gamma_0}) = 1$. Пусть $f \in D_{\Gamma^0}$. Ряд Фурье функции $f \in L^1(\tau)$ представим в виде

$$f \sim \sum_{a \in \Gamma^0} c(a) \chi_a.$$

Поскольку $\Gamma^0 = G^0 \cup H_0 = G_+^0 \cup (-G_+^0) \cup H_0$, то

$$\sum_{a \in \Gamma^0} c(a) \chi_a = \sum_{a \in G_+^0} c(a) \chi_a + \sum_{-a \in G_+^0} c(a) \chi_0 + \sum_{a \in H_0} c(a) \chi_a.$$

Если $c(a) = 0$ для любого $a \in (-G_+^0)$, то $f \in D_{\Gamma_0}$. Если же $c(a_0) \neq 0$ для некоторого $a_0 \in (-G_+^0)$, то $f \notin D_{\Gamma_0}$. Покажем, что в этом случае равномерная алгебра $A_0 = [f; D_{\Gamma_0}]$, порожденная функцией f и элементом из D_{Γ_0} , совпадает с D_{Γ^0} . Поскольку G_+^0 задает полный архимедов порядок на G^0 , достаточно показать, что $\chi_{a_0} \in A_0$, т. е. что χ_{a_0} обратим в A_0 . Действительно, если бы функция χ_{a_0} принадлежала A_0 , то Γ_{A_0} содержало бы $G_+^0 \cup H_0$ и $a_0 \in (-G_+^0)$. Поэтому Γ_{A_0} совпало бы с Γ^0 , т. е. $A_0 = D_{\Gamma^0}$. Таким образом, достаточно показать, что $\chi_{a_0} \in A_0$. Допустим противное. Тогда найдется непрерывный мультипликативный функционал m на A такой, что $m(\chi_{-a_0}) = 0$. И поскольку G_+^0 задает архимедов порядок на G , $m(\chi_b) = 0$ для любого $b \in G_+^0 \setminus \{0\}$. А так как H_0 — идеал в Γ^0 , то для любого $h \in H_0$, $m(\chi_h) = m(\chi_{a_0} \chi_h) = m(\chi_{-a_0}) (\chi_{a_0} \cdot \chi_{h_1}) = m(\chi_{-a_0}) \cdot m(\chi_{h_1}) = 0$, где $h_1 = a + h \in H_0$.

Пусть μ — вещественная представляющая мера функционала m , заданная на G . Тогда из вышесказанного следует

$$\int_G \chi_a d\mu = 0 \quad (2.1)$$

для всех $a \in \Gamma_0 \setminus \{0\}$.

Поскольку $\chi_a = \operatorname{Re} \chi_a + i \operatorname{Im} \chi_a$, из 2.1 получаем

$$\int_G \operatorname{Re} \chi_a d\mu = 0, \quad \int_G \operatorname{Im} \chi_a d\mu = 0. \quad (2.2)$$

Так как $\chi_{-a} = \operatorname{Re} \chi_a - i \operatorname{Im} \chi_a$, то из (2.2) следует

$$\int_G \chi_a d\mu = 0 \text{ для любого } a \in G^0 \setminus \{0\}, \text{ в частности и для } a_0.$$

Функция $\chi_{-a_0} \cdot f \in A_0$ имеет следующий ряд Фурье:

$$\chi_{-a_0} \cdot f \sim c(a_0) + \sum_{a \in \Gamma^0 \setminus \{0\}} c(a) \chi_a, \quad (2.3)$$

причем $c(a_0) \neq 0$. Тогда, как хорошо известно, функцию $g = \chi_{-a_0} \cdot f - c(a_0)$ можно равномерно на G приблизить теми характерами χ_a , $a \in \Gamma^0$, для которых

$$\int_G g \bar{\chi}_a d\tau \neq 0,$$

где τ — мера Хаара на G .

Пусть $0 < \varepsilon < \frac{|c(a_0)|}{2}$ и $g_0 = \sum_{a_i \in \Gamma^0 \setminus \{0\}} \alpha_i \chi_{a_i}$ такое, что $\sup |g - g_0| < \varepsilon$.

Поскольку μ — вещественная представляющая мера на G , то

$$\int_G |g - g_0| d\mu < \varepsilon.$$

Поэтому

$$\left| \int_G (g - g_0) d\mu \right| < \varepsilon.$$

Но

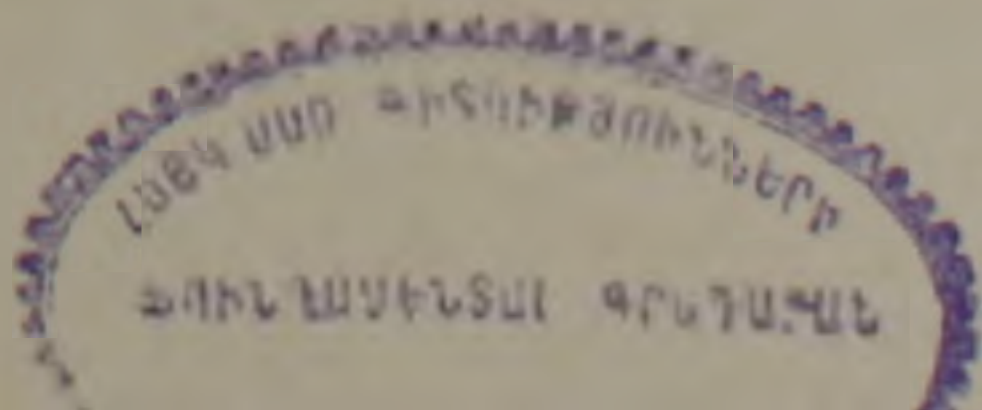
$$\int_G g d\mu = \int_G \chi_{-a_0} \cdot f d\mu - c(a_0) \int_G d\mu = -c(a_0), \quad \int_G g_0 d\mu = 0, \quad (2.4)$$

в силу равенства (2.2).

Таким образом, $\left| \int_G (g - g_0) d\mu \right| = c(a_0)$. А это противоречит усло-

вию (2.4). Следовательно, $\chi_{a_0} \in A_0$, т. е. $A_0 = D_{\Gamma^0}$.

Случай б). Пусть $\Gamma^0 = G^0 \cup H_0$, $\Gamma_0 = \{0\} \cup H_0$. Рассмотрим алгебры $D_{\Gamma^0} = D_{G^0} + D_{H_0}$, $D_{\Gamma_0} = \mathbb{C} \cdot 1 + D_{H_0}$. Поскольку G^0 — группа конечного порядка, то D_{G^0} — конечная алгебра, размерность которой равна по-



рядку группы G^0 . Следовательно, $\text{codim}_{D_{\Gamma^0}} D_{H_0}$ конечен и равен $\chi(G^0)$. Поэтому $t_{D_{\Gamma^0}}(D_{\Gamma_0})$ конечен. Лемма доказана.

Следствие 2.6. Пусть Γ_0 — максимальная подполугруппа полугруппы Γ^0 и $\chi(\Gamma_0) = 1$. Тогда, если $\chi(\Gamma^0)$ бесконечен, то $t_{D_{\Gamma^0}}(D_{\Gamma_0}) = 1$, в противном случае $t_{D_{\Gamma^0}}(D_{\Gamma_0}) = \chi(\Gamma^0) - 1 = \text{codim}_{D_{\Gamma^0}}(D_{\Gamma_0})$.

Пусть X — компактное пространство и Φ — гомеоморфизм из X на некоторое компактное пространство Y . Отображение Φ порождает изометрический изоморфизм Φ^* из $C(X)$ на $C(Y)$: $\Phi^*(f)(y) = f(\Phi^{-1}(y))$, $f \in C(X)$.

Пусть $B \subset A$ — две равномерные алгебры на X и $B^0 = \Phi^*(B)$, $A^0 = \Phi^*(A)$.

Лемма 2.7. $t_A(B) = t_{A^0}(B^0)$.

Доказательство следует из того, что Φ^* — изометрически взаимно однозначное отображение $C(X)$ на $C(Y)$.

Для любого замкнутого множества $F \subset G$ и равномерной алгебры A на G через A_F будем обозначать равномерное замыкание сужения A на F .

Лемма 2.8. Пусть $B \subset A$ — две алгебры обобщенных аналитических функций на G , и $\{F_i\}$ — разбиение G на максимальные множества антисимметрии относительно B . Тогда для любых $F_1, F_2 \in \{F_i\}$

$$t_{A_{F_1}}(B_{F_1}) = t_{A_{F_2}}(B_{F_2})$$

Доказательство. Пусть H_0 — максимальная группа в полугруппе $\Gamma_0 = \Gamma_B$, а $H_0^\perp \subset G$ — аннулятор H_0 . Как хорошо известно (см. [4], стр. 254), группа характеров факторгруппы $G/H_0^\perp$ есть H_0 . Поэтому, если $b \in \Gamma^0 = \Gamma_A$ такое, что сужение характера χ_b на некоторый класс смежности G по $H_0^\perp$ совпадает с сужением некоторого характера из Γ_0 на то же множество, то $b \in \Gamma_0$.

Пусть Φ — отображение из $H_0^\perp$ на некоторый класс смежности G по $H_0^\perp$: $\Phi(g) = g_0 + g$, $g_0 \in G$, $g \in H_0^\perp$, и A_0 (соотв. B_0) — равномерная алгебра, порожденная сужениями характеров из Γ^0 (соотв. Γ_0) на $H_0^\perp$, а A^0 (соотв. B^0) — алгебра, порожденная сужениями из Γ^0 (соотв. Γ_0) на $g_0 + H_0^\perp$. Тогда из вышесказанного следует, что $\Phi^*(A_0) = A^0$, $\Phi^*(B_0) = B^0$. Следовательно, на основании леммы 2.7 получаем $t_{A_0}(B_0) = t_{A^0}(B^0)$. А так как $A_0 = A_{H_0^\perp}$, $B_0 = B_{H_0^\perp}$ и все максимальные множества антисимметрии алгебры B совпадают с классами смежности G по $H_0^\perp$ (лемма 2.3), то $t_{A_F}(B_F) = t_{A_{H_0^\perp}}(B_{H_0^\perp})$ для любого $F \in \{F_i\}$.

Лемма доказана.

Лемма 2.9. Пусть Γ_0 — подполугруппа полугруппы Γ^0 и $\chi(\Gamma_0) = \infty$. Тогда $t_{D_{\Gamma^0}}(D_{\Gamma_0})$ не конечен.

Доказательство следует из леммы 2.8 и леммы 1 из [8].

Лемма 2.10. Пусть Γ_0 — максимальная подполугруппа полугруппы Γ^0 и $\chi(\Gamma_0) < \infty$, а $\chi(\Gamma^0) = \infty$. Тогда для любых двух равномерных алгебр $C^0 \subset D^0$, $D_{\Gamma_0} \subset C^0 \subset D^0 \subset D_{\Gamma^0}$, найдется такое бесконечное семейство $\{F_i\}$ максимальных множеств антисимметрии алгебры D^0 , где каждое $F_i \in \{F_i\}$ не является максимальным множеством антисимметрии алгебры C^0 .

Доказательство. Поскольку $\chi(\Gamma_0)$ конечно, максимальная группа G_0 , содержащаяся в Γ_0 , имеет конечный порядок. Поэтому $G/G_0^\perp$ — группа конечного порядка. Это означает, что алгебра $B^0 = D_{G_0}$ имеет конечное число максимальных множеств антисимметрии. В частности, $G_0^\perp$ является максимальным множеством антисимметрии для алгебры B^0 .

Сужения характеров из Γ_0 и Γ^0 на $G_0^\perp$ образуют полугруппу характеров группы $G_0^\perp$. Эти полугруппы обозначим через $\bar{\Gamma}_0$ и $\bar{\Gamma}^0$ соответственно. Очевидно, $\chi(\bar{\Gamma}_0) = 1$ и $\chi(\bar{\Gamma}^0) = \infty$. Из максимальной Γ_0 в Γ^0 следует максимальность $\bar{\Gamma}_0$ в полугруппе $\bar{\Gamma}^0$. Так как

$$B_{G_0^\perp}^0 = D_{\bar{\Gamma}_0}, \quad A_{G_0^\perp}^0 = D_{\bar{\Gamma}^0}, \quad \text{где } A^0 = D_{\Gamma^0}, \quad B^0 = D_{\Gamma_0}, \quad \text{и } t_{A_{G_0^\perp}^0}(B_{G_0^\perp}^0) = \\ = t_{D_{\bar{\Gamma}_0}}(D_{\bar{\Gamma}^0}) = 1,$$

то $B_{G_0^\perp}^0$ — антисимметричная алгебра, а $A_{G_0^\perp}^0$ обладает бесконечным семейством максимальных множеств антисимметрии и, кроме того, $t_{A^0}(B^0) = \chi(\Gamma_0)$ (см. леммы 2.3 и 2.8, следствие 2.6 и лемму 1 из [8]).

Пусть $\{F_i\}_{i=1}^k$ ($k = \chi(\Gamma_0)$) — максимальные множества антисимметрии алгебры B^0 . Из теоремы Бишоп-Шилова (см. [3], стр. 87), леммы 2.8 и того, что $t_{A_{F_i}^0}(B_{F_i}^0) = 1$, $1 \leq i \leq k$, следует, что для любых двух равномерных алгебр (включение строгое) $C^0 \subset D^0$, $B^0 \subset C^0 \subset D^0 \subset A^0$, существует такое $F \in \{F_i\}_{i=1}^k$, что $B_F^0 = C_F^0$, $A_F^0 = D_F^0$. Алгебра B_F^0 антисимметрична, а A_F^0 обладает бесконечным семейством максимальных множеств антисимметрии. Лемма доказана.

Лемма 2.11. Пусть Γ_0 — максимальная подполугруппа полугруппы Γ^0 . Тогда

- а) если $\chi(\Gamma^0) = \chi(\Gamma_0)$, то $t_{D_{\Gamma_0}}(D_{\Gamma^0}) = \text{codim}_{D_{\Gamma^0}}(D_{\Gamma_0}) = \chi(\Gamma_0)$;
- б) если $\chi(\Gamma_0) < \chi(\Gamma^0) < \infty$, то $t_{D_{\Gamma_0}}(D_{\Gamma^0}) = \text{codim}_{D_{\Gamma^0}}(D_{\Gamma_0}) = \chi(\Gamma_0) - \chi(\Gamma_0)$;
- в) если $\chi(\Gamma_0) < \infty$, $\chi(\Gamma^0) = \infty$, то $t_{D_{\Gamma_0}}(D_{\Gamma^0}) = \chi(\Gamma_0)$.

Доказательство непосредственно следует из лемм 2.5, 2.8 и 2.10.

Лемма 2.12. Пусть B — конечномерная коммутативная банахова алгебра с единицей, содержащаяся в некоторой коммутативной алгебре A . Предположим, что $t_A(B)$ конечен. Тогда

$$\text{card}[Sp(A)] \leq \text{card}[Sp(B)] + t_A(B),$$

где $Sp(A)$ — спектр алгебры A .

Доказательство. Допустим противное, т. е. $\text{card}[Sp(A)] > \text{card}[Sp(B)] + t_A(B)$. Поскольку $B \subset A$ и $Sp(B)$ состоит из конечного числа точек, то $Sp(B)$ содержится в $Sp(A)$ (см. [6], стр. 252). Пусть $x_1, \dots, x_{n+1} \in Sp(A) \setminus Sp(B)$ ($n = t_A(B)$, $x_i \neq x_j$). Так как $Sp(A)$ — хаусдорфово пространство, то найдутся такие элементы $a_1, \dots, a_{n+1} \in A$, что $\hat{a}_i(x_i) = 1$, $i = 1, \dots, n+1$, $\hat{a}_i(y) = 0$, $y \in Sp(B)$, $\hat{a}_i(x_j) = 0$, $x_i \neq x_j$, где $\hat{a}_i$ — гельфандовское представление $a_i \in A$ на $Sp(A)$, $1 \leq i \leq n+1$. Рассмотрим алгебру B_i — алгебру, порожденную элементами из B и элементами a_i , $i < j$, $1 \leq i, j \leq n+1$. Очевидно, $B_i \subset B_{j+1}$ (включение строгое). Цепочка банаховых алгебр

$$B = B_0 \subset B_1 \subset \dots \subset B_{n+1} \subset A$$

имеет длину $\geq n+1$. Отсюда $t_A(B) \geq n+1$. А это противоречит условию, что $t_A(B) = n$. Лемма доказана.

Для идеала I равномерной алгебры A через $\text{hull}_A I$ будем обозначать оболочку I .

Лемма 2.13. Пусть A — равномерная алгебра на G и I — такой идеал алгебры A , что $\text{hull}_A I$ состоит из конечного числа точек. Тогда все максимальные множества антисимметрии алгебры A , кроме некоторого числа k ($k \leq (\text{card}(\text{hull}_A I))$) являются максимальными множествами антисимметрии и для I .

Доказательство очевидно.

Доказательство теоремы 2.1. Необходимость. Пусть $B \subset A$ — две алгебры обобщенных аналитических функций на G . Если Γ_1 и Γ_2 — две такие подполугруппы группы Γ , что $\Gamma_B \subset \Gamma_1 \subset \Gamma_2 \subset \Gamma_A$, то тогда (см. лемму 2.2) $B \subset D_{\Gamma_1} = D_{\Gamma_2} \subset A$ и поэтому длина любой неуплотняемой цепи полугрупп с началом Γ_B и концом Γ_A не превосходит $t_A(B)$. Пусть

$$\Gamma_B = \Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \dots \subset \Gamma_{k-1} \subset \Gamma_k = \Gamma_A$$

— некоторая неуплотняемая цепь полугрупп. Поскольку Γ_{k-1} максимален в Γ_k и $t_A(D_{\Gamma_{k-1}})$ конечен, то на основании леммы 2.9 $\chi(\Gamma_{k-1}) < \infty$.

Достаточность. Пусть дана некоторая неуплотняемая цепь

$$\Gamma_B = \Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \dots \subset \Gamma_{n-1} \subset \Gamma_n = \Gamma_A$$

полугрупп, причем $\chi(\Gamma_{n-1}) < \infty$. Если и $\chi(\Gamma_A) < \infty$, то на основании следствия 2.6 получим: $t_A(B) = \text{codim}_A(B)$ конечен. Предположим теперь, что $\chi(\Gamma_A) = \infty$. Рассмотрим алгебры B и $D_{\Gamma_{n-1}}$. Так как $\text{codim } B$ конечен, найдется идеал I_0 алгебры $B_0 = D_{\Gamma_{n-1}}$, содержащийся в B и такой, что $\text{codim}_B(I_0)$ конечен (см. [5]). Таким образом

$$B = I_0 + \mathbb{C}b_1 + \dots + \mathbb{C}b_p, \quad B_0 = B + \mathbb{C}d_1 + \dots + \mathbb{C}d_m,$$

где $m = \text{codim}_B B$.

Пусть дана некоторая цепь равномерных алгебр

$$B \subset D_1 \subset D_2 \subset \dots \subset D_k = A. \quad (2.5)$$

Для каждого D_i , $1 \leq i \leq k$, рассмотрим $I_i = [I_0; I_0 \cdot D_i]$ — замкнутую подалгебру алгебры D_i , порожденную элементами из I_0 и $I_0 \cdot D_i$. С помощью I_i , $1 \leq i \leq k$, можно построить равномерную алгебру

$$B_i = I_i + \mathbb{C}b_1 + \dots + \mathbb{C}b_p + \mathbb{C}d_1 + \dots + \mathbb{C}d_m. \quad (2.6)$$

Очевидно, что $B_0 \subset B_i$, $1 \leq i \leq k$. Покажем, что $D_i \subset B_i$, $1 \leq i \leq k$. Допустим противное. Пусть $D_{i_0} \not\subset B_{i_0}$ для некоторого i_0 , $1 \leq i_0 \leq k$. Тогда алгебра $\tilde{B} = [D_{i_0}; B_{i_0}]$ строго содержит B_{i_0} . Поскольку I_{i_0} является идеалом не только для B_{i_0} , но и для D_{i_0} , то I_{i_0} — идеал и для $\tilde{B}$. Отсюда I_{i_0} является идеалом и для любой алгебры, заключенной между B_{i_0} и $\tilde{B}$. Поэтому между семейством $\{D_i\}$, $B_{i_0} \subset D \subset \tilde{B}$, замкнутых подалгебр $\tilde{B}$ и семейством $\{D^0\}$, $B_{i_0}/I_{i_0} \subset D^0 \subset \tilde{B}/I_{i_0}$, где B_{i_0}/I_{i_0} и $\tilde{B}/I_{i_0}$ — фактор алгебры, существует взаимно однозначное соответствие. Следовательно

$$t_{\tilde{B}}(B_{i_0}) = t_{\tilde{B}^0}(\tilde{B}^0), \quad \text{где } \tilde{B}^0 = \tilde{B}/I_{i_0}, \quad \tilde{B}^0 = B_{i_0}/I_{i_0}.$$

Поскольку $\text{codim}_{B_{i_0}} I_{i_0} < \infty$, $S_p(B_{i_0})$ состоит из конечного числа точек, поэтому $S_p(\tilde{B}^0)$ также конечен (см. лемму 2.12). Это означает, что $\text{hull}_{\tilde{B}} I_{i_0}$ конечен. Так как B_{i_0} строго содержится в $\tilde{B}$, $B_0 = D_{\Gamma_{n-1}} \subset \dots \subset B_{i_0} \subset \tilde{B} \subset D_{\Gamma_A} = A$ и $\kappa(\Gamma_A) = \infty$, то на основании леммы 2.10 найдется такое $\{F\}$ — бесконечное семейство максимальных множеств антисимметрии алгебры $\tilde{B}$, где каждое $F_0 \in \{F\}$ не является максимальным множеством антисимметрии алгебры B_{i_0} . И поскольку $\text{hull}_{\tilde{B}} I_{i_0}$ конечен, из леммы 2.12 получаем, что хотя бы одно множество из $\{F\}$ является множеством антисимметрии для I_{i_0} . Но $I_{i_0} \subset B_{i_0}$. Отсюда следует, что существует $F \in \{F\}$, которое будет максимальным множеством антисимметрии для алгебры B_{i_0} . Пришли к противоречию. Таким образом, $D_i \subset B_i$ и $\text{codim}_{B_i}(D_i)$ конечен, $1 \leq i \leq k$.

Рассмотрим алгебры D_{i+1} и B_{i+1} . Из того, что $D_i \subset D_{i+1}$, следует, что либо $B_i = B_{i+1}$, либо $B_i \subset B_{i+1}$. Если $B_i = B_{i+1}$, то очевидно $\text{codim}_{B_i}(D_i) > \text{codim}_{B_i}(D_{i+1})$. Если же $B_i \subset B_{i+1}$, то $\text{codim}_{B_i}(D_i) \geq \text{codim}_{B_{i+1}}(D_{i+1})$, а $t_A(B_i) > t_A(B_{i+1})$. Таким образом, каждой ал-

гебре из цепи (2.5) можно поставить в соответствие пару целых чисел $(m_i; n_i)$, где $m_i = \text{codim}_{B_0}(D_i)$, $n_i = t_A(B_i)$. Итак получим набор пар целых чисел

$$(m_0; n_0), (m_1; n_1), \dots, (m_{k-1}; n_{k-1}), (0; 0), \quad (2.7)$$

где $m_0 = \text{codim}_{B_0}(B)$, $n_0 = t_A(B_0)$, а $(0,0)$ соответствует алгебре A .

Из вышесказанного следует, что для любых двух наборов $(m_{i-1}; n_{i-1}), (m_i; n_i)$, $1 \leq i \leq k-1$, либо $m_i > m_{i-1}$, либо $n_i > n_{i-1}$, либо выполняются одновременно оба неравенства. Отсюда $k \leq m_0 + n_0$, т. е. длина любой цепочки вида (2.5) не превосходит $m_0 + n_0 = \text{codim}_{B_0}(B) + t_A(B)$. А это и означает, что $t_A(B)$ конечен и равен $t_A(B) = \text{codim}_{B_0}(B) + t_A(B_0)$. Теорема доказана.

Пусть $B \subset A$ — алгебры обобщенных аналитических функций на G . С помощью полугрупп Γ_B и Γ_A дадим оценку $t_A(B)$. Для полугруппы Γ_A рассмотрим семейство $\{G\}$ — семейство всех групп конечного порядка, содержащихся в Γ_A . Пусть

$$\chi_0(\Gamma_A) = \sup_{G \in \{G\}} \chi(G).$$

Теорема 2.14. Пусть $t_A(B)$ конечен. Тогда

а) если $\chi(\Gamma_A) = \chi(\Gamma_B)$, то

$$t_A(B) = \chi(\Gamma_B) \cdot P(\Gamma_A; \Gamma_B);$$

б) если $\chi(\Gamma_B) < \chi(\Gamma_A) < \infty$, то

$$t_A(B) = \chi(\Gamma_B) \cdot [P(\Gamma_A; \Gamma_B) - 1] + \chi(\Gamma_A);$$

в) если $\chi(\Gamma_A) = \infty$, то

$$t_A(B) = \chi(\Gamma_B) \cdot [P(\Gamma_A; \Gamma_B) - 1] + 2\chi_0(\Gamma_A).$$

Доказательство. Пусть $B \subset A$ — алгебры обобщенных аналитических функций на G и $t_A(B)$ конечен. Тогда из теоремы 2.1 и предложения 1.3 следует существование такой неуплотняемой цепочки полугрупп

$$\Gamma_B = \Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \dots \subset \Gamma_i \subset \dots \subset \Gamma_{n-1} \subset \Gamma_n = \Gamma_A \quad (2.8)$$

и числа $P(\Gamma_A; \Gamma_B) = i_0$, $0 \leq i_0 \leq n$, что $\chi(\Gamma_i) < \chi(\Gamma_{i+1})$, когда $i \geq i_0$ и $\chi(\Gamma_i) = \chi(\Gamma_0)$, когда $0 \leq i_0 < n$, кроме того, $\chi(\Gamma_{n-1}) < \infty$. Предположим сначала что $\chi(\Gamma_A) = \chi(\Gamma_B)$. Тогда $\chi(\Gamma_i) = \chi(\Gamma_A)$ для $0 \leq i \leq n$. Отсюда $\text{codim}_{D_{\Gamma_{i+1}}}(D_{\Gamma_i}) = \chi(\Gamma_B) = \chi(\Gamma_A)$ (см. лемму 2.11). Поэтому $t_A(B) = \text{codim}_A(B) = \chi(\Gamma_A) \cdot n = \chi(\Gamma_A) \cdot P(\Gamma_A; \Gamma_B)$. Пусть теперь $\chi(\Gamma_B) < \chi(\Gamma_A) < \infty$. Тогда из вышесказанного следует, что $\text{codim}_{D_{\Gamma_i}}(B) = \chi(\Gamma_B) \cdot P(\Gamma_A; \Gamma_B)$. Для $i \geq i_0$, применив лемму 2.11, получим: $\text{codim}_{D_{\Gamma_{i+1}}}(D_{\Gamma_i}) = \chi(\Gamma_{i+1}) - \chi(\Gamma_i)$. Следовательно, в этом случае

$$\begin{aligned} t_A(B) &= \chi(\Gamma_B) \cdot P(\Gamma_A; \Gamma_B) - \chi(\Gamma_B) + \chi(\Gamma_A) = \\ &= \chi(\Gamma_B) [P(\Gamma_A; \Gamma_B) - 1] + \chi(\Gamma_A). \end{aligned}$$

Предположим теперь, что $\chi(\Gamma_A) = \infty$. Тогда

$$t_{D_{\Gamma_{n-1}}}(B) = \chi(\Gamma_B) \cdot [P(\Gamma_A; \Gamma_B) - 1] + \chi(\Gamma_{n-1}) = \text{codim}_{D_{\Gamma_{n-1}}} B.$$

Покажем, что $\chi_0(\Gamma_A) = \chi(\Gamma_{n-1})$. Допустим противное. Пусть $\chi(\Gamma_{n-1}) < \chi_0(\Gamma_A)$. Это означает, что найдется группа G^0 ($G^0 \subset \Gamma_A$) конечного порядка, не содержащаяся в Γ_{n-1} . Поскольку $\chi(G^0) < \infty$, $\chi(\Gamma_{n-1}) < \infty$, то для полугруппы Γ^0 , порожденной элементами из G^0 и Γ_{n-1} справедливо $\chi(\Gamma^0) < \infty$. Полугруппа Γ_{n-1} — максимальная в Γ_A , поэтому $\Gamma^0 = \Gamma_A$. Отсюда $\chi(\Gamma_A) < \infty$. Пришли к противоречию. Таким образом, $\chi_0(\Gamma_A) = \chi(\Gamma_{n-1})$. Теперь, применив лемму 2.11, получаем $t_A(D_{\Gamma_{n-1}}) = \chi_0(\Gamma_A)$. Следовательно, (см. окончание доказательства теоремы 2.1)

$$t_A(B) = \text{codim}_{D_{\Gamma_{n-1}}}(B) + t_A(D_{\Gamma_{n-1}}) = \chi(\Gamma_B) \cdot [P(\Gamma_A; \Gamma_B) - 1] + 2\chi_0(\Gamma_A).$$

Теорема доказана.

§ 3. Максимальные подалгебры в $C(G)$

Пусть A — некоторая алгебра обобщенных аналитических функций на G . Представляется интересным найти условия, при которых алгебра A содержится в максимальной алгебре. В случае, когда G — окружность, любая алгебра обобщенных аналитических функций на G имеет конечный тип и поэтому содержится в некоторой максимальной алгебре, но, вообще говоря, существуют примеры алгебр обобщенных аналитических функций, которые не содержатся ни в какой максимальной алгебре.

К. Горманом и И. Зингером в [1] была сформулирована следующая

Теорема А. Пусть A — такая равномерная алгебра на G , что Γ_A вполне упорядочивает Γ . Алгебра A максимальна тогда и только тогда, когда Γ_A задает архимедов порядок на Γ .

Позднее Р. Кауфман доказал следующую теорему [2].

Теорема В. Пусть A — такая равномерная алгебра на G , что Γ_A упорядочивает Γ . Алгебра A содержится в некоторой максимальной алгебре на G тогда и только тогда, когда существует сохраняющий порядок гомоморфизм из группы Γ в группу вещественных чисел.

В этом параграфе указывается критерий существования максимальной алгебры, содержащей алгебру A , но уже не в терминах полугрупп, как это было сделано Р. Кауфманом, а также К. Горманом и И. Зингером, а в терминах свойств самой алгебры A .

Напомним одно определение. Пусть A — равномерная алгебра на некотором бикompактном пространстве X . Говорят, что A — проникающая алгебра, если для любого замкнутого множества $F \subset X$ равномерное замыкание A , сужения алгебры A на F совпадает с алгеброй всех непрерывных комплекснозначных функций на F .

Предложение 3.1. Пусть A — такая равномерная алгебра на G , что Γ_A упорядочивает Γ . Алгебра A максимальна тогда и только тогда, когда она проникающая.

Доказательство. Необходимость. Из максимальной A и леммы 2.3 следует, что A — антисимметричная алгебра. Следовательно, A — проникающая (см. [9]).

Достаточность. Пусть A — проникающая алгебра. Применив лемму 2.2, получим, что Γ_A не только упорядочивает, но и вполне упорядочивает группу Γ , а это означает (см. [1]), что алгебра A есть алгебра обобщенных аналитических функций, т. е. $A = D_{\Gamma_A}$. Покажем, что Γ_A задает архимедов порядок на Γ . Действительно, пусть $a \in \Gamma \setminus \Gamma_A$ и χ_a — характер группы G , соответствующий элементу a . Поскольку Γ_A вполне упорядочивает Γ , то $-a$ принадлежит Γ_A . Рассмотрим алгебру A_a — равномерную алгебру на G , порожденную элементом χ_a и множеством Γ_A . Очевидно $A \subseteq A_a$. Так как сопряжение к χ_a есть χ_{-a} , то алгебра A_a не антисимметрична и в силу проникаемости алгебры A получаем $A_a = C(G)$. Следовательно, полугруппа Γ^0 , порожденная множеством Γ_A и элементом a , совпадает с Γ . Таким образом, Γ_A задает полный архимедов порядок на Γ . Теперь достаточно применить теорему А, и предложение доказано.

Предложение 3.2. Пусть A — алгебра обобщенных аналитических функций на G . Если A — проникающая алгебра, то найдется алгебра B обобщенных аналитических функций на G , содержащая A и являющаяся максимальной алгеброй на G .

Доказательство. Из определения алгебры обобщенных аналитических функций следует, что алгебра A порождена множеством $\Gamma_A \subseteq \Gamma$, т. е. $A = D_{\Gamma_A}$. Воспользовавшись леммой 2.2 и условием предложения 3.2, получаем, что в Γ_A нет нетривиальной группы. Далее, поскольку алгебра A проникающая, то в группе Γ нет группы конечного порядка. Действительно, если бы в Γ существовала группа G_0 конечного порядка, то полугруппа Γ_1 , порожденная множествами Γ_A и G_0 , во-первых, не совпала бы с Γ и, во-вторых, алгебра D_{Γ_1} была бы не антисимметричной, $D_{\Gamma_1} \neq C(G)$. А это противоречит условию проникаемости алгебры A . Таким образом, Γ не содержит группы конечного порядка и в Γ_A нет нетривиальной группы. Теперь, воспользовавшись леммой Цорна, можно показать существование такой полугруппы Γ^0 ($\Gamma_A \subseteq \Gamma^0$), что Γ^0 вполне упорядочивает Γ . Поскольку $\Gamma_A \subseteq \Gamma^0$, то $A \subseteq D_{\Gamma^0}$, и следовательно, D_{Γ^0} — также проникающая алгебра. Поэтому достаточно применить предложение 3.1, согласно которому D_{Γ^0} становится максимальной алгеброй. Предложение доказано.

Следствие. Пусть A — проникающая алгебра обобщенных аналитических функций на компактной группе G . Тогда G связна.

Теорема 3.3. Пусть A — равномерная алгебра на G и Γ_A упорядочивает Γ . Алгебра A содержится в некоторой максимальной алгебре на G тогда и только тогда, когда найдется такая замкнутая подгруппа H группы G , что

а) $A_{H_{x_0}} = C(H_{x_0})$, где $H_{x_0} = x_0 + H$ для некоторого $x_0 \in G$;

б) $A_{H_{x_0}}$ — проникающая алгебра на H_{x_0} .

Доказательство. Необходимость. Пусть B — максимальная алгебра на G , содержащая A . Поскольку Γ_A упорядочивает Γ , то Γ_B также упорядочивает Γ и, следовательно, максимальное неодноточечное множество антисимметрии алгебры B представимо в виде $x_0 + H$, где $x_0 \in G$, а H — некоторая замкнутая подгруппа группы G (см. [3], стр. 220). Покажем теперь, что $A_{H_{x_0}} = B_{H_{x_0}}$. Не теряя общности, можно считать, что $x_0 = 0$. Обозначим через H^0 группу характеров H . Нетрудно проверить, что $H^0 = \Gamma/H^\perp$, где $H^\perp$ — множество тех характеров из Γ , которые равны 1 на H . Поскольку Γ_A и Γ_B упорядочивают Γ и алгебры A_H и B_H антисимметричны, то Γ_{A_H} и Γ_{B_H} вполне упорядочивают H^0 . Следовательно, $A_H = B_H$ (см. [3], стр. 221). И поскольку B_H — максимальная алгебра на H , то она проникающая, поэтому проникающей является и алгебра A_H .

Достаточность. Пусть A_H — проникающая алгебра для некоторой группы $H \subset G$. Тогда на основании предложения 3.2 найдется максимальная в $C(H)$ алгебра B_H , содержащая A_H . Пусть $B = \{f \in C(G); f|_H \in B_H\}$. Нетрудно проверить, что $A \subset B$ и B — максимальная подалгебра в $C(G)$. Теорема доказана.

Пусть G — компактная связная группа. Укажем критерий, согласно которому G станет окружностью.

Т е о р е м а 3.4. Пусть G — компактная связная группа. Группа гомеоморфна окружности тогда и только тогда, когда для некоторого целого числа $n \geq 2$ найдется алгебра обобщенных аналитических функций на G , тип которой равен n .

Доказательство. Необходимость. Если G — окружность, то группа характеров группы G есть $\mathbb{Z}$ — группа целых чисел. Полугруппа $\mathbb{Z}_+$ задает полный архимедов порядок на $\mathbb{Z}$ и поэтому $t_{C(G)}(A_0) = \alpha$, где A — равномерная алгебра, порожденная полугруппой $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z} \setminus \{1\}$ (см. теорему 2.14).

Достаточность. Пусть G — компактная связная группа, и A — алгебра обобщенных аналитических функций на G , имеющая тип $n \geq 2$. Полугруппа Γ_A не содержит нетривиальную группу. Действительно, если бы Γ_A содержала бы группу H , то в силу связности $G \times (H) = \infty$. Поэтому алгебра A имела бы бесконечное число максимальных неодноточечных множеств антисимметрии (см. лемму 2.2). Но тип алгебры A конечен, следовательно, число максимальных неодноточечных множеств антисимметрии алгебры A не превосходит $t_{C(G)}(A)$. Пришли к противоречию. Таким образом, Γ_A не содержит нетривиальную группу. Из леммы Цорна получаем, что существует полугруппа Γ^0 , вполне упорядочивающая группу Γ и содержащая Γ_A . И поскольку $A \subset D_{\Gamma^0}$, то из конечности $t_{C(G)}(A)$ следует конечность $t_{C(G)}(\bar{D}_{\Gamma^0})$ и конечность $t_{D_{\Gamma^0}}(A)$. Поэтому согласно теоремам 2.1 и 2.14 Γ^0 не содержит не-

тривиальную группу и $t_{G(G)}(D_{\Gamma^0}) = 1$, $\text{codim}_{D_{\Gamma^0}}(A) = t_{D_{\Gamma^0}}(A)$. Пусть Γ_0 — максимальная подполугруппа полугруппы Γ^0 , содержащая Γ_A . Тогда $\Gamma^0 = \Gamma_0 \cup \{a_0\}$ (см. лемму 1.1). Поскольку ε -мера Хаара группы G является представляющей мерой некоторого мультипликативного функционала на D_{Γ^0} , то пространство максимальных идеалов алгебры D_{Γ^0} существенно шире группы G , и поэтому найдется такой мультипликативный функционал m на D_{Γ^0} , что

$$0 < |m(\gamma_a)| < 1, \quad a \in \Gamma^0.$$

С помощью m зададим отображение Φ из Γ в R — аддитивную группу вещественных чисел:

$$\begin{cases} \Phi(a) = -\log |m(\gamma_a)| & a \in \Gamma^0, \\ \Phi(-a) = -\Phi(a) \end{cases}$$

Отображение Φ является сохраняющим порядок гомоморфизмом группы Γ в группу вещественных чисел R и $\Phi(\Gamma^0) \subset R_+$, $\Phi(-\Gamma_0) \subset R_-$. Поскольку $\Gamma^0 = \Gamma_0 \cup \{a_0\}$, то $\Phi(\Gamma^0) = \Phi(\Gamma_0) \cup \Phi(a_0)$. Докажем, что $\Phi(\Gamma^0)$ совпадает с $Z_\Phi = \{x \in R_+; x = n \cdot \Phi(a_0), n \in Z_+\}$. Очевидно, что $\Phi(\Gamma^0) \supset Z_\Phi$. Покажем обратное включение. Допустим противное. Пусть для некоторого $m \in Z_+$ найдется $b \in \Gamma^0$ такое, что $m\Phi(a_0) < \Phi(b) < (m+1)\Phi(a_0)$. Тогда справедливы следующие неравенства:

$$0 < \Phi(b - ma_0) < \Phi(a_0), \quad 0 < \Phi((m+1)a_0 - b) < \Phi(a_0). \quad (3.1)$$

Из этих неравенств получаем, что

$$b - ma_0 \in \Gamma^0 \text{ и } (m+1)a_0 - b \in \Gamma^0.$$

Так как $\Gamma^0 = \Gamma_0 \cup \{a_0\}$, из (3.1) следует, что

$$b - ma_0 \in \Gamma_0 \text{ и } (m+1)a_0 - b \in \Gamma_0.$$

Поэтому $a_0 \in \Gamma$. Пришли к противоречию. Таким образом

$$\Phi(\Gamma^0) = Z_\Phi.$$

Поскольку алгебра D_{Γ^0} — максимальная и антисимметричная, то гомоморфизм Φ является изоморфизмом группы Γ на $Z_\Phi = Z_\Phi \cup (-Z_\Phi)$. Следовательно, группа Γ — группа характеров компактной группы G — изоморфна группе целых чисел. Поэтому G гомеоморфна окружности. Теорема доказана.

ВЦ Госплана Армянской ССР

Поступила 6.X.1977

Ս. Ա. ԳՐԻԳՐՅԱՆ. Կոմպակտ խմբի վրա սահմանված վերջավոր տիպ ունեցող հանրահաչիվների մասին (ամփոփում)

Ներկա հոդվածում ուսումնասիրվում են վերջավոր տիպ ունեցող հավասարաչափ հանրահաչիվները, որոնք ծնվում են բնութագրիչների խմբի որոշ ենթաբազմության միջոցով: Այդ դեպքերում Λ և $B(B \subset \Lambda)$ հանրահաչիվների համար տրվում է չափանիշ որպեսզի B հանրահաչիվը լինի վերջավոր տիպի հանրահաչիվ:

S. A. GRIGORIAN. *On algebras of finite type on a compact group G* (summary)

The paper investigates the types and the relative types of the class of uniform algebras which are generated by a subsemigroup of the group of characters in a compact Abelian group G .

For two algebras A, B , $A \subset B$ from this class a finiteness criterium of the type B with respect to A is found. In particular, for the algebra of all complex-valued continuous functions on G a maximality criterium for is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. K. Hoffman, I. Singer. Maximal subalgebras of $C(I)$. Amer. J. Math., 79, 1957, 295—305.
2. R. Kaufman. A maximality theorem in Fourier analysis. P.A.M.S, 18, 1967, 806—807.
3. Т. Гамелин. Равномерные алгебры, М., Изд. «Мир», 1974.
4. Л. С. Понтрягин. Непрерывные группы, М., Изд. «Наука», 1973.
5. Е. А. Горин. Подалгебры конечной коразмерности, Мат. заметки, 6 : 3, 1969.
6. М. А. Наймарк. Нормированные кольца, М., Изд. «Наука», 1968.
7. С. А. Григорян. Об алгебрах конечного типа, УМН, XXX, вып. 6, 1975.
8. С. А. Григорян. О типах равномерных алгебр, Функциональный анализ, 10, вып. 4, 1976.
9. С. А. Григорян. О некоторых свойствах функциональных алгебр с точки зрения ортогональных мер, Мат. заметки, 18, вып. 3, 1975.