ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIV, № 3, 1979 Математика

А. Ю. ШАХВЕРДЯН

ОБ УБЫВАНИИ ОГРАНИЧЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ

Рассматриваем следующую задачу. Пусть U — единичный круг в плоскости (z) и совокупность $E\subset U$ состоит из попарно не пересекающихся множеств e_k, $E=\sum\limits_{k\geq 1} e_k$, сгущающихся к единичной окружности S, таких что cap $(e_k)>0$ для каждого $k\geq 1$ и

$$d(e_k)=O(1),\ \rho(e_i,\ e_j)\geq\delta>0\ (k\to+\infty;\ i,\ j=1,\ 2,\cdots;\ i\neq j),\qquad (1)$$

где $\rho(x,\ y)$ есть гиперболическое расстояние между точками $x,\ y\in U$, а $d(e)$ — гиперболический диаметр множества $e\in U$:

$$d(e)=\sup\{\rho(x,\ y)|\ x,\ y\in e\}.$$

Если B означает класс аналитических ограниченных в U функций, то задача состоит в точной оценке скорости убывания нетождественных функций $f\in B$ к нулю вдоль E, точнее в оценке скорости убывания величин

$$\|f\|_{e_k}=\sup_{z\in e_k}|f(z)|.$$

Как известно, вопросы такого характера (также и для общего случая мероморфных функций с заданной характеристикой $T(r)$) впервые были поставлены и систематически изучались А. А. Шагиняном ([1—2]). В. Зейдель и др. в [3] заметили, что метод гармонической меры Р. Неванлинны (см. [4], гл. 3) применим к решению такого типа задач и получили более простое доказательство одной теоремы А. А. Шагиняна. При доказательстве основного результата настоящей работы (теорема 1) мы также используем этот метод.

Выражаю искреннюю благодарность академику АН Арм.ССР А. А. Шагиняну за постановку задачи и внимание к работе.

Для простоты записи примем следующие обозначения. Если $b(z)$ есть произведение Бляшке с последовательностью нулей N, то записываем $b(z)=b(z,\ N)$. Символом $\overline{N}$ обозначаем множество нулей функции $b(z,\ N)$. Если $a\in U$, $0\leq\rho<+\infty$, то $C(a,\rho)$ есть неевклидовый круг с центром в точке a радиуса ρ. Класс $B_0\subset B$ по определению состоит из тех функций, которые имеют лишь конечное число нулей в U и содержат все тождественно постоянные функции. B_1 есть класс тех функций $f\in B$, для которых $\sup\limits_{z\in U}|f(z)|\leq 1$. Запись const означает положительную постоянную. Иногда пишем $\|f\|_k$ вместо $\|f\|_{e_k}$.

Лемма 1. *Если $b(z)=b(z, N)$ есть произведение Бляшке, а e — непустое подмножество U, то*

$$\inf_{z\in e}|b(z)|\geqslant \exp\left\{-\lambda\frac{1+\log \operatorname{cth}\rho(e, \overline{N})}{1-\sup\limits_{z\in e}|z|}\right\}, \tag{2}$$

где $0<\lambda<\infty$ — постоянная, не зависящая от e.

Доказательство. Будем исходить из интегрального представления логарифма модуля произведения Бляшке. Пусть

$$b(z)=\prod_{k\geqslant 1}\frac{\bar{\alpha}_k}{|\alpha_k|}\frac{z-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_k z}, \quad \sum_{k\geqslant 1}(1-|\alpha_k|)<\infty \tag{3}$$

(если $\alpha_k=0$, то множитель $\frac{\bar{\alpha}_k}{|\alpha_k|}$ опускается).

Тогда

$$-\log|b(z)|=\sum_{k\geqslant 1}\log\left|\frac{1-\bar{\alpha}_k z}{z-\alpha_k}\right|$$

или

$$-\log|b(z)|=\int\limits_{\overline{N}}\log\frac{1}{[a, z]}\,d\mu(a),$$

где $[a, z]=\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|$, μ — точечное распределение положительной массы (конечной или бесконечной) на $\overline{N}$ и $\mu(a)$ есть кратность нуля $a\in\overline{N}$. Если ввести $d\sigma(a)=(1-|a|)\,d\mu(a)$, то $\operatorname{supp}(\sigma)=\overline{N}$ и условие сходимости ряда из (3) запишется в виде

$$\int\limits_{\overline{N}}d\sigma(a)=\sigma(\overline{N}),\quad 0<\sigma(\overline{N})<\infty$$

и нужное нам представление есть:

$$-\log|b(z)|=\int\limits_{\overline{N}}\frac{\log\frac{1}{[a, z]}}{1-|a|}\,d\sigma(a). \tag{4}$$

Для оценки последнего интеграла нам необходимо следующее замечание. Если $a\in U$, $0\leqslant\rho<\infty$ и a_1, a_2 ($|a_1|\leqslant|a_2|$) есть точки пересечения радиуса $[0, e^{i\arg a})$ с окружностью $\partial C(a, \rho)$, то

$$1-|a_1|=(1-|a|)\,\frac{1+th\,\rho}{1-|a|\,th\,\rho},\quad 1-|a_2|=(1-|a|)\,\frac{1-th\,\rho}{1+|a|\,th\,\rho}. \tag{5}$$

Для доказательства этих равенств достаточно рассмотреть образ $C(a, \rho)$ при преобразовании

$$\xi(z)' = e^{-i\arg a} \cdot \frac{z-a}{1-\bar{a}z}.$$

Вернемся к интегралу (4). Если $z \in U \setminus \bar{N}$, $N_z = \bar{N} \cap C(z, 1)$, то из (4) имеем

$$-\log|b(z)| = J_1 + J_2,$$

где

$$J_1 = \int\limits_{N_z} \frac{\log \operatorname{ctg} \rho(a, z)}{1-|a|} d\sigma(a), \quad J_2 = \int\limits_{\bar{N}\setminus N_z} \frac{\log\left|\frac{1-\bar{a}z}{z-a}\right|}{1-|a|} d\sigma(a).$$

Из монотонности $\operatorname{cth} x$ имеем

$$J_1 \leqslant \log \operatorname{cth} \rho(z, \bar{N}) \int\limits_{N_z} \frac{d\sigma(a)}{1-|a|}$$

и из соотношений (5) вытекает

$$J_1 \leqslant \frac{e^2 \sigma[C(z, 1)] \log \operatorname{cth} \rho(z, \bar{N})}{1-|z|} \leqslant \frac{8\sigma(\bar{N}) \log \operatorname{cth} \rho(z, \bar{N})}{1-|z|}.$$

Если $N_z = \varnothing$, то $J_1 = 0$ и полученное неравенство опять справедливо. Таким образом

$$J_1 \leqslant \frac{8\sigma(\bar{N}) \log \operatorname{cth} \rho(z, \bar{N})}{1-|z|}.$$

Оценим J_2. Если $a \in \bar{N} \setminus N_z$, то $\rho(a, z) \geqslant 1$ и $[a, z] \geqslant th\, 1$, откуда $1 - [a, z]^2 < 1/2$, и так как

$$\log\left|\frac{1-\bar{a}z}{z-a}\right| = -\frac{1}{2} \log[1-(1-[a, z]^2)],$$

то положив $x = 1-[a, z]^2$ и воспользовавшись неравенством

$$\log(1-x) \geqslant -2x \text{ для } 0 \leqslant x \leqslant 1/2,$$

получим

$$\log\left|\frac{1-\bar{a}z}{z-a}\right| \leqslant 1-[a, z]^2 = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{(1-\bar{a}z|^2} \leqslant 4 \cdot \frac{(1-|a|)(1-|z|)}{(1-|a||z|)^2} \leqslant$$

$$\leqslant 4 \cdot \frac{(1-|a|)(1-|z|)}{(1-|z|)^2} = 4 \cdot \frac{1-|a|}{1-|z|}.$$

Тогда

$$J_2 \leqslant \frac{4}{1-|z|} \int\limits_{\bar{N}\setminus N_z} d\sigma(a) = \frac{4\sigma(\bar{N}\setminus N_z)}{1-|z|},$$

то есть

$$J_2 \leqslant \frac{8\sigma(\bar{N})}{1-|z|}.$$

Теперь ясно, что для каждого $z \in U$

$$-\log |b(z)| \leq \lambda \cdot \frac{1 + \log \operatorname{cth} \rho(z, \overline{N})}{1 - |z|} \tag{6}$$

(так как оно справедливо и для $z \in \overline{N}$), где $\lambda = 8\sigma(\overline{N})$.

Переходя в обеих частях полученного неравенства к sup по $z \in e$, будем иметь (2).

Лемма 2. *Если $f \in B_0$, то*

$$\varliminf_{|z| \to 1-0} (1 - |z|) \log |f(z)| = -\infty \tag{7}$$

тогда и только тогда, когда $f \equiv 0$.

Доказательство. Пусть $g \in B_1$ и $g \neq 0$ в U. Тогда $-\log |g(z)|$ есть неотрицательная гармоническая в U функция и согласно теореме А. Плеснера

$$-\log |g(z)| = \int_0^{2\pi} P(z, e^{i\theta})\, d\mu(\theta), \tag{8}$$

где P есть ядро Пуассона, а μ—неубывающая функция θ на $[0, 2\pi]$:

$$\mu(\theta) = -\lim_{r \to 1-0} \int_0^{\theta} \log |g(re^{it})|\, dt \tag{9}$$

([5]. стр. 156). Если μ^* есть распределение конечной массы, соответствующее функции μ ($\mu^*(e)$ есть вариация μ на борелевском множестве e), то имеем неравенства:

$$\int_S P(z, e^{i\theta})\, d\mu^*(\theta) = \int_S \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2}\, d\mu^*(\theta) \leq \frac{1 - |z|^2}{(1 - |z|)^2} \int_S d\mu^*(\theta)$$

и из (8) имеем, что для каждого $z \in U$

$$(1 - |z|) \log |g(z)| \geq -2\mu^*(S).$$

Пусть теперь $f \in B_1$ имеет конечное число нулей $\langle \alpha_i \rangle_1^n = N$, где каждый выписан с соответствующей кратностью. Тогда, если $b(z) = b(z, N)$— конечное произведение Бляшке, то $g = f \cdot b^{-1}$ не обращается в нуль в U и из (6) вытекает, что

$$\varliminf_{|z| \to 1-0} (1 - |z|) \log |f(z)| \geq -[2\mu^*(S) + 8n],$$

так как $\sigma(\overline{N}) = \sum_{i=1}^{n} (1 - |\alpha_i|)$, $\sigma(\overline{N}) \leq n$. Пусть $f \in B_0$ и выполнено (7). Понятно, что дополнительное предположение $f \in B_1$ является несущественным и из предыдущих неравенств вытекает, что либо $n = +\infty$, либо $\mu^*(S) = +\infty$. Первый случай означает, что кратность какого-либо нуля есть ∞ и следовательно $f \equiv 0$; если же $\mu^*(S) = +\infty$, то из (9)

$$-\mu^*(S)-\lim_{r\to 1-0}\int_0^{2\pi}\log|g(re^{it})|\,dt=-\infty$$

и согласно известной теореме $g=0$, следовательно и $f=0$.

Формулировка и доказательство следующих предложений используют понятие гиперболической емкости подмножеств U, введенного и развитого М. Цудзи (см. [6], стр. 94). Теорию этого понятия можно получить рассматривая потенциалы положительных масс относительно ядра $\log[\xi, z]^{-1}$ вместо обычного $\log|\xi-z|^{-1}$. Гиперболическую емкость множества $e\subset U$ обозначаем $\gamma(e)$. Отметим также ([6], стр. 95), что cap $(e)=0$ тогда и только тогда, когда $\gamma(e)=0$.

Теорема 1. *Пусть E удовлетворяет* (1), $a_k\in e_k$ — *произвольные фиксированные числа.*

Если $f\in B$ и

$$\lim_{k\to\infty}(1-|a_k|)\log\|f\|_{e_k}=-\infty, \tag{10}$$

то

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\log\|f\|_{e_k}}{\log\gamma(e_k)}(1-|a_k|)=+\infty$$

тогда и только тогда, когда $f\equiv 0$.

Доказательство. Очевидно теорема будет доказана, если мы докажем ее для класса функций B_1. Пусть $f\in B_1$ и $f\neq 0$. Заметим, что из (10) вытекает, что f имеет бесконечно много нулей в U. Действительно, если точка b_k из замыкания e_k такова, что $\|f\|_k=|f(b_k)|$, то из (5) и (10) будем иметь, что

$$\lim_{k\to\infty}(1-|b_k|)\log|f(b_k)|=-\infty$$

и если допустить, что $f\in B_0$, то из леммы 2 вытекает, что $f\equiv 0$, что противоречит нашему предположению. Следовательно, f представляется в виде $f=gh$, где $g, h\in B_1$, $g\neq 0$ в U, а h есть бесконечное произведение Бляшке. Оценим $\|h\|_k$. Так как $|g|<1$, то

$$\|f\|_k\leqslant\|h\|_k\quad(k>1). \tag{11}$$

Имеем

$$\|h\|_k=\left\|\frac{f}{g}\right\|_k\leqslant\frac{\|f\|_k}{\inf\limits_{z\in e_k}|g(z)|}.$$

Если $\inf\limits_{z\in e_k}|g(z)|=|g(a_k')|$, где a_k' — точка из замыкания e_k, то из (5) и леммы 2 получим, что

$$\inf_{z\in e_k}|g(z)|>\exp\left\{-\frac{\text{const}}{1-|a_k|}\right\},$$

то есть

$$\|h\|_k\leqslant\|f\|_k\cdot\exp\left\{\frac{\text{const}}{1-|a_k|}\right\}$$

и учитывая (10) непосредственно видно, что для всех достаточно больших k

$$\|h\|_k \leqslant \|f\|_k^{1/2}.$$

Соединяя это неравенство с (11), имеем

$$\|h\|_k = \|f\|_k^{\delta_k}, \ 1/2 \leqslant \delta_k \leqslant 1, \ k \geqslant k_1. \tag{12}$$

Для определенности в (1) положим $\delta = 1$, то есть

$$\rho(e_i, e_j) \geqslant 1 \ (i, j = 1, 2, \cdots; i \neq j).$$

Тогда понятно, что если D есть гиперболическая $\frac{1}{2}$-окрестность E

$$D = \left\{ z \in U | \rho(z, E) < \frac{1}{2} \right\},$$

то $D = \sum_{k \geqslant 1} D_k$, $D_i \cap D_j = \varnothing$ $(i \neq j)$ и D_k есть гиперболическая $\frac{1}{2}$-окрестность e_k. Если $h(z) = b(z, N)$, то пусть

$$N_0 = N \cap D^c, \ N_0 = \langle \alpha_1, \alpha_2, \cdots \rangle, \ |\alpha_1| \leqslant |\alpha_2| \leqslant \cdots$$
$$N_k = (N \cap D_k) \cup \{\alpha_k\} \ (k \geqslant 1).$$

Если N_0 конечно, то считаем, что $\{\alpha_k\} = \varnothing$, начиная с некоторого места. Из (2), (5) и (12) вытекает $\lim_{k \to \infty} \rho(e_k, N) = 0$, что означает $N_k \neq \varnothing$ для всех достаточно больших k. Пусть

$$h_k(z) = b(z, N_k)$$

— конечное произведение Бляшке. Так как $N = \sum_{k \geqslant 1} N_k$, $N_i \cap N_j = \varnothing$ $(i \neq j)$, то $h = \prod_{k \geqslant 1} h_k$. Представим h в виде

$$h = h_k \bar{h}_k, \ \bar{h}_k = \prod_{\substack{l \geqslant k \\ l \neq k}} h_l, \ k \geqslant 1$$

и оценим $\|h_k\|_k$. Имеем

$$\|h_k\|_k = \left\| \frac{h}{\bar{h}_k} \right\|_k \leqslant \frac{\|h\|_k}{\inf\limits_{z \in e_k} |\bar{h}_k(z)|}.$$

Согласно лемме 1

$$\|h_k\|_k \leqslant \|h\|_k \cdot \exp\left\{ \frac{c}{1 - |\alpha_k|} \right\},$$

где $c = 8\sigma(\bar{N})(1 + \log \operatorname{cth} 1/2)$ не зависит от k. Если учесть, что $\|h_k\|_k \geqslant \|h\|_k$, то имеем

$$\|h_k\|_k = \|h\|_k^{\beta_k}, \ 1/2 \leqslant \beta_k \leqslant 1, \ k \geqslant k_2.$$

Из (12) и этого равенства тогда получим

$$\|h_k\|_k = \|f_k\|_k^{\beta_k} = \|f\|_k^{\alpha_k \beta_k} = \|f\|_k^{\gamma_k}, \ 1/4 \leqslant \gamma_k \leqslant 1, \ k \geqslant \max(k_1, k_2).$$

Если положим $f_0 = g$, $f_k = h_k$ для $k > 1$, то нами получено представление f в виде

$$f = \prod_{k \geqslant 0} f_k, \ f_k \in B_1 \ (k \geqslant 0) \tag{13}$$

такое, что для всех достаточно больших k

$$\|f_k\|_k = \|f\|_k^{\gamma_k}, \ 1/4 \leqslant \gamma_k \leqslant 1. \tag{14}$$

Так как для $z \in e_k$ $|f_k(z)| \leqslant \|f_k\|_k$, то из принципа гармонической меры имеем

$$\log |f_k(z)| \leqslant -\left(\log \frac{1}{\|f_k\|_k}\right) \cdot \omega(z, e_k), \ z \in e_k^c, \ k \geqslant 1,$$

где ω есть гармоническая мера e_k относительно области U/e_k. Если учесть, что для произвольного множества $e \subset U$, cap $(e) > 0$

$$\omega(z, e) = \frac{1}{\log \dfrac{1}{\gamma(e)}} \int_e \log \left|\frac{1 - \bar{a}z}{z - a}\right| d\mu(a), \tag{15}$$

где μ — равновесное (для гиперболического потенциала) распределение единичной массы на e, из (14) будем иметь

$$\log |f_k(z)| \leqslant -\gamma_k \left(\log \frac{1}{\|f\|_k}\right) \frac{1}{\log \dfrac{1}{\gamma(e_k)}} \int_{e_k} \log \frac{1}{[a, z]} d\mu_k(a).$$

Так как предположение $f(0) \neq 0$ не составляет для нас существенного ограничения, то положив в последнем неравенстве $z = 0$ и используя равенства (5) получим, что для всех достаточно больших k

$$\log \frac{1}{|f_k(0)|} > \frac{1}{4} \frac{\log \|f\|_k}{\log \gamma(e_k)} (1 - |a_k|)$$

и так как сходимость произведения (13) влечет сходимость ряда

$$\sum_{k > 1} \log \frac{1}{|f_k(0)|},$$

будем иметь, что

$$\sum_{k > 1} \frac{\log \|f\|_k}{\log \gamma(e_k)} (1 - |a_k|) < +\infty,$$

чем и заканчивается доказательство.

Хорошо известно, что скорость $\exp\left\{-\dfrac{\text{const}}{1 - |a|}\right\}$ является экстремальной для убывания вдоль радиуса нетождественных функций из

B (теорема А. Л. Шагиняна; подробнее см. [5], стр. 117). Следующее предложение дает точное выражение величины „протяженности" множества $E \subset U$, удовлетворяющего (1) для того, чтобы указанный порядок убывания сохранял свое экстремальное свойство.

Теорема 2. *Пусть E удовлетворяет условию* (1), $a_k \in e_k$ — *произвольные фиксированные числа и*

$$\sum_{k=1} \frac{1}{\log \frac{1}{\gamma(e_k)}} = +\infty. \tag{16}$$

Если $f \in B$ *и*

$$\lim_{k \to \infty} (1 - |a_k|) \log \|f\|_{e_k} = -\infty, \tag{17}$$

то $f \equiv 0$.

Можно указать множество E, удовлетворяющее требованию (1) *и функцию $f \in B$ так, что ряд* (16) *сходится, для f выполнено* (17) *и* $f \neq 0$.

Доказательство. Первая часть есть непосредственное следствие теоремы 1 и не нуждается в доказательстве. Для того чтобы убедиться в справедливости второй части теоремы, рассмотрим бесконечную последовательность точек $a_k \in U$, занумерованных в порядке неубывания модулей и такую, что

$$\sum_{k=1} (1 - |a_k|) < \infty, \ \rho(a_i, a_j) \geqslant 1 \ (i, j = 1, 2, \cdots; \ i \neq j). \tag{18}$$

Выберем числа $\rho_k > 0$ $(k = 1, 2, \cdots)$, так, чтобы

$$\sum_{k=1} \frac{1}{\log \frac{1}{\rho_k}} < +\infty \tag{19}$$

и положим $e_k = \bar{C}(a_k, \rho_k)$. Нетрудно заметить, что при условии $\rho_k \underset{k \to \infty}{\to} 0$ выполнено равенство

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\ln \rho_k}{\ln \gamma(e_k)} = 1.$$

Действительно, из (15) имеем

$$\omega(0, e_k) = \frac{1}{\log \frac{1}{\gamma(e_k)}} \cdot \int_{e_k} \log \frac{1}{|a|} \, d\mu_k(a). \tag{20}$$

С другой стороны, посредством дробно-линейного преобразования легко получим

$$\omega(z, e_k) = \frac{\log \left| \frac{1 - \bar{a}_k z}{z - a_k} \right|}{\log \operatorname{cth} \rho_k}.$$

Положив здесь $z = 0$ и используя (5), после замены интеграла в правой части (20) через $-\log|a|$, получим требуемое соотношение. Из (18) и (19) вытекает, что существует последовательность целых чисел $p_k > 1$ так, что

$$\sum_{k>1} p_k(1-|a_k|) < \infty \text{ и } \lim_{k\to\infty} p_k(1-|a_k|)\log\frac{1}{\rho_k} = +\infty. \tag{21}$$

Существование таких p_k есть следствие известного факта из теории положительных числовых рядов: существует ряд, сходящийся „медленнее“ двух наперед заданных сходящихся рядов. Если τ_k означает класс всех псевдополиномов $T(z)$

$$T(z) = \prod_{i=1}^{p_k} [z, \alpha_i]$$

степени p_k с нулями из e_k ($\alpha_i \in e_k$), то так же как и в случае полиномов, можно доказать существование псевдополинома $T_k \in \tau_k$ такого, что

$$\|T_k\|_{e_k} = \inf_{T\in\tau_k} \|T\|_{e_k}.$$

Так как $T(z)$ есть конформный инвариант, то для оценки $\|T_k\|_k$ можем предполагать, что $e_k = C(0, \rho_k)$. Имеем

$$T(z) = \prod_{i=1}^{p_k} \left|\frac{z-\alpha_i}{1-\bar{\alpha}_i z}\right|$$

и так как для всех достаточно больших k и всех $z \in U$

$$2 \geqslant |1-\bar{\alpha}_i z| \geqslant 1-|\alpha_i| \geqslant 1-\operatorname{th}\rho_k \geqslant 2^{-1} \quad (i=1,\cdots, p_k),$$

то

$$2^{-p_k}|\tilde{T}(z)| \leqslant T(z) \leqslant 2^{p_k}|\tilde{T}(z)| \quad (z \in U),$$

где $\tilde{T}$ есть полином степени p_k с нулями из e_k; откуда и вытекает

$$2^{-p_k}\|\tilde{T}_k\|_k \leqslant \|T_k\|_k \leqslant 2^{p_k}\|\tilde{T}_k\|_k,$$

где $\tilde{T}_k$ есть полином Чебышева для множества e_k степени p_k. Следовательно

$$(2^{-1}\operatorname{th}\rho_k)^{p_k} \leqslant \|T_k\|_k \leqslant (2\operatorname{th}\rho_k)^{p_k}. \tag{22}$$

Если $\langle \alpha_i^{(k)} \rangle_{i=1}^{p_k}$ есть нули T_k, то пусть $b_{(0)}(z)$ означает произведение Бляшке с нулями $\langle \alpha_i^{(k)} | i = 1,\cdots, p_k; k \geqslant 1 \rangle$. Отметим, что из (21) и (5) вытекает, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{p_k} (1-|\alpha_i^{(k)}|) < \infty.$$

Очевидно $\|b_{(0)}\|_k \leqslant \|T_k\|_k$ и из (22) имеем

$$(1-|a_k|)\log\|b_{(0)}\|_k \leqslant -2\,(1-|a_k|)\,p_k \log\frac{1}{\operatorname{th}\rho_k},$$

Тогда из (21) ясно, что $b_{(0)}(z)$ удовлетворяет (17) и требуемая функция построена.

Заметим, что в силу известного представления функций ограниченного вида (класс N Р. Неванлинны) в виде отношения двух функций из B, заключения теорем 1, 2 остаются в силе, если заменить в их формулировках класс B на N.

Сравним полученные здесь предложения с имеющимися в этом направлении результатами И. В. Ушаковой ([7—8]) и С. Я. Хавинсона ([9]). В соответствующих теоремах из [7—9] даются условия на дискретное точечное множество $E\subset D$, при которых скорость убывания $\exp\{-\mathrm{const}/1-|z|\}$, указанная А. Л. Шагиняном, является экстремальной для класса N (в [8] рассматривается аналогичный вопрос для мероморфных функций с произвольным ростом характеристики). Говоря описательно, суть этих результатов сводится к тому, что для тех E, которые не „скапливаются" вблизи какой-либо последовательности $\{\xi_n\}_1^\infty$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-|\xi_n|)<\infty$ неэвклидовой плоскости, названная скорость есть экстремальная для убывания вдоль расположенного некасательно к S множества E. В теоремах 1—2, в отличие от цитируемых, рассматривается именно тот случай, когда такое „скопление" точек E (уже не дискретного) имеет место, и теоремы единственности из [7—9] не действуют.

Армянский педагогический институт
им. Х. Абовяна

Поступила 10.VI.1977

Ա. Յ. ՇԱՀՎԵՐԴՅԱՆ. Սահմանափակ անալիտիկ ֆունկցիաների դասի մասին. *(ամփոփում)*

Աշխատանքում դիտարկվում է միավոր շրջանում որոշակի ենթաբազմություններով նվազելու էքստրեմալ (սահմանափակ անալիտիկ ֆունկցիաների դասի համար) արագությունը։

A. Y. SHAHVERDIAN. *On the boundary behaviory of bounded analytical functions* (summary)

Two theorems are proved concerning the experimental rats of decrease over some special sets in the unit disc for a class of bounded analytical in the disc sunctions.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Л. Шагинян.* О некоторых неравенствах и их применениях в теории функций. ДАН СССР, № 2, 1959, 284—287.
2. *А. Л. Шагинян.* Об одном основном неравенстве в теории функций и его приложениях, Изв. АН Арм.ССР, сер. физ.-мат. н., 12, № 1, 1959, 3—25.

3. *J. S. Hwang, F. Schnitzer, W. Seidel.* Uniqueness theorems for bounded holomorphic functions, Mathematische Zeitscrift., bd. 122, H. 4, 1971.
4. *Р. Неванлинна.* Однозначные аналитические функции, М.—Л., Гостехиздат, 1941.
5. *А. Ловатер.* Граничное поведение аналитических функций. В сб. Мат. анализ., т. 10, 1973 (Итоги науки, ВИНИТИ АН СССР), М., 1973, 99—204.
6. *M. Tsuji.* Potential theory in modern function theory, Maruzen Co., Tokyo, 1959.
7. *И. В. Ушакова.* Теорема единственности для функций, голоморфных и ограниченных в единичном круге, ДАН СССР, 130, № 1, 1960, 29—32.
8. *И. В. Ушакова.* Некоторые теоремы единственности для функций, субгармонических и мероморфных в единичном круге, ДАН СССР, 137, № 6, 1961, 1319—1322.
9. *С. Я. Хавинсон.* Теория экстремальных задач для ограниченных аналитических функций, удовлетворяющих дополнительным условиям внутри области, УМН, 18, № 2, 1963, 25—98.