ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIV, № 2, 1979 Математика

Г. Ц. АКОПЯН, О. А. ГААСТЯН

# КЛАССЫ ГРАФОВ, КРИТИЧЕСКИХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОКРЫТИЙ

Рассмотрим задачи покрытия вершин или ребер графа вершинами или ребрами.

Пусть $G = [V(G), E(G)]$—граф, не содержащий изолированных вершин, где $V(G)$ — множество вершин, а $E(G)$ — множество ребер графа. Если $e = [u, v]$, где $u, v \in V(G)$ и $e \bar{\in} E(G)$, то через $G_e$ будем обозначать граф $\{V(G)\ E(G) \cup \{e\}\}$. Пусть $d_G(u, v)$ — расстояние между вершинами $u$ и $v$ в графе $G$. Введем следующие обозначения:

$$V(u) = \{v | v \in V(G),\ d_G(u, v) \leqslant 1\},$$

$$E(u) = \{e | e \in E(G),\ u \in e\},$$

$$V(e) = \{v | v \in V(G),\ v \in e\},$$

$$E(e) = \{f | f \in E(G),\ f \cap e \neq \varnothing\}.$$

Множество $U \subseteq V(G)$ называется покрытием вершин (соответственно ребер) графа $G$ вершинами, если $V(G) = \bigcup_{u \in U} V(u)$ (соответственно $E(G) = \bigcup_{u \in U} E(u)$).

Множество $W \subseteq E(G)$ называется покрытием вершин (соответственно ребер) графа $G$ ребрами, если $V(G) = \bigcup_{e \in W} V(e)$ (соответственно $E(G) = \bigcup_{e \in W} E(e)$).

Покрытие называется тупиковым, если оно не содержит собственного подмножества, являющегося покрытием. Покрытие, содержащее наименьшее число элементов, называется минимальным.

Через $\Pi(G)$, $T(G)$ и $M(G)$ мы будем обозначать множество всех покрытий, тупиковых покрытий и, соответственно, минимальных покрытий графа $G$, считая заранее известным, о каком из четырех типов покрытий идет речь.

Определение 1. Граф $G$ назовем п-критическим (соответственно т-критическим или м-критическим) относительно рассматриваемого покрытия, если для каждого $e = [u, v] \subseteq V(G)$, $e \bar{\in} E(G)$, $\Pi(G) \neq \Pi(G_e)$ (соответственно $T(G) \neq T(G_e)$ или $M(G) \neq M(G_e)$), в противном случае граф $G$ назовем п-некритическим (т-некритическим или м-некритическим). По определению, полный граф является п-т- и м-критическим.

Через $\Gamma_п$, $\Gamma_т$ и $\Gamma_м$ будем обозначать множество всех п-критических, т-критических и м-критических графов.

Заметим, что для каждого из четырех рассматриваемых нами понятий покрытия выполняются соотношения $\Gamma_п = \Gamma_т$, $\Gamma_н \subseteq \Gamma_т$; поэтому для краткости п- или т-критические графы будем называть критическими.

Рассмотрим задачу распознавания критических графов относительно введенных понятий покрытий.

1°. Покрытие вершин графа вершинами.

Определение 2. Вершину $v$ графа $G$ назовем регулярной, если существует вершина $u \neq v$ такая, что $V(u) \subseteq V(v)$.

Так, например, вершина, смежная с висячей вершиной, является регулярной.

Определение 3. Вершины $v$, $u$, $v \neq u$ графа $G$ назовем попарно-тупиковыми, если существует тупиковое покрытие $U$, содержащее эти вершины.

Заметим, что любые две несмежные вершины графа являются попарно-тупиковыми.

Пусть $U \in \Pi(G)$ и $V_U(u) = V(u) \setminus \bigcup\limits_{v \in U \setminus \{u\}} V(v)$. Тогда покрытие $U$ будет тупиковым в том и только в том случае, если $|V_U(u)| \geqslant 1$ для всех вершин $u \in U$.

Лемма 1. *Для того чтобы вершина $v$ была регулярной, необходимо и достаточно выполнение условий $V_U(v) \neq \{v\}$ для всех тупиковых покрытий $U$, содержащих $v$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $v$ — регулярная вершина, т. е. существует вершина $u \neq v$ такая, что $V(u) \subseteq V(v)$. Если $U \in T(G)$ и $v \in U$, то из регулярности $v$ для всех вершин $w \in V(u)$ следует, что $w \in U$ и $\{v\} \neq V(u) \subseteq V_U(v)$.

Достаточность. Пусть для всех $U \in T(G)$, $v \in U$ следует, что $V_U(v) \neq \{v\}$. Тогда легко заметить, что если $v$ не является регулярной вершиной, то можно построить покрытие $U$ из $T(G)$, не удовлетворяющее условию леммы.

Теорема 1. *Смежные вершины $u$ и $v$ графа $G$ являются попарно-тупиковыми тогда и только тогда, когда существуют нерегулярные вершины $u$ и $v'$ отличные от $u$ и $v$ такие, что*

$$\{u, u'\} \in E(G),\ \{v, u'\} \notin E(G),\ \{v, v'\} \in E(G),\ \{u, u'\} \notin E(G).$$

Лемма 2. *Пусть $e = \{u, v\} \subseteq V(G)$, $e \notin E(G)$. Тогда $T(G_e) = T(G)$ в том и только в том случае, если $u$ и $v$ — регулярные вершины графа $G$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $T(G_e) = T(G)$. Покажем, что вершины $u$ и $v$ — регулярные. Предположим, например, что $u$ — нерегулярная вершина. Тогда по лемме 1 существует $U \in T(G)$, такое, что $V_U(u) = \{u\}$. Если $v \notin U$, то $(U \setminus \{u\}) \cup \{v\} = U' \in T(G_e)$ и $U' \notin T(G)$. Если $v \in U$, то в графе $G_e$ имеем $V_U(u) = 0$ и, следовательно, $U \notin T(G_e)$. Это противоречие доказывает, что $u$ — регулярная вершина.

Достаточность. Пусть $u$ и $v$ — две несмежные регулярные вершины графа $G$. Докажем, что $T(G)=T(G_e)$. Пусть $U \in T(G)$. Если $U$ не содержит хотя бы одну из вершин $u$ и $v$, то $U \in T(G_e)$. Если $U$ содержит вершины $u$ и $v$, то из леммы 1 следует, что $V_U(u) \neq \{u\}$ и $V_U(v) \neq \{v\}$. Отсюда вытекает, что в графе $G_e$ $|V_U(u)| \geqslant 1$ и $|V_U(u)| \geqslant 1$, т. е. $U \in T(G_e)$. Следовательно, $T(G) \subseteq T(G_e)$.

Обратное включение $T(G_e \subseteq T(G)$ легко следует из регулярности вершин $u$ и $v$ графа $G$.

Из определения 1 и леммы 2 следует

Теорема 2. *Для того чтобы граф $G$ был некритическим, необходимо и достаточно, чтобы он содержал две несмежные регулярные вершины.*

Следствие 1. *Для того чтобы граф $G$ являлся критическим, необходимо и достаточно, чтобы все его регулярные вершины принадлежали одной и той же клике.*

Пусть $K$ — класс тех графов $G$, в которых никакие две смежные вершины не являются попарно-тупиковыми.

Пусть $V=\{v_1, \cdots, v_p\}$ — некоторое множество и $F=\{F_1, \cdots, F_k\}$ — множество, элементами которого являются подмножества множества $V$.

Определение 4. Скажем, что множество $F$ является $k$-тупиковым, если существует граф $G \in K$ такой, что $V(G)=V$ и $T(G)=F$.

По данному множеству $F$ построим следующий граф $G[F]$: $V(G[F])=\bigcup\limits_{F_i \in F} F_i$ и две вершины этого графа соединяются ребром тогда и только тогда, когда не существует подмножества $F_i \in F$, содержащего эти вершины.

Из построения графа $G[F]$ и определения 4 следует

Теорема 3. *Для того чтобы множество $F$ было бы $k$-тупиковым, необходимо и достаточно, чтобы $F=T(G[F])$.*

2°. Покрытие вершин графа ребрами.

Для этого понятия справедлива лемма, соответствующая лемме 2.

Лемма 3. *Пусть $e=\{u, v\} \subseteq V(G)$, $e \notin E(G)$. Тогда $T(G_e)=$ $=T(G)$ в том и только том случае, если вершины $u$ и $v$ имеют смежные висячие вершины.*

Из этой леммы следует, что граф $G$ является критическим тогда и только тогда, когда все его висячие вершины смежны с вершинами одной и той же клики.

Так как каждая вершина, смежная с висячей, является регулярной, то все графы, критические относительно покрытия вершин графа вершинами, будут критическими относительно покрытия вершин графа ребрами.

Нетрудно показать, что все графы будут критическими относительно покрытий ребер графа вершинами и ребер графа ребрами.

Ереванский государственный университет

Поступила 22.I.1978

Հ. Ց. ՀԱԿՈԲՅԱՆ, Հ. Հ. ԳԱԼՍՏՅԱՆ. Ծածկույթների նկատմամբ կրիտիկական գրաֆների դասերը *(ամփոփում)*

*Դիտարկվում են ծածկույթների խնդիրները գրաֆների վրա։ Սահմանվում է ծածկույթի նկատմամբ գրաֆի գաղափարը և տրվում են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, որոնց դեպքում գրաֆը կլինի կրիտիկական դիտարկվող ծածկույթի նկատմամբ։*

H. Ts. HAKOBIAN, H. H. GALUSTIAN. *Classes of critical graphs in reference to coverings* (summary)

The problems of coverage are considered on graphs. The concept of critical graph with respect to a coverage is defined, necessary and cufficient conditions are given for a graph to bs critical with respect to the considered covering.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Ф. Харари.* Теория графов, Изд. Мир", М., 1973.
2. *Ю. И. Журавлев.* Теоретико-множественные методы в алгебре логики, Сб. „Проблемы кибернетики", вып. 8, 1962.
3. *Г. Ц. Акопян.* Об эквивалентных пр:образованиях покрытий, „Кибернетика", Киев. 6, 1972.