ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XIV, № 2, 1979 Математика

М. Ю. ХОДЖАЯНЦ

НЕКОТОРЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОПЕРАТОРОВ ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ

В настоящей работе рассматриваются две характеристики операторов перечисления. Исследуется связь этих характеристик друг с другом, а также с остальными множествами, определяющими оператор перечисления, относительно различных типов сводимости. Далее рассматриваются возможности ускорения перечисления множеств, определяющих оператор перечисления на основании введенного М. Блюмом понятия ускоряемого множества.

Все основные обозначения и понятия, используемые в работе, взяты из [1].

Пусть φ и W — стандартные нумерации частично рекурсивных функций и рекурсивно перечислимых множеств, а D — каноническая нумерация конечных множеств [1]. N — множество натуральных чисел.

Определение 1. (см. [1]). Отображение Ψ множества 2^N во множество 2^N называется оператором перечисления, если

$$\exists z \forall A \forall x (x \in \Psi(A) <=> \exists u (<x, u> \in W_z \& D_u \subseteq A)).$$

Мы будем говорить, что множество W_z определяет оператор перечисления Ψ. В качестве номера оператора перечисления Ψ возьмем номер множества, которое определяет этот оператор. Пусть Φ — определенная таким образом нумерация операторов перечисления [1].

Введем следующие отношения на N:

$$x \preceq y <=> (l(x) = l(y) \& D_{r(x)} \subseteq D_{r(y)}),$$

$$x \prec y <=> (x \preceq y \& x \neq y).$$

Здесь l и r это функции, вычисляющие по x соответственно левую и правую компоненты пары с номером x. Для произвольного числа z рассмотрим два множества

$$V_z = \{x | x \in W_z \& y (y \prec x \forall \supset y \notin W_z)\},$$

$$S_z = \{x | \exists y (y \in W_z \& y \preceq x)\}.$$

Введенные множества обладают следующими очевидными свойствами:

a) $\forall x \forall y (\forall A (\Phi_x(A) = \Phi_y(A)) <=> V_x = V_y),$

b) $\forall x \forall y (\forall A (\Phi_x(A) = \Phi_y(A)) <=> S_x = S_y),$

c) $\forall x \forall A \forall y (y \in \Phi_x(A) <=> \exists u (<y, u> \in V_x \& Du \subseteq A)),$

d) $\forall x$ (S_x определяет Φ_x).

Теорема 1.

a) $\forall x\,(V_x \equiv_{\Pi} S_x)$.

b) $\forall x \forall y\,(W_y$ *определяет* $\Phi_x \supset V_x \leqslant_{\Pi} W_y)$.

c) *Для любого непустого оператора перечисления* Φ_x *в каждой рекурсивно перечислимой* T*-степени* **a** *такой что* $d(V_x) \leqslant$ **a**, *существует множество, определяющее* Φ_x.

Доказательство. Пункты a) и b) теоремы очевидны. Докажем c). Пусть A—произвольное рекурсивно перечислимое множество степени **a**. Согласно a) и условию теоремы, $S_x \leqslant_T A$. Так как $V_x \neq \varnothing$, то зафиксируем произвольный элемент $\langle z, u \rangle$ из V_x. Рассмотрим следующее множество:

$$B = \{\langle y, v \rangle \mid \langle y, v \rangle \in S_x \,\&\, (y = z \supset (u = v \vee \exists t\,(t \in A \,\&\, D_v = D_u \cup \{t\}))))\}.$$

Очевидно, что $A \leqslant_m B$, $B \leqslant_T A$ и B определяет Φ_x.

Таким образом, каждый оператор перечисления Ψ характеризуют два множества V_Ψ и S_Ψ. V_Ψ назовем стержнем оператора Ψ, а S_Ψ—насыщением Ψ. Любое из этих множеств определяет T-степени всех множеств, определяющих Ψ, поэтому под T-степенью оператора перечисления Ψ мы будем понимать $d(V_\Psi)$.

Легко видеть, что для любого Ψ S_Ψ рекурсивно перечислимо. Из следующей теоремы видно, что существуют операторы перечисления, стержни которых не рекурсивно перечислимы.

Теорема 2. *Для любой нерекурсивной рекурсивно перечислимой* T*-степени* **a** *существует оператор перечисления* Ψ *степени* **a** *такой, что* V_Ψ *не рекурсивно перечислимо.*

Доказательство. Известно, что в каждой нерекурсивной рекурсивно перечислимой T-степени есть негиперпростое рекурсивно перечислимое множество. Пусть $A \in$ **a** является таковым. Так как A негиперпросто, то существует общерекурсивная функция g, мажорирующая $\overline{A}$. Пусть f и h — общерекурсивные функции, удовлетворяющие следующим условиям:

$$|W_{f(x)}| = a_x, \text{ где } a_0, a_1, \cdots a_n, \cdots \text{ элементы } \overline{A},$$

расположенные в порядке возрастания,

$$D_{h(0)} = \{x \mid x \leqslant g(0)\}, \cdots, D_{h(n+1)} = \{x \mid g(n) + 1 \leqslant x \leqslant g(n+1)\}.$$

Строим множество B следующим образом. Для каждого n в B перечисляем пару $\langle n, h(n) \rangle$. Параллельно перечисляем множество $W_{f(n)}$. При каждом новом элементе, появившемся в $W_{f(n)}$, от $D_{h(n)}$ отнимаем максимальный элемент и пару $\langle n, u \rangle$, где u — номер полученного конечного множества, перечисляем в B.

Пусть B определяет оператор Ψ. Очевидно, что для любых x и u

$$\langle x, u \rangle \in V_\Psi \supset g(x) - p(u) \in \overline{A},$$

$$\langle x, u \rangle \overline{\in} V_\Psi \supset (g(x) < p(u) \vee (g(x) \geqslant p(u) \,\&\, g(x) - p(u) \overline{\in} \overline{A})),$$

где $p(u) = |D_u|$.

Таким образом, $V_\Psi \leqslant_m \bar{A}$ и V_Ψ не рекурсивно перечислимо, так как $\bar{A}$ не рекурсивно перечислимо. Легко убедиться, что и $\bar{A} \leqslant_m V_\Psi$.

Следствие. Для любой нерекурсивной рекурсивно перечислимой T-степени **a** существует оператор перечисления Ψ такой, что

1. $V_\Psi \in$ **a**,
2. V_Ψ иммунно.

Доказательство. В каждой нерекурсивной рекурсивно перечислимой T-степени существует простое негиперпростое множество (см. [2]). В доказательстве теоремы 2 в качестве A возьмем такое множество.

Теорема 3. *Существует оператор перечисления Ψ такой, что V_Ψ продуктивно, а S_Ψ — креативно.*

Доказательство. Пусть h—общерекурсивная функция, удовлетворяющая следующему условию: $D_{h(x)} = \{x\}$ и

$$A = \{< x, h(x) > | x \in N\}.$$

Тогда $B = A \cup \{< x, 0 > | x \in K\}$, где 0 номер пустого множества в нумерации D, и B определяет Ψ. Пусть $f(x) = < x, h(x) >$ и $g(x) = = < x, 0 >$. Тогда $x \in \bar{K} <=> f(x) \in V_\Psi$ и $x \in K <=> g(x) \in S_\Psi$ для всех x.

Замечание. Для любого оператора перечисления Ψ V_Ψ не гипериммунно.

Существование оператора с иммунным стержнем дает нам возможность убедиться в том, что существуют операторы перечисления, стержни и насыщения которых находятся в несравнимых m-степенях. Следующая теорема показывает, что существуют операторы перечисления с таким же свойством, стержни которых рекурсивно перечислимы.

Теорема 4. *Существует оператор перечисления Ψ такой, что*

1. *V_Ψ рекурсивно перечислимо,*
2. *V_Ψ и S_Ψ находятся в несравнимых m-степенях.*

Доказательство. Будем строить множество $V = V_\Psi$ по шагам. Построение будет производиться с помощью вспомогательных множеств A, B, C, F и последовательностей чисел $\{t_m^n\}$.

Пусть $D_{d_n} = \{2n, 2n+1\}$.

Шаг 0.

$$V_0 = \varnothing,\ A_0 = \varnothing,\ B_0 = \varnothing,\ F_0 = \varnothing,\ C_0 = \{< x, dy > | x, y \in N\},$$

$t_i^0 = < i, d_i >$. Переходим к шагу 1.

Шаг $n+1$. Предпримем по $n+1$ шагов в вычислении всех тех функций $\varphi_{i_0}(t_{i_0}^n), \cdots \varphi_{i_k}(t_{i_k}^n)$, для которых $i_0, \cdots, i_k \leqslant n+1$ и $i_0, \cdots, i_k \notin F_n$.

Пусть a—наименьшее из тех чисел i_j, для которых эти вычисления завершились. Если такого a не существует, то $V_{n+1} = V_n$.

$$A_{n+1}=A_n,\ F_{n+1}=F_n,\ B_{n+1}=B_n,\ C_{n+1}=C_n$$

и переходим к блоку 2.

Если такое a существует, то возможны следующие два случая:

Случай I: t_a^n сравнимо с $\varphi_a(t_a^n)$ относительно $\prec$.

1. $t_a^n=\varphi_a(t_a^n)$. Тогда $V_{n+1}=V_n\cup\{<a,v>\}$ (v определяется из соотношения $D_v=\{w|w=\mu s\,(s\in D_{r(t_a^n)})\}$, $A_{n+1}=A_n\cup\{x|<a,v>\prec x\vee x\prec <a,v>\}$. Переходим к блоку 1.

2. $t_a^n\prec\varphi_a(t_a^n)$. Тогда $V_{n+1}=V_n\cup\{\varphi_a(t_a^n)\}$, $A_{n+1}=A_n\cup\{x|x\prec\varphi_a(t_a^n)\vee\varphi_a(t_a^n)\prec x\}$. Переходим к блоку 1.

3. $\varphi_a(t_a^n)\prec t_a^n$. Тогда $V_{n+1}=V_n\cup\{t_a^n\}$, $A_{n+1}=A_n\cup\{x\prec t_a^n\vee t_a^n\prec x\}$. Переходим к блоку 1.

Случай II. t_a^n несравнимо с $\varphi_a(t_a^n)$ относительно $\prec$. Пусть $\varphi_a(t_a^n)=<z,u>$.

1. $a=z$. Тогда $V_{n+1}=V_n\cup\{t_a^n\}$, $A_{n+1}=A_n\cup\{x|\,x\prec t_a^n\vee t_a^n\prec x\vee x\preceq\varphi_a(t_a^n)\}$. Переходим к блоку 1.

2. $a<z$. Возможны 4 случая:

a). $\varphi_a(t_a^n)\in A_n\,\&\,\exists x\,(x\prec\varphi_a(t_a^n)\,\&\,x\,\overline{\in}\,A_n)$.

Тогда $V_{n+1}=V_n\cup\{<a,v>\}$, где $D_v=\{w|w=\mu s\,(s\in D_{r(t_a^n)})\}$, $A_{n+1}=A_n\cup\{x|<a,v>\prec x\vee x\prec<a,v>\}$. Переходим к блоку 1.

b). $\varphi_a(t_a^n)\in A_n\,\&\,\forall x\,(x\prec\varphi_a(t_a^n)\supset x\in A_n)$.

Тогда $V_{n+1}=V_n\cup\{t_a^n\}$, $A_{n+1}=A_n\cup\{x|x\prec t_a^n\vee t_a^n\prec x\}$. Переходим к блоку 1.

c). $\varphi_a(t_a^n)\,\overline{\in}\,A_n\,\&\,\varphi_a(t_a^n)\,\overline{\in}\,V_n$, тогда

$$V_{n+1}=V_n\cup\{t_a^n\},\ A_{n+1}=A_n\cup\{x|x\prec t_a^n\vee t_a^n\prec x\vee x\preceq\varphi_a(t_a^n)\}.$$

Возможны 2 подслучая:

c₁). $\exists p\,(<a,p>\in B_n)$. Определим множество $I_a=\{p|<a,p>\in B_n\}$.

Тогда

$$F_{n+1}=(F_n\cup\{a\})-I_a,\ B_{n+1}=B_n-\{<a,p>|\,p\in I_a\},$$

$$C_{n+1}=C_n-(\{<p,x>|\,p\in I_a\,\&\,\exists y\,(<p,y>\in V_n\,\&\,D_y\cap D_x\neq\varnothing)\}\cup \cup\{<z,x>|\,D_x\cap D_u\neq\varnothing\}).$$

Переходим к блоку 2.

c₂). $\forall p\,(<a,p>\,\overline{\in}\,B_n)$. Тогда $F_{n+1}=F_n\cup\{a\}$, $B_{n+1}=B_n$, $C_{n+1}=C_n-\{<z,x>|\,D_x\cap D_u\neq\varnothing\}$. Переходим к блоку 2.

d). $\varphi_a(t_a^n)\,\overline{\in}\,A_n\,\&\,\varphi_a(t_a^n)\in V_n$. Пусть $b=\mu x\,(t_a^n\prec x\,\&\,x\,\overline{\in}\,A_n)$, тогда

$$V_{n+1}=V_n\cup\{b\},\ A_{n+1}=A_n\cup\{x|x\prec b\vee b\prec x\}.$$

Переходим к блоку 1.

3. $z < a$.

a). $\varphi_a(t_a^n) \in A_n \,\&\, \exists x\,(x \dashv \varphi_a(t_a^n) \,\&\, x \bar{\in} A_n)$.

Поступаем так же, как и при 2a).

b). $\varphi_a(t_a^n) \in A_n \,\&\, \forall x\,(x \dashv \varphi_a(t_a^n) \,\&\, x \bar{\in} A_n)$.

Поступаем так же, как и при 2b).

c). $\varphi_a(t_a^n) \bar{\in} A_n \,\&\, \varphi_a(t_a^n) \bar{\in} V_n$.

Тогда

$$V_{n+1} = V_n \cup \{t_a^n\},\ A_{n+1} = A_n \cup \{x \mid x \dashv t_a^n \vee t_a^n \dashv x\}.$$

Возможны 2 подслучая:

c_1). $\exists p\,(\langle a, p\rangle \in B_n)$. Пусть $I_a = \{p \mid \langle a, p\rangle \in B_n\}$, тогда

$$F_{n+1} = (F_n \cup \{a\}) - I_a,\ B_{n+1} = (B_n \cup \{\langle z, a\rangle\}) - \{\langle a, p\rangle \mid p \in I_a\}.$$

$$C_{n+1} = C_n - \{\langle p, x\rangle \mid p \in I_a \,\&\, \exists y\,(\langle p, y\rangle \in V_n \,\&\, D_y \cap D_x \neq \varnothing)\}.$$

Переходим к блоку 2.

c_2). $\forall p\,(\langle a, p\rangle \bar{\in} B_n)$, тогда $F_{n+1} = F_n \cup \{a\}$, $B_{n+1} = B_n \cup \{\langle z, a\rangle\}$, $C_{n+1} = C_n$. Переходим к блоку 2.

d). $\varphi_a(t_a^n) \bar{\in} A_n \,\&\, \varphi_a(t_a^n) \in V_n$.

Поступаем так же, как и при 2d).

Блок 1. 2 случая:

a). $\exists p\,(\langle a, p\rangle \in B_n)$. Пусть $I_a = \{p \mid \langle a, p\rangle \in B_n\}$, тогда

$$F_{n+1} = (F_n \cup \{a\}) - I_a,\ B_{n+1} = B_n - \{\langle a, p\rangle \mid p \in I_a\},$$

$$C_{n+1} = C_n - \{\langle p, x\rangle \mid d \in I_a \,\&\, \exists y\,(\langle p, y\rangle \in V_n \,\&\, D_y \cap D_x \neq \varnothing)\}.$$

Переходим к блоку 2.

b). $\forall p\,(\langle a, p\rangle \bar{\in} B_n)$, тогда $F_{n+1} = F_n \cup \{ B_{n+1} = B_n,\ C_{n+1} = C_n$.

Переходим к блоку 2.

Блок 2.

$$t_i^{n+1} = \mu \langle i, d_j\rangle\,(\langle i, d_j\rangle \in C_{n+1}).$$ Переходим к шагу $n+1$.

Из конструкции видно, что

1. $\forall i\,(\lim_n t_i^n < \infty)$.

2. Пусть $t_i = \lim_n t_i^n$. Если! $\varphi_i(t_i)$, то в этой точке опровергается и m-сводимость V_ψ к S_ψ и m-сводимость S_ψ к V_ψ с помощью функции φ_i. В противном случае φ_i не является всюду определенной.

Пусть $\{C_i\}$ — мера сложности вычисления частично рекурсивных функций [3], удовлетворяющая также аксиоме параллельной вычислимости [4]. Через S_A мы будем обозначать полухарактеристическую функцию множества A.

Определение 2 (см. [5]). Рекурсивно перечислимое множество A называется ускоряемым, если для любого j такого, что $\varphi_j = S_A$ и любой общерекурсивной функции g существует i, удовлетворяющее следующим условиям:

1. $\varphi_i = S_A$,
2. $\forall x\, (c_i(x) \leqslant c_j(x))$,
3. $\exists_x^\infty (x \in A \,\&\, g(x, c_i(x)) < c_j(x))$.

Определение 3 (см. [5]). Рекурсивно перечислимое множество A называется эффективно ускоряемым, если существует общерекурсивная функция τ такая, что для любых j и l, если $\varphi_j = S_A$ и φ_l — общерекурсивная функция, то

1. $\varphi_{\tau(j,l)} = S_A$,
2. $\forall x\, (c_{\tau(j,l)}(x) \leqslant c_j(x))$,
3. $\exists_x^\infty (x \in A \,\&\, \varphi_l(x, c_{\tau(j,l)}(x)) < c_j(x))$.

Определение 4 (см. [5], [6]). Рекурсивно перечислимое множество A называется субкреативным, если существует общерекурсивная функция δ такая, что

$$\forall i\, (W_i \cap A = \varnothing \supset A \subset W_{\delta(i)} \subseteq \overline{W}_i).$$

В дальнейшем будут использованы следующие теоремы.

Предложение 1 (см. [5], [6]). Рекурсивно перечислимое множество A эффективно ускоряемо тогда и только тогда, когда A субкреативно.

Предложение 2 (см. [5]). Рекурсивно перечислимое множество A неускоряемо тогда и только тогда, когда существует общерекурсивная функция σ со следующими свойствами:

1. $\forall i\, (W_i \cap \overline{A} = W_{\sigma(i)} \cap \overline{A})$,
2. $\forall i\, (W_i \subset A \supset W_{\sigma(i)}$ конечно).

Предложение 3 (см. [7]). Рекурсивно перечислимая T-степень **a** содержит ускоряемое множество тогда и только тогда, когда $\mathbf{o}' < \mathbf{a}'$.

Предложение 4 (см. [8]). Для любого рекурсивно перечислимого множества A существуют неускоряемые множества A_0 и A_1 такие, что $A_0 \cup A_1 = A$ и $A_0 \cap A_1 = \varnothing$.

Отметим, что если $A \leqslant_1 B$ и B неускоряемо, то и A неускоряемо.

Теорема 5. *Если для некоторого оператора перечисления Ψ V_Ψ эффективно ускоряемо, то и любое множество, определяющее Ψ, эффективно ускоряемо.*

Доказательство. Пусть A — произвольное множество, определяющее Ψ. Так как V_Ψ эффективно ускоряемо, то, согласно предложению 1, существует общерекурсивная функция δ такая, что

$$\forall_i (W_i \cap V_\Psi = \varnothing \supset V_\Psi \subset W_{\delta(i)} \subseteq \overline{W_i}).$$

Рассмотрим следующую общерекурсивную функцию f:

$$\forall_i (W_{f(i)} = (A - V_\Psi) \cup W_i).$$

Пусть $W_i \cap A = \varnothing$, следовательно, $V_\Psi \cap W_{f(i)} = \varnothing$. Тогда $V_\Psi \subset W_{\delta(f(i))} \subseteq \overline{(A - V_\Psi) \cup W_i}$. Пусть $W_{\delta'(i)} = A \cup W_{\delta(f(i))}$, тогда $A \subset W_{\delta'(i)} \subseteq \overline{W_i}$, т. е. A субкреативно и, следовательно, эффективно ускоряемо.

Следствие 1. Существует оператор перечисления Ψ, все определяющие множества которого эффективно ускоряемы.

Доказательство. В качестве V_Ψ возьмем множество $\{< x, h(x) > | x \in K\}$, где h — общерекурсивная функция из теоремы 3. Заметим, что в этом случае все множества, определяющие Ψ, будут креативными.

Следствие 2. Существует оператор перечисления, у которого все определяющие множества ускоряемы, но среди них есть и не эффективно ускоряемые.

Доказательство. Очевидно.

Из доказательства пункта c) теоремы 1 видно, что среди множеств, определяющих произвольный оператор перечисления, есть креативные и, следовательно, эффективно ускоряемые множества (предложение 1).

В дальнейшем мы будем рассматривать только те операторы, стержни которых рекурсивно перечислимы.

Теорема 6. *Если среди множеств, определяющих оператор перечисления Ψ, есть неускоряемое множество, то и V_Ψ тоже неускоряемо.*

Доказательство. Пусть A — неускоряемое множество, определяющее Ψ. Тогда существует общерекурсивная функция σ, удовлетворяющая условиям предложения 2. Построим общерекурсивную функцию σ' следующим образом:

$$W_{\sigma'(i)} = W_{\sigma(i)} \cup \{< x, u > | < x, u > \in W_i \cap A \ \& < x, u > \notin V_\Psi\}.$$

Легко убедиться, что σ удовлетворяет условиям предложения 2 и, следовательно, V_Ψ неускоряемо.

Следствие. Существует оператор перечисления Ψ, у которого все определяющие множества ускоряемы.

Доказательство. Пусть A — произвольное ускоряемое множество. В качестве V_Ψ возьмем множество $\{< x, h(x) > | x \in A\}$, где h — общерекурсивная функция из теоремы 3.

Из предложения 3 и пунктов a) и b) теоремы 1 следует, что существуют операторы перечисления, стержни и насыщения которых нерекурсивны и неускоряемы. Следующая теорема дает пример оператора перечисления, стержень которого неускоряем, а насыщение ускоряемо.

Теорема 7. *Существует оператор перечисления Ψ такой, что V_Ψ неускоряемо, а S_Ψ ускоряемо.*

Доказательство. Пусть A — произвольное ускоряемое множество. Согласно предложению 4, существуют два неускоряемых множества A_0 и A_1 таких, что $A_0 \cup A_1 = A$ и $A_0 \cap A_1 = \varnothing$. Пусть $V_\Psi = (A_0 \times \{h(0)\}) \cup (A_1 \times \{h(1)\})$, где h — общерекурсивная функция из теоремы 3. Нетрудно убедиться в том, что V_Ψ неускоряемо. С другой стороны, $A \leqslant_1 S_\Psi$ с помощью функции $f(x) = \langle x, u \rangle$, где $D_u = \{0, 1\}$, и, следовательно, S_Ψ ускоряемо.

Вычислительный центр АН Армянской ССР
и Ереванского государственного университета
Поступила 5.X.1977

Մ. Յու. ԽՈՋԱՅԱՆՑ. Թվարկության օպերատորների որոշ բնութագրեր (*ամփոփում*)

Հոդվածում ներմուծվում են թվարկության օպերատորների երկու բնութագիր և հետազոտվում է նրանց կապը ինչպես միմիանց հետ, այնպես և այն բազմությունների հետ, որոնք որոշում են թվարկության օպերատորը տարբեր տիպերի հանգեցումների նկատմամբ։

Այնուհետև դիտարկվում են թվարկության օպերատորների որոշիչ բազմությունների թվարկության արագացման հնարավորությունները Մ. Բլյումի կողմից մտցված արագացվող բազմության հասկացողության հիման վրա։

M. Ju. KHODJAIANTS. *Some characteristics of enumeration operators* (summary)

Two characteristics of enumeration operators are defined a their interrelation s and relations to the sets, defining an enumeration operator are investigated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Х. Роджерс*. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М., Изд. „Мир“, 1972.
2. *C. E. M. Yates*. Three theorems on the degree of recursively enumerable sets Duke Math. J., 32, 1965, 465—463.
3. *М. Блюм*. Машинно-независимая теория сложности рекурсивных функций. Сб. Проблемы математической логики, М., Изд., „Мир“, 1970.
4. *L. H. Landweber, E. L. Robertson*. Recursive properties of abstract complexity classes, JACM, 19, 2, 1972. 295—308.
5. *M. Blum, I. Marques*. On complexity properties of recursively enumerable sets, J. Symb. Log., 38, 1973, 579—593.
6. *J. T. Gill, P. H. Morris*. On subcreative sets and S-reducibility, J. Symb. Log., 39, 1974, 669—677.
7. *R. I. Soare*. Degrees and structure of speedable sets, Not. Amer. Math. Soc. 21, 1974, A—380. Abstract 74 T—E 40.
8. *I. Marques*. On degrees of unsolvability and complexity properties, J. Symb., Log., 40, 1975, 529—539.