ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XIV, № 2, 1979 Математика

Ш. Е. БОЗОЯН, Б. Е. ТОРОСЯН

ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ АКТИВНОСТИ СОВОКУПНОСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

Работа посвящена исследованию функций алгебры логики с точки зрения степени зависимости функции от своих аргументов. Подобные исследования полезны не только с теоретической точки зрения, но и имеют весьма ценное практическое значение. Результаты этого направления могут применяться для анализа и синтеза схем из функциональных элементов, синтеза надежных схем из ненадежных элементов, построения проверяющих и диагностирующих тестов и т. д.

Работа состоит из четырех пунктов.

В п. 1 вводится основное для работы понятие активности совокупности переменных относительно функции и приводятся некоторые основные свойства этого понятия. Вводится понятие допустимого вектора.

В п. 2. приводятся некоторые условия допустимости вектора.

В п. 3. вводятся два отношения эквивалентностей R_1 и R_2 и перечисляются функции, зависящие от данного числа n переменных, не эквивалентные относительно этих отношений.

В п. 4 некоторые хорошо известные классы функций характеризуются с помощью понятия „активность“ и приводятся некоторые необходимые и достаточные условия принадлежности функций к этим классам на языке этого понятия. Выполнены исследования в области пороговых функций. Эти исследования в определенной степени облегчают выяснение вопроса: является ли данная функция пороговой?

В работе сделана также попытка связать понятие „активность“ с ранее известными понятиями, некоторые из последних переформулированы на этом языке.

В работе использованы важные понятия и утверждения из теории функций алгебры логики, которые подробно изучены в работах [1, 2, 3].

В заключение авторы приносят искреннюю благодарность А. В. Петросяну за постоянное внимание и ценные советы.

1°. Упорядоченную совокупность различных переменных $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ обозначим через $\tilde{x}_n$, булену функцию $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ — через $f(\tilde{x}_n)$, а множество всех булевых функций, зависящих от переменных $x_1, x_2, \cdots, x_n$ — через $\Phi(n)$ $(n \in N)$.

Пусть $E = \{0,1\}$ и $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in E^n$. Определим $\tilde{x}_n^{\tilde{\alpha}}$ как упорядоченную совокупность $\{x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \cdots, x_n^{\alpha_n}\}$, где

$$x^{\alpha} = \begin{cases} x, \text{ если } \alpha = 1 \\ \bar{x}, \text{ если } \alpha = 0. \end{cases}$$

Нормой булевой функции $f(\tilde{x}_n)$ назовем число

$$\|f(\tilde{x}_n)\| = \frac{1}{2^n} \sum_{\tilde{\alpha} \in E^n} f(\tilde{\alpha}).$$

Легко проверяются следующие свойства понятия нормы.

1н. Для любых двух функций $\varphi(\tilde{x}_n)$ и $\psi(\tilde{x}_n)$

а) $\|\varphi(\tilde{x}_n) \vee \psi(\tilde{x}_n)\| = \|\varphi(\tilde{x}_n)\| + \|\psi(\tilde{x}_n)\| - \|\varphi(\tilde{x}_n) \cdot \psi(\tilde{x}_n)\|$,

б) $\|\varphi(\tilde{x}_n) \oplus \psi(\tilde{x}_n)\| = \|\varphi(\tilde{x}_n)\| + \|\psi(\tilde{x}_n)\| - 2\|\varphi(\tilde{x}_n) \cdot \psi(\tilde{x}_n)\|$.

2н. Если функции $\varphi(\tilde{x}_n)$ и $\psi(\tilde{x}_n)$ не имеют общих существенных переменных, то

$$\|\varphi(\tilde{x}_n) \cdot \psi(\tilde{x}_n)\| = \|\varphi(\tilde{x}_n)\| \cdot \|\psi(\tilde{x}_n)\|.$$

3н. Для любой функции $\varphi(\tilde{x}_n)$ и для любого набора $\tilde{\alpha} \in E^n$

а) $\|\overline{\varphi}(\tilde{x}_n)\| = 1 - \|\varphi(\tilde{x}_n)\|$,

б) $\|\varphi(\tilde{x}_n^{\tilde{\alpha}})\| = \|\varphi(\tilde{x}_n)\|$.

Каждой совокупности $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}\} \subseteq \tilde{x}_n$ соответствует набор $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in E^n$ такой, что $\alpha_{i_1} = \alpha_{i_2} = \cdots = \alpha_{i_k} = 0$, а остальные его компоненты — единицы. Так как указанное соответствие взаимно-однозначно, то совокупность $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}\}$ и соответствующий ей набор $\tilde{\alpha}$ различать мы не будем.

Определение. Производной функцией булевой функции $f(\tilde{x}_n)$ по совокупности переменных $\tilde{\alpha} \overset{\text{df}}{=} \{x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}\} \subseteq \tilde{x}_n$ называется функция $f(\tilde{x}_n) \oplus f(\tilde{x}_n^{\tilde{\alpha}})$ и обозначается через

$$\frac{\partial f(\tilde{x}_n)}{\partial (x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k})} \left(\text{или } \frac{\partial f(\tilde{x}_n)}{\partial \tilde{\alpha}} \right).$$

Введем теперь понятие активности совокупности переменных относительно функции, являющейся обобщением понятий существенной и фиктивной переменных.

Определение. Активностью совокупности переменных $\tilde{\alpha} \overset{df}{=} \{x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}\} \subseteq \tilde{x}_n$ относительно функции $f(\tilde{x}_n)$ называется число $\left\| \dfrac{\partial f(\tilde{x}_n)}{\partial \tilde{\alpha}} \right\|$, которое обозначается через

$$\omega_{i_1, i_2, \cdots, i_k}^{f(\tilde{x}_n)} \left(\text{или} \quad \omega_{\tilde{\alpha}}^{f(\tilde{x}_n)} \right).$$

Приведем некоторые свойства этого понятия [4].

1а. Для любого $\tilde{\alpha} \in E^n$, $0 \leqslant \omega_{\tilde{\alpha}}^{f(\tilde{x}_n)} \leqslant 1$.

2. Для любого номера i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $\omega_i^{f(\tilde{x}_n)} = 0$ тогда и только тогда, когда функция $f(\tilde{x}_n)$ фиктивно зависит от переменной x_i.

3а. Для любых $\sigma \in E$; $\tilde{\alpha}, \tilde{\sigma} \in E^n$,

$$\omega_{\tilde{\alpha}}^{f(\tilde{x}_n)} = \omega_{\tilde{\alpha}}^{f^{\sigma}(\tilde{x}_n^{\tilde{\sigma}})}.$$

4а. Для любого номера i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $\omega_i^{f(\tilde{x}_n)} = 1$ тогда и только тогда, когда функция $f(\tilde{x}_n)$ представляется в виде

$$f(\tilde{x}_n) = x_i \oplus f(x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \cdots, x_n).$$

5а. Если при некотором $\tilde{\alpha}$, $\omega_{\tilde{\alpha}}^{f(\tilde{x}_n)} = 1$, то $\|f(\tilde{x}_n)\| = 1/2$. Во всех перечисленных свойствах $f(\tilde{x}_n)$ — произвольная функция от переменных $\tilde{x}_n$.

Доказательства этих свойств приводятся в работе [4], поэтому мы здесь приведем только доказательство свойства 5а, детали которого понадобятся нам в дальнейшем.

Заметим для этого сначала, что так как для любых двух наборов $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in E^n$, $(\tilde{\beta}^{\tilde{\alpha}})^{\tilde{\alpha}} = \tilde{\beta}$, то по данному набору $\tilde{\alpha}$ множество E^n разбивается на 2^{n-1} неупорядоченных пар наборов $(\tilde{\beta}, \tilde{\beta}^{\tilde{\alpha}})$.

Пусть теперь для функции $f(\tilde{x}_n)$ при некотором $\tilde{\alpha}$ имеем $\omega_{\tilde{\alpha}}^{f(\tilde{x}_n)} = 1$. Из последнего следует, что для любого набора $\tilde{\beta}$, $f(\tilde{\beta}) \oplus$

$\oplus f(\tilde{\beta}^{*}) = 1$, или, что значение функции $f(\tilde{x}_n)$ равно единице ровно на одном наборе каждой пары $(\tilde{\beta}, \tilde{\beta}^{*})$. Свойство 5а доказано.

Отметим, что для всякой функции $f(\tilde{x}_n)$, $\omega_{\tilde{1}}^{f(\tilde{x}_n)}=0$, где $\tilde{1} = (1, 1, \cdots, 1) \in E^n$.

Таким образом, каждой функции $f(\tilde{x}_n)$ можно сопоставить вектор длины $2^n - 1$ $\Omega^{f(\tilde{x}_n)}$, который определяется следующим образом:

$$\Omega^{f(\tilde{x}_n)} = (\omega_1^{f(\tilde{x}_n)}, \omega_2^{f(\tilde{x}_n)}, \cdots, \omega_n^{f(\tilde{x}_n)}, \omega_{1,2}^{f(\tilde{x}_n)}, \omega_{1,3}^{f(\tilde{x}_n)}, \cdots, \omega_{1,n}^{f(\tilde{x}_n)},$$

$$\omega_{2,3}^{f(\tilde{x}_n)}, \cdots, \omega_{2,n}^{f(\tilde{x}_n)}, \cdots, \omega_{n-1,n}^{f(\tilde{x}_n)}, \cdots, \omega_{1,2,\cdots,n}^{f(\tilde{x}_n)}),$$

и который называется вектором активностей функции $f(\tilde{x}_n)$. Из свойства 3а следует, что указанное соответствие не взаимно-однозначно.

Компонентами этого вектора для всякой функции $f(\tilde{x}_n)$ являются числа типа $q/2^{n-1}$ при некотором q, $0 \leqslant q \leqslant 2^{n-1}$. С другой стороны, из доказательства свойства 5а следует, что для всякого числа q, $0 \leqslant q \leqslant 2^{n-1}$ и для всякого набора $\tilde{\alpha} \in E^n$ можно построить функцию $f(\tilde{x}_n)$ такую, что $\omega_{\tilde{\alpha}}^{f(\tilde{x}_n)} = q/2^{n-1}$.

Но нетрудно привести пример вектора, компоненты которого суть числа указанного типа, но который не является вектором активностей ни для одной функции. Таким вектором является, например, вектор (0, 1/2, 1), в чем можно убедиться непосредственной проверкой.

Вектор длины $2^n - 1$, который является вектором активностей для некоторой функции $f(\tilde{x}_n)$, назовем допустимым.

Естественно возникает следующий вопрос — каким дополнительным условиям должен удовлетворять такой вектор, чтобы он был допустим?

2°. Как уже отмечалось, для всякой функции $f(\tilde{x}_n)$ и для всякого набора $\tilde{\alpha} \in E^n$, $\omega_{\tilde{\alpha}}^{f(\tilde{x}_n)} = q_{\tilde{\alpha}}/2^{n-1}$ $(0 \leqslant q_{\tilde{\alpha}} \leqslant 2^{n-1})$. Так как при тех же условиях число наборов $\tilde{\beta} \in N_{f(\tilde{x}_n)}$ таких, что $\tilde{\beta}^{\tilde{\alpha}} \in N_{f(\tilde{x}_n)}$, четно, то четности чисел $q_{\tilde{\alpha}}$ и $|N_{f(\tilde{x}_n)}|$ совпадают, и значит, для всех $\tilde{\alpha}$ числа $q_{\tilde{\alpha}}$ имеют одинаковую четность.

Но эти необходимые для допустимости произвольного вектора условия не являются достаточными. Вектор (1, 1, 1) удовлетворяет этим условиям, но не допустим.

Приведем другое необходимое условие допустимости. Пусть $f(\tilde{x}_n)$ — произвольная функция. Для каждой пары наборов $\tilde{\alpha} \in N_{f(\tilde{x}_n)}$ и $\tilde{\beta} \in N_{\bar{f}(\tilde{x}_n)}$ найдется ровно один набор $\tilde{\alpha} \in E^n$ такой, что $\tilde{\alpha}^{\tilde{\alpha}} = \tilde{\beta}$. Только и только на такой паре имеем $f(\tilde{\alpha}) \oplus f(\tilde{\alpha}^{\tilde{\alpha}}) = 1$.

Из сказанного следует, что

$$\sum_{\tilde{\alpha}} \omega_{\tilde{\alpha}}^{f(\tilde{x}_n)} = \frac{|N_{f(\tilde{x}_n)}| \cdot (2^n - |N_{f(\tilde{x}_n)}|)}{2^{n-1}}.$$

Отсюда получаем необходимое условие допустимости.

Лемма 1. *Для допустимости вектора* $\Omega = (\omega_{\tilde{\alpha}_i})$, $i = \overline{1, 2^n - 1}$ *необходимо, чтобы квадратное уравнение*

$$x^2 - 2^n \cdot x + 2^{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{2^n-1} \omega_{\tilde{\alpha}_i} = 0$$

имело целое решение x.

Здесь считается, что наборы из E^n, кроме $\tilde{1}$, упорядочены последовательностью $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \cdots, \tilde{\alpha}_{2^n-1}$ в соответствии с индексами компонент вектора активностей.

Решив это уравнение, получим следующее решение:

$$x = 2^{n-1} \pm \sqrt{2^{2(n-1)} - 2^{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{2^n-1} \omega_{\tilde{\alpha}_i}}.$$

Ясно, что уравнение будет иметь целое решение только тогда, когда для некоторого натурального числа k имеет место соотношение

$$\sum_{i=1}^{2^n-1} \omega_{\tilde{\alpha}_i} = \frac{2^{2(n-1)} - k^2}{2^{n-1}}.$$

Полученное условие только необходимое. Для вектора (0, 1/2, 1) соответствующее квадратное уравнение имеет целые решения $x=1$ и $x=3$, но он не допустим.

Полное же решение задачи допустимости, как мы вскоре увидим, эквивалентно задаче отыскания $(0-1)$ решения системы уравнений второго порядка с 2^n неизвестными.

Для доказательства этого факта заметим, что активность совокупности переменных $\tilde{\alpha} \overset{df}{\subseteq} \tilde{x}_n$ относительно функции $f(\tilde{x}_n)$ можно определить следующим равенством:

$$\omega_{\tilde\alpha}^{f(\tilde x_n)} = \frac{\sum\limits_{\tilde\beta\in E^n} f(\tilde\beta)\cdot(1-f(\tilde\beta^{\tilde\alpha}))}{2^{n-1}}$$

или

$$\sum_{\tilde\beta\in E^n} f(\tilde\beta)\cdot(1-f(\tilde\beta^{\tilde\alpha})) = \omega_{\tilde\alpha}^{f(\tilde x_n)}\cdot 2^{n-1}.$$

Введя теперь переменные $x_{\tilde\beta}$ $(\tilde\beta\in E^n)$, получим следующее необходимое и достаточное условие допустимости.

Теорема 1. *Для допустимости вектора* $\Omega=(\omega_{\tilde\alpha_i})$, $i=\overline{1,2^n-1}$, *необходимо и достаточно, чтобы система уравнений второго порядка*

$$\sum_{\tilde\beta\in E^n} x_{\tilde\beta}\cdot(1-x_{\tilde\beta^{\tilde\alpha}}) = \omega_{\tilde\alpha_i}\cdot 2^{n-1},\quad i=\overline{1,2^n-1} \tag{1}$$

имела $(0-1)$ *решение.*

Ясно, что множество всех $(0-1)$ решений системы (1) совпадает с множеством всех функций, зависящих от переменных $\tilde x_n$ и имеющих вектор активностей Ω.

Относительно $(0-1)$ решений система (1) эквивалентна системе

$$\sum_{\tilde\beta\in E^n} (x_{\tilde\beta} - x_{\tilde\beta^{\tilde\alpha_i}})^2 = \omega_{\tilde\alpha_i}\cdot 2^n,\quad i=\overline{1,2^n-1}\,.$$

Рассмотрим некоторую подсистему системы (1)

$$\sum_{\tilde\beta\in E^n} x_{\tilde\beta}\cdot(1-x_{\tilde\beta^{\tilde\alpha_{i_t}}}) = \omega_{\tilde\alpha_{i_t}}\cdot 2^{n-1};\quad 1\leqslant i_t\leqslant 2^n-1,\ t=\overline{1,m}.$$

Если $f(\tilde x_n)$ — некоторое $(0-1)$ решение последней системы, то очевидно имеем

$$\omega_{\tilde\alpha_{i_t}}^{f(\tilde x_n)} = \omega_{\tilde\alpha_{i_t}},\quad t=\overline{1,m}\,.$$

Так что задача отыскания множества всех функций, активности фиксированных совокупностей которых равны заранее заданным числам, эквивалентна задаче отыскания всех $(0-1)$ решений соответствующей подсистемы (1).

Особый интерес представляет начальный отрезок длины n вектора

$$\Omega^{f(\tilde x_n)},\quad \omega^{f(\tilde x_n)} = (\omega_1^{f(\tilde x_n)},\ \omega_2^{f(\tilde x_n)},\ \ldots,\ \omega_n^{f(\tilde x_n)}),$$

который называется вектором активностей аргументов функции $f(\tilde{x}_n)$.

Вектор $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)$ назовем допустимым, если существует функция $f(\tilde{x}_n)$ такая, что $\omega^{f(\tilde{x}_n)} = \omega$. Приведем без доказательств некоторые свойства допустимости.

1д. Если вектор $\omega^1 = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)$ допустим, то допустим также вектор $\omega = (\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \cdots, \omega_{i_n})$, где $\{i_1, i_2, \cdots, i_n\} = \{1, 2, \cdots, n\}$.

2д. Если векторы $\omega^1 = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_k)$ и $\omega^2 = (\omega_{k+1}, \omega_{k+2}, \cdots, \omega_{k+m})$ допустимы, то допустим также вектор $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_k, \omega_{k+1}, \omega_{k+2}, \cdots, \omega_{k+m})$. В частности, если вектор $\omega^1 = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)$ допустим, то допустим также вектор $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n, \alpha)$ $\alpha \in E$.

3д. Если векторы $\omega^1 = (\omega_1^1, \omega_2^1, \cdots, \omega_{n-1}^1)$ и $\omega^2 = (\omega_1^2, \omega_2^2, \cdots, \omega_{n-1}^2)$ допустимы, то для всяких двух функций $\varphi(\tilde{x}_{n-1})$ и $\psi(\tilde{x}_{n-1})$ таких, что $\omega^{\varphi(\tilde{x}_{n-1})} = \omega^1$, $\omega^{\psi(\tilde{x}_{n-1})} = \omega^2$, допустим также вектор

$$\omega = \left(\frac{\omega_1^1 + \omega_1^2}{2}, \frac{\omega_2^1 + \omega_2^2}{2}, \cdots, \frac{\omega_{n-1}^1 + \omega_{n-1}^2}{2}, \|\varphi(\tilde{x}_{n-1}) \ominus \psi(\tilde{x}_{n-1})\|\right).$$

В частности, для всяких функций $f(\tilde{x}_{n-1})$ и набора $\tilde{\alpha} \in E^{n-1}$ вектор $\omega = (\omega_1^{f(\tilde{x}_{n-1})}, \omega_2^{f(\tilde{x}_{n-1})}, \cdots, \omega_{n-1}^{f(\tilde{x}_{n-1})}, \omega_{\tilde{\alpha}}^{f(\tilde{x}_{n-1})})$ допустим.

4д. Если вектор $\omega^1 = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{i-1}, \omega_i, \omega_{i+1}, \cdots, \omega_n)$ допустим, то допустим также вектор $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{i-1}, 1 - \omega_i, \omega_{i+1}, \cdots, \omega_n)$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

5д. Для любого числа q, $0 \leqslant q \leqslant 2^{n-1}$, вектор

$$\omega = \underbrace{(q/2^{n-1}, q/2^{n-1}, \cdots, q/2^{n-1})}_{n}$$

допустим.

На основе этих свойств докажем следующую лемму.

Лемма 2. *Для всяких целых чисел* $m, i_1, i_2, \cdots, i_m$: $1 \leqslant m \leqslant (n+1)/2$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leqslant n$, *и для всяких чисел* q_{i_t}, $t = \overline{1, m}$, *каждое из которых кратно* 2^{m-1} *и удовлетворяет одному из условий* $0 \leqslant q_{i_t} \leqslant 2^{n-m}$, $2^{n-1} - 2^{n-m} \leqslant q_{i_t} \leqslant 2^{n-1}$, *существует допустимый вектор* $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)$ *такой, что* $\omega_{i_t} = q_{i_t}/2^{n-1}$.

Доказательство. При $m = 1$ утверждение леммы очевидно. Пусть поэтому $m \geqslant 2$. В силу свойств 1д и 4д достаточно доказать лемму при $i_t = t$ и $0 \leqslant q_t = 2^{m-1} \cdot q_t^1 \leqslant 2^{n-m}$, $t = \overline{1, m}$. Так как для всех t, $0 \leqslant q_t^1 \leqslant 2^{n-2m+1}$, то существуют допустимые векторы

$$\omega_t^1 = (q_t^1/2^{n-2m+1}, \omega_1^t, \omega_2^t, \cdots, \omega_{n-2m+1}^t), \quad t = \overline{1, m}.$$

Применив к этим векторам свойства 2д и 1д, получим, что векторы

$$\omega_1 = (q_1/2^{n-m}, \underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{m-1}, \omega_1^1, \cdots, \omega_{n-2m+1}^1),$$

$$\omega_2 = (0, q_2/2^{n-m}, \underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{m-2}, \omega_1^2, \cdots, \omega_{n-2m+1}^2),$$

$$\omega_t = (\underbrace{0, \cdots, 0}_{t-1}, q_t/2^{n-m}, \underbrace{0, \cdots, 0}_{m-t}, \omega_1^t, \cdots, \omega_{n-2m+1}^t), \ t \geq 3,$$

допустимы.

Применив свойство 3д к последним векторам последовательно $m-1$ раз, получим допустимый вектор $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)$, который удовлетворяет условиям леммы. Лемма доказана.

Отметим, что свойство 3д дает метод получения всех допустимых векторов длины n из всех допустимых векторов длины $n-1$, если последние известны. Свойство 5д дает возможность непосредственно построить некоторые допустимые векторы произвольной длины. Свойство 2д дает метод построения допустимых векторов данной длины, исходя из двух (или более) допустимых векторов меньшей длины. Наконец, свойства 1д и 4д дают возможность получить новые допустимые векторы данной длины, исходя из уже известных допустимых векторов той же длины.

В общем же случае задача—допустим ли данный вектор $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)$, как уже было отмечено, эквивалентна задаче отыскания (0—1) решения соответствующей подсистемы системы (1).

3°. Определение. Двойственной функцией функции $f(\tilde{x}_n)$ по направлению $\tilde{\alpha} \in E^n$ назовем функцию $\bar{f}(\tilde{x}_n^{\tilde{\alpha}})$ и обозначим ее через $f^*_{\tilde{\alpha}}(\tilde{x}_n)$.

Двойственная к $f(\tilde{x}_n)$ функция по направлению $\tilde{0} = (0, 0, \cdots, 0) \in E^n$ называется просто двойственной функцией функции $f(\tilde{x}_n)$ и обозначается через $f^*(\tilde{x}_n)$. Из определения следует, что двойственной к $f(\tilde{x}_n)$ функция по направлению $\tilde{1}$ есть $\bar{f}(\tilde{x}_n)$.

Определение. Функцию $f(\tilde{x}_n)$ назовем самодвойственной по направлению $\tilde{\alpha} \in E^n$, если $f^*_{\tilde{\alpha}}(\tilde{x}_n) = f(\tilde{x}_n)$.

Функция $f(\tilde{x}_n)$ называется просто самодвойственной, если $f^*(\tilde{x}_n) = f(\tilde{x}_n)$. Ясно, что самодвойственных функций по направлению $\tilde{1}$ нет.

Лемма 3. *Функция $f(\tilde{x}_n)$ самодвойственна по направлению $\tilde{\alpha} \in E^n$ тогда и только тогда, когда $\omega_{\tilde{\alpha}}^{f(\tilde{x}_n)} = 1$.*

Доказательство леммы следует из доказательства свойства 5а.

Определение. Функцию $f(\tilde{x}_n)$ назовем устойчивой по направлению $\tilde{\alpha} \in E^n$, если $f(\tilde{x}_n^{\tilde{\alpha}}) = f(\tilde{x}_n)$, а множество

$$T_{f(\tilde{x}_n)} = \{\tilde{\alpha} \in E^n / f(\tilde{x}_n^{\tilde{\alpha}}) = f(\tilde{x}_n)\} -$$

— множеством устойчивости функции $f(\tilde{x}_n)$.

Ясно, что устойчивая по направлению $\tilde{\alpha} \overset{df}{=} \{x_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, функция $f(\tilde{x}_n)$ фиктивно зависит от переменной x_i.

Очевидно, что функция $f(\tilde{x}_n)$ устойчива по направлению $\tilde{\alpha} \in E^n$ тогда и только тогда, когда $\omega_{\tilde{\alpha}}^{f(\tilde{x}_n)} = 0$.

Легко видеть, что для всякой функции $f(\tilde{x}_n)$ из того, что $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in T_{f(\tilde{x}_n)}$, следует, что $\tilde{\alpha} \oplus \tilde{\beta} \in T_{f(\tilde{x}_n)}$. Следовательно, для всякой функции $f(\tilde{x}_n)$ множество $T^*_{f(\tilde{x}_n)} = \{\tilde{\alpha} / \tilde{\alpha} \in T_{f(\tilde{x}_n)}\}$ является линейным подпространством пространства E^n и имеет некоторый базис $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \cdots, \tilde{\gamma}_m$. Имеет место и обратное положение—для всяких линейно независимых наборов $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \cdots, \tilde{\gamma}_m \in E^n$ существует функция $f(\tilde{x}_n)$, такая, что указанная совокупность наборов является базисом подпространства $T^*_{f(\tilde{x}_n)}$.

Из сказанного следует, что если для фукции $f(\tilde{x}_n)$ выполняются соотношения $\omega_{i_1}^{f(\tilde{x}_n)} = \omega_{i_2}^{f(\tilde{x}_n)} = \cdots = \omega_{i_k}^{f(\tilde{x}_n)} = 0$ $(1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n)$, то для этой функции выполняется также соотношение $\omega_{i_1, i_2, \cdots, i_k}^{f(\tilde{x}_n)} = 0$. Обратное не всегда верно. Для функции $f(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$, $\omega_{1, 2}^{f(x_1, x_2)} = 0$, но $\omega_1^{f(x_1, x_2)} = \omega_2^{f(x_1, x_2)} = 1$. Легко описать класс всех функций, для которых имеет место и обратное—это множество всех функций $f(\tilde{x}_n)$ таких, для которых совокупность наборов $\{\tilde{\gamma} / \omega_{\tilde{\gamma}}^{f(\tilde{x}_n)} = 0, |\tilde{\gamma}| = 1\}$ является базисом в $T^*_{f(\tilde{x}_n)}$.

Докажем следующее утверждение.

Лемма 4. *Каждая самодвойственная по некоторому направлению функция $f(\tilde{x}_n)$ самодвойственна по $|T_{f(\tilde{x}_n)}|$ направлениям.*

Доказательство. Пусть для функции $f(\tilde{x}_n)$, $\bar{f}(\tilde{x}_n^{\tilde{\alpha}}) = f(\tilde{x}_n)$ при некотором $\tilde{\alpha} \in E^n$, а $\tilde{\beta} \in T_{f(\tilde{x}_n)}$ — произвольный набор. Тогда, как нетрудно видеть, $\bar{f}(\tilde{x}_n^{\tilde{\alpha} \oplus \tilde{\beta}}) = f(\tilde{x}_n)$, и значит, функция $f(\tilde{x}_n)$ самодвойственна самое меньшее по $|T_{f(\tilde{x}_n)}|$ направлениям.

С другой стороны, пусть наряду с $\bar{f}(\tilde{x}_n^{\tilde{\alpha}}) = f(\tilde{x}_n)$ имеет место также соотношение $\bar{f}(\tilde{x}_n^{\tilde{\gamma}}) = f(\tilde{x}_n)$. Тогда $f(\tilde{x}_n^{\tilde{\alpha}}) = f(\tilde{x}_n^{\tilde{\gamma}})$ и, следовательно, существует набор $\tilde{\beta} \in T_{f(\tilde{x}_n)}$ такой, что $\tilde{\gamma} = \tilde{\alpha} \oplus \tilde{\beta}$. Значит функция $f(\tilde{x}_n)$ самодвойственна самое большее по $|T_{f(\tilde{x}_n)}|$ направлениям. Лемма доказана.

Над множеством $\Phi(n)$ определим отношения эквивалентностей R_1 и R_2 следующим образом. Для любых двух функций $\varphi(\tilde{x}_n)$ и $\psi(\tilde{x}_n)$

1. $\varphi(\tilde{x}_n) R_1 \psi(\tilde{x}_n)$ тогда и только тогда, когда для некоторого набора $\tilde{\gamma} \in E^n$, $\varphi(\tilde{x}_n) = \psi(\tilde{x}_n^{\tilde{\gamma}})$.

2. $\varphi(\tilde{x}_n) R_2 \psi(\tilde{x}_n)$ тогда и только тогда, когда для некоторого набора $\tilde{\gamma} \in E^n$ и для некоторого значения $\sigma \in E$, $\varphi(\tilde{x}_n) = \psi^{\sigma}(\tilde{x}_n^{\tilde{\gamma}})$.

Множества классов эквивалентностей по отношениям R_1 и R_2 обозначим через $\Phi_{R_1}(n)$ и $\Phi_{R_2}(n)$, а классы эквивалентностей, содержащие функцию $f(\tilde{x}_n)$, через $[f(\tilde{x}_n)]_{R_1}$ и $[f(\tilde{x}_n)]_{R_2}$ соответственно.

Ясно, что для всякой функции $\varphi(\tilde{x}_n)$, $[\varphi(\tilde{x}_n)]_{R_1} \subseteq [\varphi(\tilde{x}_n)]_{R_2}$ и что $[\varphi(\tilde{x}_n)]_{R_1} = [\varphi(\tilde{x}_n)]_{R_2}$ тогда и только тогда, когда функция $\varphi(\tilde{x}_n)$ самодвойственна по некоторому направлению. Множество классов последнего типа обозначим через $\Phi_{R_1 R_2}(n)$. Множество

$$\{[\varphi(\tilde{x}_n)]_{R_1} / |N_{\varphi(\tilde{x}_n)}| = P\}$$

обозначим через $\Phi_{R_1}^{P}(n)$.

Легко убедиться в справедливости следующих утверждений.

1э. $\Phi_{R_1 R_2}(n) = \Phi_{R_1}(n) \cap \Phi_{R_2}(n)$.

2э. Для всякой функции $f(\tilde{x}_n)$, $|[f(\tilde{x}_n)]_{R_1}| = 2^n / |T_{f(\tilde{x}_n)}|$.

3э. Для всякой функции $f(\tilde{x}_n)$,

$$|[f(\tilde{x}_n)]_{R_1}| = \begin{cases} 2^n/|T_{f(\tilde{x}_n)}|, & \text{если функция } f(\tilde{x}_n) \text{ самодвойственна по некоторому направлению.} \\ 2^{n+1}/|T_{f(\tilde{x}_n)}|, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

По теоремам перечисления Пойа [5] легко определить величины $|\Phi_{R_1}(n)|$ и $|\Phi^p_{R_1}(n)|$.

Теорема 2.

1. $$|\Phi_{R_1}(n)| = \frac{2^{2^n} + (2^n - 1)\cdot 2^{2^{n-1}}}{2^n}.$$

2. $$|\Phi^p_{R_1}(n)| = \begin{cases} \dfrac{C^p_{2^n} + (2^n-1)\cdot C^{p/2}_{2^{n-1}}}{2^n}, & \text{если } p \text{ четно} \\ \dfrac{C^p_{2^n}}{2^n}, & \text{если } p \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Чтобы определить величину $|\Phi_{R_2}(n)|$ предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 5.

$$|\Phi_{R_1R_2}(n)| = \frac{(2^n - 1)\cdot 2^{2^{n-1}}}{2^n}.$$

Доказательство. Число всех самодвойственных по некоторому направлению функций из $\Phi(n)$, мощность множества устойчивости каждой из которых равна 2^m, $0 \leqslant m \leqslant n-1$, обозначим через y_m. Из утверждения 3э следует, что

$$|\Phi_{R_1R_2}(n)| = \frac{y_0}{2^n} + \frac{y_1}{2^{n-1}} + \cdots + \frac{y_{n-1}}{2} = \frac{y_0 + 2y_1 + \cdots + 2^{n-1}\cdot y_{n-1}}{2^n}.$$

В числителе последней дроби каждая функция, мощность множества устойчивости которой есть 2^m, суммируется 2^m раз. Но по лемме 4, каждая самодвойственная по некоторому направлению функция $f(\tilde{x}_n)$ самодвойственна по $|T_{f(\tilde{x}_n)}|$ направлениям. Значит, если мы вычислим число самодвойственных функций по каждому направлению, потом просуммируем их, то получим то же число, что и в числителе указанной дроби.

Число самодвойстенных функций по произвольному направлению $\tilde{1} \neq \tilde{\alpha} \in E^n$ равно $2^{2^{n-1}}$. Число таких направлений—2^n-1. Следовательно, эта сумма равна $(2^n-1)\cdot 2^{2^{n-1}}$. Лемма доказана.

Отметим, что этот метод можно применять и для вычисления величин $|\Phi_{R_1}(n)|$ и $|\Phi^{p}_{R_1}(n)|$ (теорема 2).

Следствие. Среди функций, существенно зависящих от четырех (или более) переменных, существует функция, имеющая норму 1/2 и несамодвойственная ни по одному направлению.

Доказательство следует из сравнения величин $|\Phi_{R_1R_2}(n)|$ и $|\Phi^{2^{n-1}}_{R_1}|$.

Из теоремы 2 и леммы 5 вытекает следующая

Теорема 3.

$$|\Phi_{R_2}(n)| = \frac{2^{2^n} + (2^n - 1)\cdot 2^{2^{n-1}+1}}{2^{n+1}}.$$

4°. Из определения линейной функции, определения активности аргумента и свойства 4а следует очевидная

Лемма 6. *Функция $f(\tilde{x}_n)$ линейна тогда и только тогда, когда для $i=\overline{1, n}$, $\omega_i^{f(\tilde{x}_n)} \in E$ и (или) имеет место представление*

$$f(\tilde{x}_n) = f(\tilde{0}) \oplus \omega_1^{f(\tilde{x}_n)}\cdot x_1 \oplus \omega_2^{f(\tilde{x}_n)}\cdot x_2 \oplus \cdots \oplus \omega_n^{f(\tilde{x}_n)}\cdot x_n.$$

Множество всех монотонных функций алгебры логики обозначим через M, а через $\mathbf{M}$ обозначим множество функций

$$\{f^{\sigma}(\tilde{x}_n^{\tilde{\sigma}})/f(\tilde{x}_n) \in M,\ \sigma \in E,\ \tilde{\sigma} \in E^n;\ n = 1, 2, \cdots\}.$$

Функции из $\mathbf{M}$ назовем обобщенно-монотонными функциями.

Для произвольной функции $f(\tilde{x}_n)$ через $f^i_{\sigma}(\tilde{x}_n)$ $(1 \leqslant i \leqslant n,\ \sigma \in E)$ обозначим функцию $f(x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, \sigma, x_{i+1}, \cdots, x_n)$. Отметим для дальнейшего, что для всякой функции $f(\tilde{x}_n)$ имеет место соотношение $\omega_i^{f(\tilde{x}_n)} = \|f^i_0(\tilde{x}_n) \oplus f^i_1(\tilde{x}_n)\|$, $i = \overline{1, n}$.

Имеет место следующая

Лемма 7. *Функция $f(\tilde{x}_n)$ обобщенно-монотонна тогда и только тогда, когда для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant n$ выполняется соотношение $f^i_0(\tilde{x}_n)\cdot f^i_1(\tilde{x}_n) = f^i_{\sigma_i}(\tilde{x}_n)$ при некотором значении $\sigma_i \in E$.*

Доказательство. Легко видеть, что если некоторая функция $\varphi(\tilde{x}_n)$ удовлетворяет условиям леммы, то для всяких $\sigma \in E$, $\tilde{\sigma} \in E^n$ этим условиям удовлетворяет также функция $\varphi^{\sigma}(\tilde{x}_n^{\tilde{\sigma}})$. Так что достаточно доказать лемму для монотонных функций и при $\sigma_i = 0$, $i=\overline{1, n}$.

Необходимость. Пусть $f(\tilde{x}_n) \in M$ и число i, $1 \leqslant i \leqslant n$, произвольно. В силу монотонности для любой пары соседних по i-й компоненте наборов $\tilde{\alpha} < \tilde{\beta}$ из условий $f(\tilde{\alpha}) = 1$ следует, что $f(\tilde{\beta}) = 1$ и, следовательно, $f_0(\tilde{x}_n) \cdot f_1(\tilde{x}_n) \cdot f_0(\tilde{x}_n)$.

Достаточность. Пусть функция $f(\tilde{x}_n)$ такая, что для $i = \overline{1, n}$, $f_0^i(\tilde{x}_n) \cdot f_1^i(\tilde{x}_n) = f_0^i(\tilde{x}_n)$. Тогда для любой пары соседних наборов $\tilde{\alpha} < \tilde{\beta}$ из условий $f(\tilde{\alpha}) = 1$ следует, что $f(\tilde{\beta}) = 1$, и значит, функция $f(\tilde{x}_n)$ монотонна. Лемма доказана.

Заметим, что условия леммы можно заменить условиями: для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $\|f_0^i(\tilde{x}_n) \cdot f_1^i(\tilde{x}_n)\| = \min\{\|f_0^i(\tilde{x}_n)\|, \|f_1^i(\tilde{x}_n)\|\}$.

С помощью этой леммы докажем следующее утверждение.

Теорема 4. *Функция $f(\tilde{x}_n)$ обобщенно-монотонна тогда и только тогда, когда для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, имеет место соотношение*

$$\omega_i^{f(\tilde{x}_n)} = |\|f_1^i(\tilde{x}_n)\| - \|f_0^i(\tilde{x}_n)\||. \tag{2}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $f(\tilde{x}_n) \in \mathbf{M}$ и число i, $1 \leqslant i \leqslant n$, произвольно. В силу замеченного выше соотношения и свойства 2а имеем

$$\omega_i^{f(\tilde{x}_n)} = \|f_0^i(\tilde{x}_n) \oplus f_1^i(\tilde{x}_n)\| = \|f_0^i(\tilde{x}_n)\| + \|f_1^i(\tilde{x}_n)\| - 2\|f_0^i(\tilde{x}_n) \cdot f_1^i(\tilde{x}_n)\|.$$

Так как $f(\tilde{x}_n) \in \mathbf{M}$, то по лемме 7 имеем $f_0^i(\tilde{x}_n) \cdot f_1^i(\tilde{x}_n) = f_{\sigma_i}^i(\tilde{x}_n)$ при некотором значении $\sigma_i \in E$. Ясно, что при любом из этих значений выполняется (2).

Достаточность. Пусть для функции $f(\tilde{x}_n)$ при $i = \overline{1, n}$ выполняются соотношоние (2). Докажем, что функция $f(\tilde{x}_n)$ удовлетворяет условиям леммы 7. Пусть это не так. Тогда найдется некоторый номер i, $1 \leqslant i \leqslant n$, такой, что

$$\|f_0^i(\tilde{x}_n) \cdot f_1^i(\tilde{x}_n)\| < \min\{\|f_0^i(\tilde{x}_n)\|, \|f_1^i(\tilde{x}_n)\|\}.$$

Но тогда будем иметь

$$\omega_i^{f(\tilde{x}_n)} = \|f_1^i(\tilde{x}_n)\| - \|f_0^i(\tilde{x}_n) \cdot f_1^i(\tilde{x}_n)\| + \|f_0^i(\tilde{x}_n)\| -$$

$$- \|f_0^i(\tilde{x}_n) \cdot f_1^i(\tilde{x}_n)\| > |\|f_1^i(\tilde{x}_n)\| - \|f_0^i(\tilde{x}_n)\||,$$

которое противоречит условиям теоремы.

Итак, функция $f(\tilde{x}_n)$ удовлетворяет условиям леммы 7, и, следовательно, $f(\tilde{x}_n) \in \mathbf{M}$. Теорема доказана.

Лемма 8. *Если* $f(\tilde{x}_n) \in \mathbf{M}$, *то* $\omega^{f(\tilde{x}_n)}_{i_1, i_2, \cdots, i_k} = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\omega^{f(\tilde{x}_n)}_{i_1} = \omega^{f(\tilde{x}_n)}_{i_2} = \cdots = \omega^{f(\tilde{x}_n)}_{i_k} = 0$ $(1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n)$.

Доказательство. Достаточность леммы, как уже было отмечено, имеет место для всякой функции.

Необходимость. Пусть $f(\tilde{x}_n) \in \mathbf{M}$, $\omega^{f(\tilde{x}_n)}_{i_1, i_2, \cdots, i_k} = 0$ $(1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n)$ и пусть, например, $\omega^{f(\tilde{x}_n)}_{i_1} \neq 0$. Из последнего, по теореме 4, следует, что $\|f_0^{i_1}(\tilde{x}_n)\| \neq \|f_1^{i_1}(\tilde{x}_n)\|$. Пусть

$$\tilde{\alpha} \overset{\mathrm{df}}{=} \{x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}\}, \quad \tilde{\beta} \overset{\mathrm{df}}{=} \{x_{i_2}, x_{i_3}, \cdots, x_{i_k}\} \text{ и } \varphi(\tilde{x}_n) = f(x_1, \cdots, x_{i_1-1}, \bar{x}_{i_1}, x_{i_1+1}, \cdots, x_n).$$

Ясно, что

$$\|\varphi_0^{i_1}(\tilde{x}_n)\| = \|f_1^{i_1}(\tilde{x}_n)\| \neq \|f_0^{i_1}(\tilde{x}_n)\| = \|\varphi_1^{i_1}(\tilde{x}_n)\| \text{ и что } \varphi(\tilde{x}_n^{\beta}) = f(\tilde{x}_n^{\alpha}).$$

С другой стороны, по свойству 3н 6) следует, что $\|f_1^{i_1}(\tilde{x}_n^{\alpha})\| = \|\varphi_0^{i_1}(\tilde{x}_n^{\beta})\| = \|\varphi_1^{i_1}(\tilde{x}_n)\|$. Следовательно, для функции $f(\tilde{x}_n^{\alpha})$ имеем

$$\|f_0^{i_1}(\tilde{x}_n^{\alpha})\| = \|f_1^{i_1}(\tilde{x}_n)\| \neq \|f_0^{i_1}(\tilde{x}_n)\| = \|f_1^{i_1}(\tilde{x}_n^{\alpha})\|,$$

и значит $f(\tilde{x}_n) \neq f(\tilde{x}_n^{\alpha})$. Но тогда будем иметь $\omega^{f(\tilde{x}_n)}_{\tilde{\alpha}} = \omega^{f(\tilde{x}_n)}_{i_1, i_2, \cdots, i_k} \neq 0$.

Полученное противоречие доказывает лемму.

Следствие. Если $f(\tilde{x}_n) \in \mathbf{M}$, то совокупность наборов $\{\tilde{\alpha} / \omega^{f(\tilde{x}_n)}_{\tilde{\alpha}} = 0, |\tilde{\alpha}| = 1\}$ образует базис подпространства $T^{*}_{f(\tilde{x}_n)}$.

Функция $f(\tilde{x}_n)$ называется пороговой, если существуют n-мерный вещественный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ и вещественное число w такие, что имеет место следующее:

$f(\tilde{x}_n) = 1$ тогда и только тогда, когда $\xi \cdot \tilde{x}_n \geqslant w$.

Вектор ξ называется вектором весов, ξ_i — весом i-го аргумента $(i = \overline{1, n})$, w — порогом, а вектор $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, w)$ — вектором структуры функции $f(\tilde{x}_n)$.

Множество всех пороговых функций алгебры логики обозначим через Π.

Приведем некоторые известные результаты исследований в области пороговых функций [3].

1п. $\Pi \subseteq \mathbf{M}$.

2п. Если $f(\tilde{x}_n) \in \Pi$, то $[f(\tilde{x}_n)]_{K_1} \subseteq \Pi$.

3п. $f(\tilde{x}_n) \in \Pi$ тогда и только тогда, когда уравнение

$$\sum_{i=0}^{n} \xi_i \cdot a_i^{f(\tilde{x}_n)} = \sum_{\tilde{y}} |\tilde{\xi} \cdot \tilde{y}| \tag{3}$$

имеет решение $\tilde{\xi} = (\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_n)$ и $\tilde{\xi} \cdot \tilde{y} \neq 0$ при любом $\tilde{y}$, где

$$a_0^{f(\tilde{x}_n)} = 2\,|N_{f(\tilde{x}_n)}| - 2^n, \quad \tilde{y} = (1, y_1, y_2, \cdots, y_n), \quad a_i^{f(\tilde{x}_n)} =$$

$$= 2\,|N_{f_1^i(\tilde{x}_n)}| - 2\,|N_{f_0^i(\tilde{x}_n)}|, \quad y_i \in \{-1, 1\}; \quad i = \overline{1, n}.$$

Если уравнение (3) имеет решение $\tilde{\xi} = (\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_n)$, то вектором структуры функции $f(\tilde{x}_n)$ является вектор

$$\left(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \frac{\xi_0 - \sum_{i=1}^{n} \xi_i}{2} \right).$$

Из свойства 1п следует, что каждая пороговая функция принадлежит множеству **M**, то есть удовлетворяет условиям теоремы 4.

Пусть $f(\tilde{x}_n) \in \Pi$ и $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, w)$—ее вектор структуры. Нетрудно убедиться в том, что для всяких i, j; $1 \leqslant i, j \leqslant n$, справедливы утверждения.

Если $\omega_i^{f(\tilde{x}_n)} = \|f_1^i(\tilde{x}_n)\| - \|f_0^i(\tilde{x}_n)\| \neq 0$, то $\xi_i > 0$.

Если $\omega_i^{f(\tilde{x}_n)} = \|f_0^i(\tilde{x}_n)\| - \|f_1^i(\tilde{x}_n)\| \neq 0$, то $\xi_i < 0$.

Если $\omega_i^{f(\tilde{x}_n)} = 0$, то возможно $\xi_i = 0$.

Если $|\xi_i| \geqslant |\xi_j|$, то $\omega_i^{f(\tilde{x}_n)} \geqslant \omega_j^{f(\tilde{x}_n)}$.

Явная же связь между весами и активностями аргументов пороговой функции состоит в следующем.

Пусть $f(\tilde{x}_n) \in$ **M**. Подстановкой $x_i \to \bar{x}_i$ в функцию $f(\tilde{x}_n)$ для i, $1 \leqslant i \leqslant n$, таких, для которых $\omega_i^{f(\tilde{x}_n)} = \|f_0^i(\tilde{x}_n)\| - \|f_1^i(\tilde{x}_n)\| \neq 0$, мы получим функцию $g(\tilde{x}_n) \in [f(\tilde{x}_n)]_{R_1}$, такую, что для $i = \overline{1, n}$, $a_i^{g(\tilde{x}_n)} \geqslant 0$. Ясно, что $g(\tilde{x}_n) \in M$.

По свойству 2п функция $f(\tilde{x}_n)$ порогова тогда и только тогда, когда функция $g(\tilde{x}_n)$ порогова. С другой стороны, по свойству 3а, $\omega^{g(\tilde{x}_n)} = \omega^{f(\tilde{x}_n)}$.

Составив уравнение (3) для функции $g(\tilde{x}_n)$, разделив обе части полученного уравнения на 2^n и учитывая вышесказанное, получим следующее утверждение.

Лемма 9. *Функция $f(\tilde{x}_n)\in \mathbf{M}$ пороговa тогда и только тогда, когда уравнение*

$$\sum_{i=0}^{n} \xi_i \cdot \omega_i^{f(\tilde{x}_n)} = \frac{1}{2^n}\sum_{\tilde{y}} |\tilde{\xi}\cdot\tilde{y}| \tag{4}$$

имеет решение $\tilde{\xi} = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$ *и* $\tilde{\xi}\cdot\tilde{y} \neq 0$ *для всех* $\tilde{y}$, *где*

$$\omega_0^{f(\tilde{x}_n)} = 2\,\|f(\tilde{x}_n)\| - 1.$$

Следствие. Если $f(\tilde{x}_n)\in \mathbf{П}$, $g(\tilde{x}_n)\in \mathbf{M}$, $\omega^{g(\tilde{x}_n)} = \omega^{f(\tilde{x}_n)}$ и $\|g(\tilde{x}_n)\| = \|f(\tilde{x}_n)\|$ (или $\|g(\tilde{x}_n)\| = 1 - \|f(\tilde{x}_n)\|$), то $g(\tilde{x}_n)\in [f(\tilde{x}_n)]_{K_1}$ (и значит $g(\tilde{x}_n)\in \mathbf{П}$).

Пусть $f(\tilde{x}_n)$—произвольная функция. Через $[\Omega^{f(\tilde{x}_n)}]$ обозначим множество $\{g(\tilde{x}_n) / \Omega^{g(\tilde{x}_n)} = \Omega^{f(\tilde{x}_n)}\}$. Ясно, что $[f(\tilde{x}_n)]_{K_1} \subseteq [\Omega^{f(\tilde{x}_n)}]$.

Определение. Функцию $f(\tilde{x}_n)$ назовем устойчивой по активностям аргументов, если $[f(\tilde{x}_n)]_{K_1} = [\Omega^{f(\tilde{x}_n)}]$.

Легко убедиться в том, что все функции алгебры логики, принимающие фиксированное значение $\sigma\in E$ не более, чем на четырех наборах, а также все линейные функции устойчивы по активностям аргументов.

Докажем еще одно важное утверждение, касающееся пороговых функций.

Теорема 5. *Каждая пороговая функция устойчива по активностям аргументов.*

Доказательство. Пусть $f(\tilde{x}_n)\in \mathbf{П}$ — произвольная функция. Очевидно, достаточно показать, что $[\Omega^{f(\tilde{x}_n)}] \subseteq [f(\tilde{x}_n)]_{K_1}$. Пусть $g(\tilde{x}_n)\in[\Omega^{f(\tilde{x}_n)}]$ произвольная функция. Так как $\Omega^{g(\tilde{x}_n)} = \Omega^{f(\tilde{x}_n)}$, то по лемме 1 или $\|g(\tilde{x}_n)\| = \|f(\tilde{x}_n)\|$ или же $\|g(\tilde{x}_n)\| = 1 - \|f(\tilde{x}_n)\|$. Ясно, что функции $g(\tilde{x}_n)$ и $\bar{g}(\tilde{x}_n)$ одновременно или содержатся, или не содержатся в множестве $[f(\tilde{x}_n)]_{K_1}$, поэтому можно считать, что $\|g(\tilde{x}_n)\| = \|f(\tilde{x}_n)\|$.

Рассмотрим произвольно выбранный номер i, $1\leqslant i\leqslant n$. Так как $\Omega^{g(\tilde{x}_n)} = \Omega^{f(\tilde{x}_n)}$, то $\sum \omega_{\dots i\dots}^{g(\tilde{x}_n)} = \sum \omega_{\dots i\dots}^{f(\tilde{x}_n)}$, где суммирования производятся по всем совокупностям переменных, таких, которые содержат переменную x_i. Легко видеть, что эти суммы равны числам

$$2^n\left(\|g(\tilde{x}_n)\| - \|g_0^i(\tilde{x}_n)\|\cdot\|g_1^i(\tilde{x}_n)\|\right) \quad \text{и} \quad 2^n\left(\|f(\tilde{x}_n)\| - \|f_0^i(\tilde{x}_n)\|\cdot\|f_1^i(\tilde{x}_n)\|\right)$$

соответственно.

Учитывая то, что

$$\|g_0^i(\tilde{x}_n)\| + \|g_1^i(\tilde{x}_n)\| = 2\cdot\|g(\tilde{x}_n)\|, \quad \|f_0^i(\tilde{x}_n)\| + \|f_1^i(\tilde{x}_n)\| = 2\cdot\|f(\tilde{x}_n)\|$$

и $\|g(\tilde{x}_n)\| = \|f(\tilde{x}_n)\|$, получим, что или $\|g_\sigma^i(\tilde{x}_n)\| = \|f_\sigma^i(\tilde{x}_n)\|$, или же $\|g_\sigma^i(\tilde{x}_n)\| = 1 - \|f_\sigma^i(\tilde{x}_n)\|$, $\sigma \in E$. Но так как функции $g(\tilde{x}_n)$ и $g(x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, \bar{x}_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)$ одновременно или содержатся, или не содержатся в $[f(\tilde{x}_n)]_\Pi$, и так как i произвольно, то можно считать, что для $i = \overline{1, n}$ имеет место соотношение $\|g_\sigma^i(\tilde{x}_n)\| = \|f_\sigma^i(\tilde{x}_n)\|$ при любом значении $\sigma \in E$. В таком случае для $i = \overline{0, n}$ будем иметь $a_i^{g(\tilde{x}_n)} = a_i^{f(\tilde{x}_n)}$, и, так как $f(\tilde{x}_n) \in \Pi$, то из свойства 3п0. $g(\tilde{x}_n) = f(\tilde{x}_n)$. Теорема доказана.

Из доказательства этой теоремы и из теоремы 4 вытекает следующая лемма.

Лемма 10. *Если* $\Omega^{\varphi(\tilde{x}_n)} = \Omega^{\psi(\tilde{x}_n)}$ и $\varphi(\tilde{x}_n) \in \mathbf{M}$, *то*

$$\psi(\tilde{x}_n) \in \mathbf{M}.$$

Вычислительный центр
АН Армянской ССР
и Ереванского госуниверситета

Поступила 20.VII.1977

Շ. Ե. ԲՈԶՈՅԱՆ, Բ. Ե. ԹՈՐՈՍՅԱՆ. Տրամաբանության հանրահաշվի ֆունկցիաների հետազոտումը փոփոխականների համախմբության ակտիվության տեսակետից *(ամփոփում)*

Աշխատանքում փորձ է արվում բուլյան ֆունկցիան բնութագրել իր, այսպես կոչված, ակտիվությունների վեկտորի միջոցով։ Բերվում է անհրաժեշտ և բավարար պայման, որպեսզի տված իրական վեկտորը լինի ակտիվությունների վեկտոր։ Տրվում են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, որպեսզի տված ակտիվությունների վեկտորն ունեցող ֆունկցիան պատկանի ֆունկցիաների որոշ հայտնի դասերի։ Տրվում են նաև ֆունկցիաների շեմքայնության անհրաժեշտ պայմաններ ակտիվությունների լեզվով, որոնք հեշտացնում են շեմքային ֆունկցիայի ճանաչումը։

Sh. E. BOZOJAN, B. E. TOROSSIAN. *Investigation of functions of the algebra of logic in terms of activity of joint variables* (summary)

An attempt to characterize Boolean functions in terms of so-called "activity vector" is made in the article. Necessary and sufficient conditions are provided for a given real vector to be an activity vector. Also, necessary and sufficient conditions are stated for any function with given activity vector to belong to a number of well-known classes of Boolean functions. In terms of activity some necessary conditions are obtained for function to be threshold.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дискретная математика и мат. вопросы кибернетики, под общей редакцией С. В. Яблонского и О. Б. Лупанова, „Наука", М., 1974.
2. *С. В. Яблонский* и др. Функции алгебры логики и классы Поста, Изд. „Наука", 1966.
3. *М. Дертоузос.* Пороговая логика, перевод с английского, Изд. „Мир", М., 1967.
4. *Ш. Е. Бозоян.* Некоторые свойства булевых дифференциалов и активностей аргументов булевых функций, Изв. АН СССР, сер. техн. киб., № 5, 1975.
5. *Ф. Харари, Э. Палмер.* Перечисления графов, Изд. „Мир", М., 1977.