ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIV, № 2, 1979 Математика

А. А. ВОСКАНЯН

О НЕКОТОРЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЯ НА ВСЕЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

В работе М. М. Джрбашяна [1] был развит метод, позволяющий получить решение экстремальных задач о наилучшем весовом полиномальном приближении ядра Коши $\frac{1}{w-x}$ $(\operatorname{Im} w \neq 0)$ на всей вещественной оси $-\infty < x < +\infty$ как в равномерной, так и в средне-квадратической метрике, когда вес является полиномом с заданными полюсами. Этот метод, в частности, опирался на представление ядра $\frac{1}{w-x}$ посредством отрезков его ряда Фурье по ортогональной на всей оси системе рациональных функций $\{\Phi_k(x)\}_1^\infty$ с заданным множеством полюсов $\{\bar{\lambda}_j\}_1^\infty$ $(\operatorname{Im} \lambda_j > 0)$.

В настоящей работе, пользуясь тем же методом и некоторыми результатами из [1], приводится решение аналогичных экстремальных задач взвешенно-весового приближения ядер вида $\frac{A+Bx}{x^2+\lambda^2}$ $(A, B, \lambda \in R^1)$ впервые рассмотренных С. Н. Бернштейном.

В § 1 рассматривается весовое полиномиальное приближение указанного ядра, а в § 2 — приближение с помощью рациональных функций с заданными полюсами.

Отметим, что а) решение экстремальной задачи при весовом полиномиальном приближении в равномерной метрике впервые было получено Н. И. Ахиезером, указавшим в своей книге найденный им по совершенно другим соображениям явный вид экстремальных полиномов и значения соответствующих экстремумов (см. [2], задача 9);

б) решение экстремальной задачи при приближении рациональными функциями с заданными полюсами в равномерной метрике впервые приведено акад. С. Н. Бернштейном в его известной монографии [3].

В данной работе показывается, что решение рассматриваемых задач в случае средне-квадратической метрики позволяет естественным путем получить решение аналогичной задачи в случае равномерной метрики.

В частности, показано также, что экстремальные функции обеих задач в средне-квадратической метрике совпадают с соответствующими экстремальными функциями при равномерной метрике.

Перейдем к изложению наших результатов.

§ 1. Об экстремальных задачах весового приближения ядра С. Н. Бернштейна

1. Пусть $\{\lambda_j\}_1^{\infty}$ — произвольная последовательность комплексных чисел, лежащих в верхней полуплоскости $G^{(+)}=\{z;\ \operatorname{Im} z<0\}$ и $\{\Phi_k(z)\}_1^{\infty}$ — ассоциированная с нею система Мальмквиста-Такенака

$$\Phi_1(z)=\frac{\sqrt{\operatorname{Im}\lambda_1}}{z-\bar\lambda_1},\ \dots,\ \Phi_n(z)=\frac{\sqrt{\operatorname{Im}\lambda_n}}{z-\bar\lambda_n}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{z-\lambda_k}{z-\bar\lambda_k},\quad (2\leqslant n<+\infty) \tag{1.1}$$

рациональных функций с множеством полюсов $\{\bar\lambda_j\}_1^{\infty}$, лежащих в нижней полуплоскости $G^{(-)}=\{z;\ \operatorname{Im} z<0\}$.

Известно, что система $\{\Phi_k(z)\}_1^{\infty}$ ортонормальна на всей оси $-\infty<x<+\infty$ в следующем смысле (см. [1], стр. 2 или [3], [4])

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_n(x)\overline{\Phi_m(x)}\,dx=\delta_{n,m}=\begin{cases}0, & m\neq n\\ 1, & m=n.\end{cases}$$

Теорема А. (см. [1]). *Для произвольных значений z, w и для любого n $(1\leqslant n<+\infty)$ справедливо тождество*

$$\frac{1}{2i(\bar w-z)}=\sum_{k=1}^{n}\overline{\Phi_k(w)}\,\Phi_k(z)+\frac{B_n(z)\,\overline{B_n(w)}}{2i(\bar w-z)}, \tag{1.2}$$

где

$$B_n(z)=\prod_{k=1}^{n}\frac{z-\lambda_k}{z-\bar\lambda_k}\,\varepsilon_k,\quad \varepsilon_k=\frac{|1+\lambda_k^2|}{1+\lambda_k^2}\quad (k\geqslant 1). \tag{1.3}$$

Далее, аналитическую в полуплоскости $G^{(+)}$ функцию $f(z)$ относим к классу H_+^2, если

$$\sup_{0<y<+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+iy)|^2\,dx\leqslant M_f<+\infty.$$

Известно, что (см. [6], стр. 405—409) для любой функции $f(z)\in H_+^2$ ее граничные значения

$$f(x)=\lim_{y\to 0}f(x+iy)$$

существуют почти для всех $x\in(-\infty;+\infty)$, причем справедлива интегральная формула Коши

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{t-z}\,dt,\quad z\in G^{(+)}.$$

Теорема Б. (см. [1]). *Если $f(z)\in H_+^2$, то для любого n $(1\leqslant n<+\infty)$ справедлива формула*

$$f(z)=\sum_{k=1}^{n} a_k(f)\,\Phi_k(z)+\frac{B_n(z)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\overline{B_n(t)}\,f(t)}{t-z}\,dt,\ z\in G^{(+)},\tag{1.4}$$

где

$$a_k(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\overline{\Phi_k(t)}\,dt\ \ (1\leqslant k<+\infty).$$

2. а) Введем в рассмотрение рациональную функцию от двух переменных z, λ $(\lambda>0)$:

$$R_n(z;\lambda)=\frac{A+Bz}{(z^2+\lambda^2)\overline{\pi}_n(z)},\ z\in G^{(+)},\ 1\leqslant n<+\infty,\tag{1.5}$$

где A, B — комплексные параметры, а

$$\pi_n(z)=\prod_{k=1}^{n}(z-\lambda_k),\ \overline{\pi}_n(z)=\prod_{k=1}^{n}(z-\overline{\lambda}_k).\tag{1.6}$$

Обозначим через $S_n(x;R_n)$ n-ый отрезок ряда Фурье функции $R(x;\lambda)$ по ортогональной системе $\{\Phi_k(x)\}_1^{\infty}$:

$$S_n(x;R_n)=\sum_{k=1}^{n} c_k(R_n)\,\Phi_k(x),\ 1\leqslant n<+\infty,$$

где

$$c_k(R_n)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} R_n(t;\lambda)\,\overline{\Phi_k(t)}\,dt,$$

и пусть далее

$$S_n(z;R_n)=\sum_{k=1}^{n} C_k(R_n)\,\Phi_k(z),\ 1\leqslant n<+\infty.$$

Имеет место следующая

Лемма 1. *Для любого n $(1\leqslant n<+\infty)$ и при любых комплексных A, B, $\lambda>0$ и $z\in G^{(+)}$ справедливо тождество:*

$$R_n(z;\lambda)-S_n(z;R_n)=\frac{A+i\lambda B}{2i\lambda(z-i\lambda)\overline{\pi}_n(i\lambda)}-$$

$$-\frac{A-i\lambda B}{2i\lambda(z+i\lambda)\pi_n(-i\lambda)}\,\frac{\pi_n(z)}{\overline{\pi}_n(z)}.\tag{1.7}$$

Доказательство. Полагая, что $z\in G^{(+)}$, рассмотрим следующий интеграл типа Коши:

$$J_n(z;\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{R_n(t;\lambda)}{t-z}\,dt\equiv\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{A+Bt}{(t^2+\lambda^2)\,\overline{\pi}_n(t)}\,\frac{dt}{t-z}.\tag{1.8}$$

Поскольку подынтегральная функция, как функция комплексной переменной t, в области $G^{(+)}$ имеет два простых полюса в точках $t=z$ и $t=i\lambda$, $\lambda>0$, а при $|t|\to+\infty$ имеет порядок $O(|t|^{-n-2})$, то пользуясь теоремой Коши о вычетах, получим

$$J_n(z;\lambda)=\frac{A+Bz}{(z^2+\lambda^2)\,\overline{\pi}_n(z)}+\frac{A+i\lambda B}{2i\lambda(i\lambda-z)\,\overline{\pi}_n(i\lambda)}. \tag{1.9}$$

С другой стороны, если в тождестве (1.2) теоремы А возьмем $w=t$ $(-\infty<t<+\infty)$, то пользуясь представлением (1.8), приходим к тождеству

$$J_n(z;\lambda)=S_n(z;R_n)+B_n(z)\,U_n(z;\lambda),\ z\in G^{(+)}, \tag{1.10}$$

где

$$U_n(z;\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\overline{B_n(t)}\,R_n(t;\lambda)}{t-z}\,dt.$$

Но принимая во внимание определения (1.3) и (1.5) функции $B_n(t)$ и $R_n(t;\lambda)(\lambda>0)$, получим

$$U_n(z;\lambda)=\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\overline{\alpha}_k}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(A+Bt)\,dt}{(t^2+\lambda^2)(t-z)\,\pi_n(t)},\ z\in G^{(+)}.$$

Так как подынтегральная функция в полуплоскости $G^{(-)}$ как функция комплексной переменной t имеет простой полюс в точке $t=-i\lambda\in G^{(-)}$, а при $|t|\to+\infty$ имеет порядок $O(|t|^{-n-2})$, то по теореме вычетов имеет место равенство

$$U_n(z;\lambda)=-\frac{(A-i\lambda B)\prod\limits_{k=1}^{n}\overline{\alpha}_k}{2i\lambda\,(z+i\lambda)\,\pi_n(-i\lambda)},$$

которое вместе с (1.9) и (1.10) приводит нас к доказательству тождества (1.7). Тем самым лемма доказана.

б). Для фиксированного значения λ $(\lambda>0)$ мы определим полином $T^{*}_{n-1}(z;\lambda)$ степени $n-1$ от z посредством соотношения

$$T^{*}_{n-1}(z;\lambda)=\overline{\pi}_n(z)\,S_n(z;R_n),\ 1\leqslant n<+\infty. \tag{1.11}$$

Наряду с полиномом $T^{*}_{n-1}(z;\lambda)$, следуя М. М. Джрбашяну [1], рассмотрим также полином

$$L^{*}_{n-1}(z;w)=\begin{cases}\dfrac{\pi_n(w)-\pi_n(z)}{(w-z)\,\pi_n(w)}, & w\in G^{(-)},\\[2ex] \dfrac{\overline{\pi}_n(w)-\overline{\pi}_n(z)}{(w-z)\,\overline{\pi}_n(w)}, & w\in G^{(+)}.\end{cases} \tag{1.12}$$

Лемма 2. *При любых комплексных A, B и $\lambda > 0$ справедливо тождество*

$$\frac{A+Bz}{z^2+\lambda^2} - T^*_{n-1}(z;\lambda) = \frac{A+i\lambda B}{2i\lambda(z-i\lambda)}\frac{\overline{\pi}_n(z)}{\overline{\pi}_n(i\lambda)} - \frac{A-i\lambda B}{2i\lambda(z+i\lambda)}\frac{\pi_n(z)}{\pi_n(-i\lambda)}, \quad (1.13)$$

т. е. полином $T^*_{n-1}(z;\lambda)$ допускает представление

$$T^*_{n-1}(z;\lambda) = \frac{1}{2i\lambda}\{(A-i\lambda B)\,L^*_{n-1}(z;-i\lambda)-(A+i\lambda B)\,L^*_{n-1}(z;i\lambda)\}. \quad (1.14)$$

В самом деле, подставив значение $S_n(z;R_n)$ из (1.11) в тождество (1.7) леммы 1, мы получим соотношение (1.13). Представление (1.14) полинома следует из очевидного тождества

$$\frac{A+Bz}{z^2+\lambda^2} = \frac{1}{2i\lambda}\left\{\frac{A+i\lambda B}{z-i\lambda} - \frac{A-i\lambda B}{z+i\lambda}\right\}$$

и из определения (1.12) полинома $L^*_{n-1}(z;w)$, $(\operatorname{Im} w \neq 0)$.

в). Пусть $\mathbf{P}_{n-1}$ — семейство всевозможных полиномов с комплексными коэффициентами порядка не выше, чем $n-1$.

Всюду ниже мы будем считать, что

$$\rho_n(z) = \rho_0\,\pi_n(z) = \rho_0\prod_{k=1}^{n}(z-\lambda_k), \quad (1.15)$$

где $\rho_0 \neq 0$ — произвольная постоянная.

Для произвольных A, B, $\lambda \in R^1$ введем в рассмотрение функционал

$$A_n\{p;\lambda\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{A+Bx}{x^2+\lambda^2} - p(x)\right|^2\frac{dx}{|\rho_n(x)|^2}, \quad p \in \mathbf{P}_{n-1}, \quad (1.16)$$

принимающий, очевидно, конечное значение на семействе $\mathbf{P}_{n-1}$.

Имеет место следующая

Теорема 1. *На семействе $\mathbf{P}_{n-1}$ минимум функционала $A_n\{p;\lambda\}$ реализует полином $T^*_{n-1}(x,\lambda)$ леммы 2, причем справедливы равенства*

$$\inf_{p\in P_{n-1}} A_n\{p;\lambda\} = A_n\{T^*_{n-1};\lambda\} = \frac{\pi(A^2+\lambda^2B^2)}{2|\lambda|^3|\overline{\rho_n}(i\lambda)|^2} =$$

$$= \frac{\pi(A^2+\lambda^2B^2)}{2|\lambda|^3}\exp\left\{-\frac{2|\lambda|}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln|\rho_n(x)|}{x^2+\lambda^2}dx\right\}. \quad (1.17)$$

Доказательство. Заметим, что $\left|\dfrac{\overline{\pi}_n(x)}{\pi_n(x)}\right| = 1$, $-\infty < x < +\infty$ и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\lambda^2} = \frac{\pi}{\lambda}, \quad \lambda > 0. \tag{1.18}$$

Так как

$$\frac{1}{(t+i\lambda)^2} \cdot \frac{\pi_n(t)}{\overline{\pi}_n(t)}$$

как функция комплексной переменной t регулярна в области $G^{(+)}$, а при $|t| \to +\infty$ имеет порядок $O(|t|^{-2})$, то по теореме Коши

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\pi_n(t)}{\overline{\pi}_n(t)} \frac{dt}{(t+i\lambda)^2} = 0. \tag{1.19}$$

Из тождества (1.7) леммы 1 и из (1.18), (1.19) для любых A, B и $\lambda > 0$ вытекает равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |R_n(x;\lambda) - S_n(x;R_n)|^2 dx = \frac{\pi(A^2+\lambda^2 B^2)}{2\lambda^3 |\pi_n(i\lambda)|^2}. \tag{1.20}$$

Но пользуясь значением (1.15) функции $R_n(x;\lambda)$, а также представлением (1.11) суммы $S_n(z;R_n)$, из (1.18) мы получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |R_n(x;\lambda) - S_n(x;R_n)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{A+Bx}{x^2+\lambda^2} - T^*_{n-1}(x;\lambda) \right|^2 \frac{dx}{|\pi_n(x)|^2} =$$

$$= \frac{\pi(A^2+\lambda^2 B^2)}{2\lambda^3 |\overline{\pi}_n(i\lambda)|^2}. \tag{1.21}$$

Заметим, что любой полином $p \in \mathbf{P}_{n-1}$ допускает представление вида

$$p(x) = \overline{\pi}_n(x) \sum_{k=1}^{n} a_k \Phi_k(x)$$

с вполне определенными коэффициентами $\{a_k\}_1^n$, и обратно, для любого набора коэффициентов $\{a_k\}_1^n$ выражение, стоящее в правой части этого равенства, является некоторым полиномом $p \in \mathbf{P}_{n-1}$. Поэтому принимая во внимание определения (1.5)—(1.6) функции $R_n(x;\lambda)$, мы можем утверждать, что при любом $p \in \mathbf{P}_{n-1}$ функционал $A_n\{p;\lambda\}$ допускает представление вида

$$A_n\{p;\lambda\} = |\rho_0|^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| R_n(x;\lambda) - \sum_{k=1}^{n} a_k \Phi_k(x) \right|^2 dx \tag{1.22}$$

с надлежащими постоянными $\{a_k\}_1^n$, и обратно, для любого набора этих постоянных выражение справа является значением функционала при некотором $p \in \mathbf{P}_{n-1}$.

Но согласно формуле (1.7) леммы 1 сумма $S_n(x;R_n)$ является n-ым отрезком ряда Фурье функции $R_n(x;\lambda)$ по ортогональной на всей оси $-\infty < x < +\infty$ системе $\{\Phi_k(x)\}_1^\infty$. Поэтому из (1.22) и (1.21) вытекает, что для любого полинома $p \in \mathbf{P}_{n-1}$

$$A_n\{p;\lambda\} \geqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{A+Bx}{x^2+\lambda^2} - T^*_{n-1}(x;\lambda) \right|^2 \frac{dx}{|\rho_n(x)|^2} = \frac{\pi(A^2+\lambda^2B^2)}{2\lambda^3|\bar\rho_n(i\lambda)|^2}, \quad (1.23)$$

поскольку по определению (1.15) функции $\bar\rho_n(z)$, $z\in G^{(+)}$ мы имеем

$$|\bar\rho_n(i\lambda)|=|\rho_0|\,|\bar\pi_n(i\lambda)|.$$

При этом в (1.23) знак равенства возможен лишь в том случае, когда

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\,\Phi_k(x)\equiv S_n(x;\,R_n)$$

или, что то же самое, когда $p(x)\equiv T^*_{n-1}(x;\lambda)$.

Заметим, что для функции $\ln|\bar\rho_n(i\lambda)|$ справедлива формула Пуассона

$$\ln|\bar\rho_n(i\lambda)| = \frac{\lambda}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln|\rho_n(x)|}{x^2+\lambda^2}\,dx,\quad \lambda>0, \quad (1.24)$$

откуда и из (1.21), (1.24) мы приходим к формуле (1.17), чем и завершается доказательство теоремы.

г). Следуя М. М. Джрбашяну, введем в рассмотрение также полином

$$H_n(z;\,w)=\begin{cases}\dfrac{2i\,\mathrm{Im}\,w\,\pi_n(w)-(z-w)\,\pi_n(z)}{2i\,\mathrm{Im}\,w\,(w-z)\,\pi_n(w)}, & w\in G^{(-)}\\[2ex] \dfrac{2i\,\mathrm{Im}\,w\,\bar\pi_n(w)-(z-\bar w)\,\bar\pi_n(z)}{2i\,\mathrm{Im}\,w\,(w-z)\,\bar\pi_n(w)}, & w\in G^{(+)}.\end{cases} \quad (1.25)$$

Согласно представлению (1.14) полинома $T^*_{n-1}(z;\,w)$ ($\lambda>0$), а также согласно определению (1.6) полиномов $\pi_n(z)$ и $\bar\pi_n(z)$, заменяя n на $n+1$ получим для экстремального полинома $T^*_n(z;\lambda)$ степени n, ассоциированного с совокупностью параметров $\{\lambda_j\}_1^{n+1}$, представление вида

$$T^*_n(z;\lambda)=\frac{1}{2i\lambda}\{(A-i\lambda B)\,H_n(z;\,-i\lambda)-(A+i\lambda B)\,H_n(z;\,i\lambda)\}. \quad (1.26)$$

Далее, определим полином степени n

$$H^*_n(z;\,\lambda)=\{T^*_n(z;\,\lambda)\}_{\lambda_{n+1}=i\lambda}, \quad (1.27)$$

ассоциированный с совокупностью чисел $\{\lambda_j\}_1^{n+1}$, где $\lambda_{n+1}\equiv i\lambda$ ($\lambda>0$).

Из представления (1.26) полинома $T^*_n(z;\lambda)$ и из (1.27), (1.25) заключаем, что полином $H^*_n(z;\lambda)$ ($\lambda>0$) допускает представление вида

$$H^*_n(z;\lambda)=\frac{1}{2i\lambda}\{(A-i\lambda B)\,H_n(z;\,-i\lambda)-(A+i\lambda B)\,H_n(z;\,i\lambda)\}. \quad (1.28)$$

Наконец, введем в рассмотрение функционал

$$A_{n+1}\{p;\lambda\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{A+Bx}{x^2+\lambda^2}-p(x)\right|^2\frac{dx}{(x^2+\lambda^2)|\rho_n(x)|^2},\ p\in\mathbf{P}_n,$$

принимающий конечное значение уже на семействе полиномов $\mathbf{P}_n$ степени не выше чем n.

Теорема 2. На семействе $\mathbf{P}_n$ минимум функционала $A_{n+1}\{p;\lambda\}$ реализует полином $H_n^*(x;\lambda)$, причем

$$\inf_{p\in\mathbf{P}_n} A_{n+1}\{p;\lambda\}=A_{n+1}\{H_n^*;\lambda\}=\frac{\pi(A^2+\lambda^2B^2)}{8|\lambda|^3|\bar{\rho}_n(i\lambda)|^2}=$$

$$=\frac{\pi(A^2+\lambda^2B^2)}{8|\lambda|^3}\exp\left\{-\frac{2|\lambda|}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln|\rho_n(x)|}{x^2+\lambda^2}\,dx\right\}.$$

В самом деле, достаточно применить метод доказательства теоремы 1, используя леммы 1 и 2 с заменой n на $n+1$ и $\lambda_{n+1}=i\lambda$ $(\lambda>0)$ и определение (1.27) полинома $H_n^*(x;\lambda)$ $(-\infty<x<+\infty)$.

3. Теперь приведем решение задачи наилучшего полиномиального приближения ядра $\dfrac{A+Bx}{x^2+\lambda^2}$ на всей оси $-\infty<x<+\infty$ в метрике равномерного приближения при наличии весовых функций видов

$$\frac{\sqrt{x^2+\lambda^2}}{|\rho_n(x)|}\ (\lambda>0)\ \text{и}\ |\rho_n(x)|^{-1}.$$

Если при любых $A, B\in R^1$ и $\lambda>0$ определим положительные константы R_1, R_2 $(0<R_1, R_2<+\infty)$ и вещественные константы φ_1 и φ_2 из соотношений

$$\frac{A+i\lambda B}{i\lambda\bar{\rho}_n(i\lambda)}=R_1e^{-i\varphi_1},\quad -\frac{A+i\lambda B}{2\lambda^2\bar{\rho}_n(i\lambda)}=R_2e^{-i\varphi_2},\tag{1.29}$$

то в качестве следствия леммы 2 получим следующее утверждение.

Лемма 3. *Для любого* n $(1\leqslant n<+\infty)$ *и вещественных* A, B, $\lambda>0$ *на всей оси* $-\infty<x<+\infty$ *справедливы тождества*

а)

$$\frac{\sqrt{x^2+\lambda^2}}{|\rho_n(x)|}\left\{\frac{A+Bx}{x^2+\lambda^2}-T_{n-1}^*(x;\lambda)\right\}=$$

$$=\frac{R_1}{2}\left(\sqrt{\frac{x-i\lambda}{x+i\lambda}}\Big/\frac{\pi_n(x)}{\bar{\pi}_n(x)}e^{i\varphi_1}+\sqrt{\frac{x+i\lambda}{x-i\lambda}}\Big/\frac{\bar{\pi}_n(x)}{\pi_n(x)}e^{-i\varphi_1}\right),$$

б)

$$\frac{1}{|\rho_n(x)|}\left\{\frac{A+Bx}{x^2+\lambda^2}-H_n^*(x;\lambda)\right\}=$$

$$= \frac{R_2}{2}\left(\frac{x-i\lambda}{x+i\lambda}\sqrt{\frac{\overline{\pi}_n(x)}{\overline{\overline{\pi}}_n(x)}}\, e^{i\varphi_2} + \frac{x+i\lambda}{x-i\lambda}\sqrt{\frac{\overline{\overline{\pi}}_n(x)}{\pi_n(x)}}\, e^{-i\varphi_2}\right),$$

где R_1, φ_1 *и* R_2, φ_2 *определяются из соотношений* (1.28).

Введем, наконец, функционал

$$\overline{A}_n\{p;\lambda\} = \sup_{-\infty<x<+\infty}\left\{\frac{\sqrt{x^2+\lambda^2}}{|\rho_n(x)|}\left|\frac{A+Bx}{x^2+\lambda^2} - p(x)\right|\right\},\ p\in \mathbf{P}_{n-1},$$

принимающий конечное значение на семействе $p\in\mathbf{P}_{n-1}$.

Применяя теорему П. Л. Чебышева о свойствах, характеризующих поведение полиномов равномерного наилучшего приближения, можно доказать, что полученные нами экстремальные полиномы при средне-квадратическом приближении являются также решениями тех же задач в случае равномерного приближения, установленные впервые Н. И. Ахиезером.

Теорема 3. 1°. *На семействе* $\mathbf{P}_{n-1}$ *минимум функционала* $\overline{A}_n\{p;\lambda\}$ *также реализует полином* $T^*_{n-1}(x;\lambda)$ *теоремы* 1, *причем*

$$\inf_{p\in\mathbf{P}_{n-1}} \overline{A}_n\{p;\lambda\} = \overline{A}_n\{T^*_{n-1}(x;\lambda),\lambda\} = \frac{\sqrt{A^2+\lambda^2B^2}}{|\lambda|\,|\overline{\rho}(i\lambda)|} =$$

$$= \frac{\sqrt{A^2+\lambda^2B^2}}{|\lambda|}\exp\left\{-\frac{|\lambda|}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln|\rho_n(x)|}{x^2+\lambda^2}dx\right\}.$$

2°. *На семействе* $\mathbf{P}_n$ *минимум функционала*

$$\overline{A}_{n+1}\{p;\lambda\} = \sup_{-\infty<x<+\infty}\left\{\frac{1}{|\rho_n(x)|}\left|\frac{A+Bx}{x^2+\lambda^2} - p(x)\right|\right\},\ p\in\mathbf{P}_n$$

реализует полином $H^*_n(x;\lambda)$ *теоремы* 2, *причем*

$$\inf_{p\in\mathbf{P}_n}\overline{A}_{n+1}\{p;\lambda\} = \overline{A}_{n+1}\{H^*_n;\lambda\} = \frac{\sqrt{A^2+\lambda^2B^2}}{2\lambda^2|\overline{\rho}_n(i\lambda)|} =$$

$$= \frac{\sqrt{A^2+\lambda^2B^2}}{2\lambda^2}\exp\left\{-\frac{|\lambda|}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|\rho_n(x)|}{x^2+\lambda^2}dx\right\}.$$

§ 2. Об экстремальных задачах приближения ядра С. Н. Бернштейна рациональными функциями с заданными полюсами

1. Здесь мы воспользуемся представлением функции $R(z;w) = (\overline{w}-z)^{-2}$ посредством отрезка $S_{n-1}(z;R)$ ее ряда Фурье по ортогональной на всей оси системе $\{\Phi_k(z)\}_1^\infty$, т. е. представлением

$$S_{n+1}(z;\ R) = -2i\sum_{k=1}^{n+1}\overline{\Phi_k(w)}\ \Phi_k(z),\ \lambda_{n+1}\equiv w\in G^{(+)}. \tag{2.1}$$

Далее, для любого фиксированного значения $w\in G^{(+)}$ мы определим рациональную функцию $r_n(z;\ w)\in\omega\{\lambda_k\}$ от z посредством соотношения

$$r_n(z;\ w) = (\overline{w}-z)\ S_{n+1}(z;\ R). \tag{2.2}$$

Имеет место следующая

Лемма 3. а) *Для любого n $(1\leqslant n<+\infty)$ и $z\in\overline{G^{(+)}}$ справедлива формула*

$$R(z;\ w)-S_{n+1}(z;\ w)=\frac{1}{2i\ \mathrm{Im}\ w}\left(\frac{z-w}{z-\overline{w}}\right)\frac{B_n(z)\ B_n(w)}{\overline{w}-z}. \tag{2.3}$$

б) *Функция $r_n(z;\ w)\in\omega\{\lambda_k\}$ допускает представление*

$$r_n(z;\ w)=\frac{2i\ \mathrm{Im}\ w+(z-w)\ B_n(z)\ \overline{B_n(w)}}{2\,i\ \mathrm{Im}\ w\ (\overline{w}-z)} \tag{2.4}$$

и удовлетворяет интерполяционным данным

$$r_n^{(s_k-1)}(\lambda_k;\ w) = \frac{(s_k-1)!}{(\overline{w}-\lambda_k)},\ 1\leqslant k\leqslant n+1,\ \lambda_{n+1}\equiv w\in G^{(+)}. \tag{2.5}$$

Доказательство. Поскольку при $w\in G^{(+)}$, $R(z;\ w)\in H^2_+$, то пользуясь теоремой Б мы приходим к тождеству

$$R(z;\ w)-S_{n+1}(z;\ R) = B_{n+1}(z)\ J_n(z;\ w),\ z\in G^{(+)}, \tag{2.6}$$

где

$$J_n(z;\ w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\overline{B_{n+1}(t)}\ R_n(t;\ w)}{t-z}\,dt.$$

Заметим теперь, что из (1.3) и (1.6)

$$B_{n+1}(z)=\left\{\prod_{k=1}^{n+1}\varkappa_k\right\}\frac{z-w}{z-\overline{w}}\,\frac{\pi_n(z)}{\overline{\pi}_n(z)}\quad(|\varkappa_k|=1), \tag{2.7}$$

поэтому из определения функции $R(t;\ w)$ и из (2.7) следует равенство

$$\overline{B_{n+1}(t)}\ R(t;\ w) = \left\{\prod_{k=1}^{n+1}\overline{\varkappa}_k\right\}\frac{1}{(t-\overline{w})(t-w)}\,\frac{\overline{\pi}_n(t)}{\pi_n(t)},\ -\infty<t<+\infty,$$

следовательно и равенство

$$J_n(z;\ w)=\frac{\prod_{k=1}^{n+1}\overline{\varkappa}_k}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{1}{(t-z)\ (t-w)}\,\frac{\overline{\pi}_n(t)}{\pi_n(t)}\right\}\frac{dt}{t-\overline{w}}. \tag{2.8}$$

Но выражение

$$\frac{1}{(t-z)(t-w)}\,\frac{\overline{\pi}_n(t)}{\pi_n(t)}\,,\quad z,\ w\in G^{(+)}$$

как функция комплексной переменной t регулярна в полуплоскости $G^{(-)}$ и при $|t|\to+\infty$ имеет порядок $O(|t|^{-2})$. Отсюда и из (2.8) ввиду того, что $\overline{w}\in G^{(-)}$, получим

$$J_n(z;\,w)=-\frac{\left\{\prod\limits_{k=1}^{n+1}\overline{\varkappa}_k\right\}}{(\overline{w}-w)(\overline{w}-z)}\,\frac{\overline{\pi}_n(\overline{w})}{\pi_n(\overline{w})}=\frac{\overline{\varkappa}_{n+1}}{2\,i\,\mathrm{Im}\,w}\cdot\frac{\overline{B_n(w)}}{\overline{w}-z}\,. \tag{2.9}$$

Наконец, из (2.6) и (2.9) следует тождество (2.3).

б). Пусть, $s_k\geqslant 1$ — кратность появления числа λ_k на отрезке $\{\lambda_j\}_1^k$, и пусть $p_k(n)$ для любого целого $n\geqslant 1$ и k $(1\leqslant k\leqslant n)$ означает кратность появления числа λ_k на отрезке $\{\lambda_j\}_1^n$. Очевидно

$$1\leqslant s_k\leqslant p_k(n)\ (1\leqslant k\leqslant n),\quad s_n=p_n(n),$$

поэтому, если $0\leqslant j\leqslant s_k-1\leqslant p_k(n)-1$, то функция $\psi_{nj}(z)=(z-\lambda_k)^{-j-1}\,\pi_n(z)$ является полиномом. Полагая $R>\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\{|\lambda_j|\}$, отсюда j-кратным дифференцированием по z формулы

$$\pi_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=R}\frac{\pi_n(t)}{t-z}\,dt\quad(|z|<R)$$

получим

$$\overline{\pi}_n^{(j)}(\lambda_k)=\frac{j!}{2\pi i}\int\limits_{|t|=R}\psi_{nj}(t)\,dt=0,\ 0\leqslant j\leqslant s_k-1. \tag{2.10}$$

Далее заметим, что

$$\frac{\partial^{s_k-1}}{\partial z^{s_k-1}}\left(\frac{1}{\overline{w}-z}\right)_{z=\lambda_k}=\frac{(s_k-1)!}{(\overline{w}-\lambda_k)^{s_k}},\ 1\leqslant k\leqslant n. \tag{2.11}$$

Наконец, (s_k-1)-кратным дифференцированием тождества

$$\frac{1}{\overline{w}-z}-r_n(z;\,w)=\frac{1}{2i\,\mathrm{Im}\,w}\,\frac{\overline{\pi}_{n+1}(z)}{\pi_{n+1}(z)}\,\frac{\pi_n(w)}{\overline{\pi}_n(w)}\,,\ \lambda_{n+1}=w\in G^{(+)},\ z\in G^{(+)}$$

в силу (2.10), (2.11) мы приходим к утверждению (2.5) леммы, поскольку

$$\frac{(s_k-1)!}{(\overline{w}-\lambda_k)^{s_k}}-r_n^{(s_k-1)}(\lambda_k;\,w)=\left\{\frac{\overline{\pi_n(w)}}{\overline{\pi}_n(w)}\right\}\sum_{j=0}^{s_k-1}C_{s_k-1}^{j}\,\frac{\overline{\pi}_{n+1}^{(j)}(\lambda_k)}{\pi_{n+1}^{(s_k-j)}(\lambda_k)}=0.$$

Тем самым лемма доказана.

2. Пусть при данном n $(1\leqslant n<+\infty)$ $\omega_0\{\lambda_k\}$ — семейство всевозможных рациональных функций вида

$$\left\{\sum_{j=1}^{n} a_j \Phi_j (x)\right\}$$

и $\omega\{\lambda_k\}$ — семейство вида

$$\{a_0^{(n)} + R_n (x)\},\ R_n \in \omega_0 \{\lambda_k\}.$$

Принимая во внимание определение (1.1) системы $\{\Phi_k (z)\}_1^\infty$, легко видеть, что семейство $\omega\{\lambda_k\}$ совпадает с множеством рациональных функций, имеющих вид

$$\left\{a_0^{(n)} + \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j^{(n)}}{(x-\bar{\lambda}_j)^{s_j}}\right\}.$$

Теорема 4. *На семействе $\omega\{\lambda_k\}$ минимум функционала*

$$\mu^*\left\{\frac{1}{\bar{w}-x};\ R_n\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{1}{\bar{w}-x} - R_n (x)\right|^2 \frac{dx}{|w-x|^2} \tag{2.12}$$

реализует функция $r_n (x;\ w) \in \omega\{\lambda_k\}$ леммы 3, причем

$$\inf_{R_n \in \omega\{\lambda_k\}} \mu^*\left\{\frac{1}{\bar{w}-x};\ R_n\right\} = \mu^*\left\{\frac{1}{\bar{w}-x};\ r_n (x,\ w)\right\} = \frac{\pi\,|B_n (w)|^2}{4\,(\mathrm{Im}\ w)^3}. \tag{2.13}$$

Доказательство. Из тождества (2.3) леммы 3 вытекает равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |R(x;\ w) - S_{n+1} (x;\ R)|^2\, dx = \frac{\pi\,|B_n (w)|^2}{4\,(\mathrm{Im}\ w)^3},\ w \in G^{(+)}. \tag{2.14}$$

Но пользуясь значением функции $R_n (x;\ w)$, а также представлением (2.2) суммы $S_{n+1} (x;\ R)$, мы получим равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |R (x;\ w) - S_{n+1} (x;\ R)|^2\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{1}{\bar{w}-x} - r_n (x;\ w)\right|^2 \frac{dx}{|w-x|^2} =$$

$$= \frac{\pi\,|B_n (w)|^2}{4\,(\mathrm{Im}\ w)^3}. \tag{2.15}$$

Заметим, что любая рациональная функция $R_n (x)$ допускает представление вида

$$R_n (x) = (\bar{w} - x) \sum_{k=1}^{n+1} a_k \Phi_k (x),\ \lambda_{n+1} \equiv w \in G^{(+)}$$

с вполне определенными коэффициентами $\{a_k\}_1^{n+1}$, и обратно, для любого набора коэффициентов $\{a_k\}_1^{n+1}$ выражение, стоящее в правой части этого равенства, является некоторой рациональной функцией $R_n \in \omega\{\lambda_k\}$.

В силу этого и принимая во внимание определение функции $r_n(x;\ w)$, мы можем утверждать что при любом $R_n \in \omega\{\lambda_k\}$ функционал $\mu^*\left\{\frac{1}{\overline{w}-x};\ R_n\right\}$ допускает представление вида

$$\mu^*\left\{\frac{1}{\overline{w}-x};\ R_n\right\} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|R(x;\ w) - \sum_{k=1}^{n+1} a_k \Phi_k(x)\right|^2 dx \tag{2.16}$$

с надлежащими постоянными $\{a_k\}_1^{n+1}$, и обратно, для любого набора этих постоянных выражение справа является значением функционала $\mu^*\left\{\frac{1}{\overline{w}-x};\ R_n\right\}$ при некотором $R_n \in \omega\{\lambda_k\}$.

Но согласно формуле (2.3) леммы 3 сумма $S_{n+1}(x;\ R)$ является n-ным отрезком ряда Фурье функции $R(x;\ w)$ по ортогональной на всей оси $-\infty < x < +\infty$ системе $\{\Phi_k(x)\}_1^{\infty}$.

Поэтому из (2.16) и (2.15) вытекает, что для любой рациональной функции $R_n \in \omega\{\lambda_k\}$

$$\mu^*\left\{\frac{1}{\overline{w}-x};\ R_n\right\} \geqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{1}{\overline{w}-x} - r_n(x;\ w)\right|^2 \frac{dx}{|w-x|^2} = \frac{\pi\,|B_n(w)|^2}{4\,(\operatorname{Im} w)^3}. \tag{2.17}$$

При этом в (2.17) знак равенства возможен лишь в том случае, когда

$$R_n(x) \equiv r_n(x;\ w),\quad w \in G^{(+)}.$$

Из (2.17), (2.15) мы приходим к формуле (2.13), чем и завершается доказательство теоремы 4.

Теорема 5. *Среди рациональных функций семейства $\omega\{\lambda_k\}$ минимум функционала*

$$\mu\left\{\frac{1}{\overline{w}-x};\ R_n\right\} = \sup_{-\infty<x<+\infty}\left|\frac{1}{\overline{w}-x} - R_n(x)\right|,\quad R_n \in \omega\{\lambda_k\} \tag{2.18}$$

реализует та же самая функция $r_n(x;\ w)$ теоремы 4, причем

$$\inf_{R_n \in \omega\{\lambda_k\}} \mu\left\{\frac{1}{\overline{w}-x};\ R_n\right\} = \mu\left\{\frac{1}{\overline{w}-x};\ r_n(x;\ w)\right\} = \frac{\pi\,|B_n(w)|}{2\operatorname{Im} w}. \tag{2.19}$$

В самом деле, во-первых из (2.12), (2.13) и (2.18) следует неравенство

$$\frac{\pi\,|B_n(w)|^2}{4\,(\operatorname{Im} w)^3} \leqslant \mu^*\left\{\frac{1}{\overline{w}-x};\ R_n\right\} \leqslant \mu^2\left\{\frac{1}{\overline{w}-x};\ R_n\right\}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{|w-x|^2} =$$

$$= \frac{\pi}{\operatorname{Im} w}\,\mu^2\left\{\frac{1}{\overline{w}-x};\ R_n\right\},$$

откуда заключаем, что для любого $R_n \in \omega\{\lambda_k\}$,

$$\inf_{R_n \in \{\lambda_k\}} \mu\left\{\frac{1}{\overline{w}-x};\ R_n\right\} \geqslant \frac{\pi\,|B_n(w)|}{2\,\mathrm{Im}\,w}. \tag{2.20}$$

С другой стороны, пользуясь тождеством (2.3), приходим к неравенству

$$\mu\left\{\frac{1}{\overline{w}-x};\ r_n(x;\ w)\right\} \leqslant \frac{\pi\,|B_n(w)|}{2\,\mathrm{Im}\,w}, \tag{2.21}$$

что вместе с (2.20) приводит нас к утверждению (2.19).

3. Теперь рассмотрим следующие рациональные функции:

$$\sigma_n(x;\lambda) = \frac{1}{i\lambda}\,[(A-i\lambda B)\,S_n(x;\ i\lambda)-(A+i\lambda B)\,S_n(x;-i\lambda)]$$

и

$$\sigma_n^*(x;\lambda) = \frac{1}{2i\lambda}\,[(A-i\lambda B)\,r_n(x;\ i\lambda)-(A+i\lambda B)\,r_n(x;\ -i\lambda)],$$

где A, B — вещественные числа, $\lambda>0$, а $S_n(x;\ i\lambda)$ является n-ым отрезком ряда Фурье функции $-\dfrac{1}{x+i\lambda}$ по ортогональной системе $\{\Phi_k(x)\}_1^{\infty}$, т. е.

$$S_n(x;\ i\lambda) = \sum_{k=1}^{n} \overline{\Phi_k(i\lambda)}\,\Phi_k(x).$$

Определим положительные константы ρ_1, ρ_2 $(0<\rho_1,\ \rho_2<+\infty)$ и вещественные числа α_1 и α_2 из соотношений

$$\frac{A+i\lambda B}{i\lambda}\,\frac{\pi_n(i\lambda)}{\overline{\pi}_n(i\lambda)} = \rho_1\,e^{-i\alpha_1},\quad -\frac{A+i\lambda B}{2\lambda^2}\,\frac{\pi_n(i\lambda)}{\overline{\pi}_n(i\lambda)} = \rho_2\,e^{-i\alpha_2}.$$

Отсюда и из (1.2), (2.3) следует

Лемма 4. *Для любого n $(1\leqslant n<+\infty)$ и вещественных A, B, $\lambda>0$ на всей оси справедливы тождества*

а)
$$\sqrt{x^2+\lambda^2}\left\{\frac{A+Bx}{x^2+\lambda^2}-\sigma_n(x;\ \lambda)\right\} =$$
$$= \frac{\rho_1}{2}\left\{\sqrt{\frac{x-i\lambda}{x+i\lambda}}\,\frac{\pi_n(x)}{\overline{\pi}_n(x)}\,e^{i\alpha_1}+\sqrt{\frac{x+i\lambda}{x-i\lambda}}\,\frac{\overline{\pi}_n(x)}{\pi_n(x)}\,e^{-i\alpha_1}\right\},$$

б)
$$\frac{A+Bx}{x^2+\lambda^2}-\sigma_n^*(x;\lambda) = \frac{\rho_2}{2}\left\{\frac{x-i\lambda}{x+i\lambda}\,\frac{\pi_n(x)}{\overline{\pi}_n(x)}\,e^{i\alpha_2}+\frac{x+i\lambda}{x-i\lambda}\,\frac{\overline{\pi}_n(x)}{\pi_n(x)}\,e^{-i\alpha_2}\right\}.$$

4. Пусть, $\omega_0\,\{\lambda_k;\ \overline{\lambda}_k\}$ — семейство всевозможных рациональных функций вида

$$\left\{\frac{p_{2n-1}(z)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(z-\lambda_k)\prod\limits_{k=1}^{n}(z-\overline{\lambda}_k)}\right\},\quad 1\leqslant n<+\infty,$$

а $\omega\,\{\lambda_k;\ \overline{\lambda}_k\}$ — семейство

$$|a_0^{(n)} + R_n(z)|, \quad R_n \in \omega_0\{\lambda_k; \overline{\lambda}_k\}.$$

Введем в рассмотрение функционал

$$\Omega\left\{\frac{A+Bx}{x^2+\lambda^2};\, R_n\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{A+Bx}{x^2+\lambda^2} - R_n(x)\right|^2 dx, \quad R_n \in \omega_0\{\lambda_k; \overline{\lambda}_k\},$$

принимающий конечное значение на семействе рациональных функций $\omega_0\{\lambda_k; \overline{\lambda}_k\}$.

Теорема 6. 1°. *На семействе* $\omega_0\{\lambda_k; \overline{\lambda}_k\}$ *минимум функционала* $\Omega\left\{\frac{A+Bx}{x^2+\lambda^2},\, R_n\right\}$ *реализует функция* $\sigma_n(x;\lambda)$, *причем*

$$\inf_{R_n\in\omega_0\{\lambda_k;\overline{\lambda}_k\}} \Omega\left\{\frac{A+Bx}{x^2+\lambda^2};\, R_n\right\} = \Omega\left\{\frac{A+Bx}{x^2+\lambda^2};\, \sigma_n(x;\lambda)\right\} =$$

$$= \frac{\pi(A^2+\lambda^2B^2)}{2|\lambda^3|}|B_n(i\lambda)|^2.$$

2°. *Среди рациональных функций семейства* $\omega\{\lambda_k; \overline{\lambda}_k\}$ *минимум функционала*

$$\Omega^*\left\{\frac{A+Bx}{x^2+\lambda^2};\, R_n\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{A+Bx}{x^2+\lambda^2} - R_n(x)\right|^2 \frac{dx}{x^2+\lambda^2}, \quad R_n \in \omega\{\lambda_k; \overline{\lambda}_k\}$$

реализует функция $\sigma_n^*(x;\lambda) \in \omega\{\lambda_k; \overline{\lambda}_k\}$, *причем*

$$\inf_{R_n\in\omega\{\lambda_k;\overline{\lambda}_k\}} \Omega^*\left\{\frac{A+Bx}{x^2+\lambda^2};\, R_n\right\} = \Omega^*\left\{\frac{A+Bx}{x^2+\lambda^2};\, \sigma_n^*(x;\lambda)\right\} =$$

$$= \frac{\pi(A^2+\lambda^2B^2)}{8|\lambda|^5}|B_n(i\lambda)|^2.$$

Здесь так же как и выше применяя теорему П. Л. Чебышева можно доказать, что полученные нами экстремальные функции $\sigma_n(x;\lambda)$ и $\sigma_n^*(x;\lambda)$ при средне-квадратическом приближении являются решениями тех же задач в случае равномерного приближения. Иначе говаря, имеет место следующая

Теорема 7. 1°. *На семействе* $\omega\{\lambda_k; \overline{\lambda}_k\}$ *минимум функционала*

$$\rho\left\{\frac{A+Bx}{x^2+\lambda^2};\, R_n\right\} = \sup_{-\infty<x<+\infty}\left|\frac{A+Bx}{x^2+\lambda^2} - R_n(x)\right|, R_n \in \omega\{\lambda_k, \overline{\lambda}_k\}$$

реализует функция $\sigma_n^*(x;\lambda) \in \omega\{\lambda_k; \overline{\lambda}_k\}$, *причем*

$$\inf_{R_n\in\omega\{\lambda_k;\overline{\lambda}_k\}} \rho\left\{\frac{A+Bx}{x^2+\lambda^2};\, R_n\right\} = \rho\left\{\frac{A+Bx}{x^2+\lambda^2};\, \sigma_n^*(x;\lambda)\right\} =$$

$$= \frac{\sqrt{A^2+\lambda^2B^2}}{2\lambda^2}|B_n(i\lambda)|.$$

2°. *Среди рациональных функций семейства* $\omega_0\{\lambda_k; \overline{\lambda}_k\}$ *минимум функционала*

$$\rho^*\left\{\frac{A+Bx}{x^2+\lambda^2}; R_n\right\} = \sup_{-\infty<x<+\infty}\left\{\sqrt{x^2+\lambda^2}\left|\frac{A+Bx}{x^2+\lambda^2}-R_n\right|\right\},\ R_n\in\omega_0\{\lambda_k; \overline{\lambda}_k\}$$

реализует та же функция $\sigma_n(x; \lambda)\in\omega_0\{\lambda_k; \overline{\lambda}_k\}$ *участвующая в теореме* 6, *причем*

$$\inf_{R_n\in\omega_0\{\lambda_k, \overline{\lambda}_k\}}\rho^*\left\{\frac{A+Bx}{x^2+\lambda^2}; R_n\right\} = \rho^*\left\{\frac{A+Bx}{x^2+\lambda^2}\ \sigma_n(x, \lambda)\right\} =$$

$$= \frac{\sqrt{A^2+\lambda^2B^2}}{|\lambda|}|B_n(i\lambda)|.$$

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить глубокую благодарность академику АН Армянской ССР М. М. Джрбашяну за постановку задач и ценные советы.

Армянский государственный
пединститут им. Х. Абовяна

Поступила 2.III.1977

Ա. Ա. ՈՍԿԱՆՅԱՆ. Ամբողջ առանցքի վրա մոտավորությունների տեսության մի քանի էքստրեմալ խնդիրների մասին (*ամփոփում*)

Օգտվելով առաջին անգամ [1] աշխատանքում շարադրված մեթոդից, դիտարկված է ամբողջ առանցքի վրա Ս. Ն. Բեռնշտեյնի կորիզի

$$\frac{A+Bx}{x^2+\lambda^2},\ A,\ B,\ \lambda\in R'$$

միջին քառակուսային մոտարկումները բազմանդամներով և տված բևեռներ ունեցող ռացիոնալ ֆունկցիաներով։

Նշենք, որ հավասարաչափ մետրիկայով այդ ֆունկցիայի լավագույն կշռային մոտավորության խնդիրը բազմանդամներով առաջին անգամ տրվել է Ն. Ի. Ախիեզերի կողմից, իսկ ֆիկսած բևեռներով ռացիոնալ կոտորակներով մոտավորության դեպքում բերված է Ս. Ն. Բեռնշտեյնի հայտնի մենագրության մեջ։

Ցույց է տրվում, որ դիտարկված խնդրի լուծումը միջին քառակուսային մետրիկայով, հնարավորություն է տալիս բնական ճանապարհով ստանալ անալոգ խնդրի լուծումը հավասարաչափ մետրիկայով։ Միաժամանակ ցույց է տրվում նաև որ էքստրեմալ ֆունկցիաները երկու մետրիկաներում էլ համընկնում են։

A. A. VOSKANIAN. *On some extremal problems in the theory of approximation on the real axis* (summary)

Using the metodh proposed in [1], the mean-quadratic approximation of S. N. Berstein's kernel $\frac{A+Bx}{x^2+\lambda^2}$, $A, B, \lambda\in R'$ by polinomials and rational functions with prescribed poles is considered.

It is shown that the solution of this problems leads to a natural solution of analogous problem in the uniform metric. It have been found that for both cases the extremal functions coincicle.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* Биортогональные системы рациональных функций и наилучшее приближение ядра Коши на вещественной оси, Матем. сб. 95 (137), вып. 3 (11), 1974.

2. *Н. И. Ахиезер.* Лекции по теории аппроксимации. М., Изд. «Наука», 1965.
3. *С. Н. Бернштейн.* Экстремальные свойства полиномов. ОНТИ, Л.—М., 1937.
4. *F. Malmgist.* Sur lad une classe de functions analutigues Par leurs valeurs dans un ensamble donne de Points, Gomptes rendus sixieml congris (1925) des math. scand, Kopenhagen, 1926, 253—259.
5. *S. Takenaka.* On the orthogonal functions and a new formula of interpolations, Japan, J. Math., 2, 1925.
6. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М., Изд. «Наука», 1966.
7. *В. К. Дзядык.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М., Изд. «Наука», 1977.