ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XIV, № 2, 1979 Математика

Р. З. МКРТЧЯН

ОБ ОДНОМ НОВОМ ПРИЗНАКЕ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩЕМ НЕПРЕРЫВНОСТЬ ПОЛНОЙ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ САМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА

1°. **Введение.** Пусть A — самосопряженный оператор с областью определения $D(A)$, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Пусть далее E_λ — соответствующее спектральное семейство проекционных операторов, а $\rho(\lambda) = \|E_\lambda g\|^2$, где g — так называемый порождающий элемент.

Обозначим через V оператор, существующий в силу основной спектральной теоремы и осуществляющий изометрическое отображение пространства H в пространство L^2_ρ так, что оператор A переходит в оператор умножения на независимую переменную.

В работах [1, 2] показано, что полную систему собственных функционалов $T_\lambda(\varphi)$ оператора A можно строить по формуле

$$T_\lambda(\varphi) = \lim_{\tau \to +0} T_{\lambda+i\tau}(\varphi), \quad T_z(\varphi) = \frac{(R_z \varphi, R_z g)}{\|R_z g\|^2}, \tag{1}$$

где R_z — резольвента оператора A.

Затем в работе [2] исследован характер непрерывности построенных по формуле (1) функционалов $T_\lambda(\varphi)$ в терминах, аналогичных тем, которые использованы в работах Ю. М. Березанского [3, 4], Г. И. Каца [5, 6] и К. Морена [7, 8] при доказательстве возможности спектральных разложений по обобщенным собственным элементам.

В работе [2] доказано, что линейные многообразия тех элементов φ, для которых указанные по формуле (1) функционалы существуют и непрерывны в некоторой топологии, описывающейся в терминах оператора G из класса R_H (где через R_H обозначена (см. [9]) совокупность неограниченных операторов G с плотными областями определения $D(G)$ и таких, что $G^{-1} \in S_2$ (определение класса S_p см., например, в [10]).

В этой работе доказывается, что для отдельно взятого самосопряженного оператора A существует полная система собственных функционалов $\{T_\lambda\}$, непрерывных в более слабой топологии, чем та, которая задается нормой $\|\varphi\|_+ = \|G\varphi\|_H$. А именно, для каждого A и любого $p > 2$ существует оснащение $H_+ \subset H \subset H_-$ (где оператор вложения H_+ в H из S_p) и полная система собственных функционалов $\{T_\lambda\}$, определенных и непрерывных в H_+.

Основной результат работы заключается в том, что в терминах оператора A описываются всевозможные оснащения гильбертова пространства H, удовлетворяющие указанным выше условиям.

2°. Пусть **K** — совокупность всех неограниченных операторов K, для которых $D(K) = H$ $\Delta(K) = H$, а K^{-1} — вполне непрерывный. Пусть далее E_K — банахово пространство, получаемое пополнением $D(K)$ по норме

$$\|\varphi\|_* = \|K\varphi\|_H. \tag{2}$$

Известно, что имеет место вложение $E_K \subset H \subset E_K^*$ и что H всюду плотно в E_K^* (сходимость в метрике пространства E_K сильнее, чем сходимость в H).

Пусть $K^{-1} = US$ — полярное представление оператора K^{-1}, тогда известно [10], что

$$K^{-1}\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i a_i \varphi_i, \; a_i = (\varphi, \omega_i), \tag{3}$$

где ω_i — ортонормированная и полная в $D(K)$ система собственных элементов оператора S, соответствующих собственным значениям μ_i, а $\varphi_i = U\omega_i$.

Предположим, что самосопряженный оператор A имеет простой и непрерывный спектр.

Обозначим через $\sigma(A)$ множество операторов K из класса **K**, удовлетворяющих следующим условиям.

Для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $f(t) \in L_\rho^2$ так, что

а) $\rho\,\{t;\, f(t) = 0\} < \varepsilon$,

б) $f(A) \cdot K^{-1} \in S_2$.

Из этого определения легко видеть, что $R_H \subset \sigma(A)$. В самом деле, пусть $K \in R_H$, а ограниченная функция $f(t)$ отлична от нуля на интервале (a, b) и равна нулю на $R^1 \setminus (a, b)$. Тогда условия а) и б) выполняются как только $\rho\,(a, b) > 1 - \varepsilon$. В дальнейшем будет доказано, что класс $\sigma(A)$ существенно шире, чем класс R_H.

Докажем следующую основную теорему.

Теорема 1. *Для того чтобы существовала полная система обобщенных собственных функционалов $\{T_\lambda\}$ самосопряженного оператора A, непрерывных по норме $\|\varphi\|_* = \|K\varphi\|_H$, необходимо и достаточно, чтобы оператор K принадлежал классу $\sigma(A)$.*

Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть спектр оператора A простой и непрерывный, и пусть g — его порождающий элемент. Тогда для каждого $\varphi \in H$ и любого λ из некоторого множества $\Lambda_\varphi = S_l(A) \cap \bar{\Lambda}_\varphi$ полной ρ-меры имеет место равенство*

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{(R_{\lambda+i\varepsilon}\varphi, R_{\lambda+i\varepsilon} g)}{\|R_{\lambda+i\varepsilon} g\|^2} = \varphi(\lambda), \tag{4}$$

где $\widetilde{\Lambda}_\varphi$ *— совокупность точек Лебега функции* $\varphi(t) = V\varphi$, *в которых значения Лебега* $\varphi(\lambda)$ *конечны, а* $S_l(A)$ *— так называемый существенный спектр* [11].

Доказательство леммы аналогично доказательству теоремы 1 работы [2].

Лемма 2. *Пусть* A *— оператор с простым спектром, а* g *— его порождающий элемент, и пусть оператор* $K \in \mathfrak{s}(A)$. *Тогда существует зависящее от* K *множество* Λ_K *полной* ρ*-меры и некоторое счетное всюду плотное в метрике* H *линейное многообразие* $\Omega \subset D(K)$ *такие, что для всех* $\varphi \in \Omega$ *и* $\lambda \in \Lambda_K$ *существует предел*

$$T_\lambda(\varphi) = \lim_{\tau \to +0} \frac{(R_{\lambda+i\tau}\varphi,\ R_{\lambda+i\tau}g)}{\|R_{\lambda+i\tau}g\|^2}, \tag{5}$$

и имеет место неравенство

$$|T_\lambda(\varphi)| \leqslant C_\lambda \|\varphi\|_*, \tag{6}$$

где C_λ *— не зависящая от* φ *постоянная.*

◀ Так как по условию леммы для любого $\varepsilon > 0$ существует $f(t) \in L^2_\rho$ такое, что $\rho\{t;\ f(t) = 0\} < \varepsilon$ и $f(A)\cdot K^{-1} \in S_2$, то оператор $(f(A)K^{-1})^*\cdot(f(A)\cdot K^{-1})$ имеет конечный след ([10], стр. 138), причем

$$\mathrm{Sp}\,[(f(A)K^{-1})^*(f(A)K^{-1})] = \sum_{(j)} \|f(A)K^{-1}\psi_j\|^2 < +\infty, \tag{7}$$

где $\{\psi_j\}$ — произвольная ортонормированная полная система в H, причем величина следа в (7) не зависит от выбора системы $\{\psi_j\}$. Если в правой части равенства (7) вместо системы $\{\psi_j\}$ возьмем полную ортонормированную систему $\{\omega_j\}$, фигурирующую в представлении (3) оператора K^{-1}, то правая часть (7) примет более простой вид, а именно

$$\sum_{(j)} \|f(A)K^{-1}\omega_j\|^2 = \sum_{(j)} \|f(A)\varphi_j\|^2\cdot\mu_j^2. \tag{8}$$

Так как оператор $V\colon H \to L^2_\rho$ изометричен, правую часть (8) можно переписать следующим образом:

$$\sum_{(j)} \mu_j^2 \|f(A)\varphi_j\|^2 = \sum_{(j)} \mu_j^2 \int_{R^1} |f(t)\varphi_j(t)|^2\, d\rho(t), \text{ где } \varphi_j(t) = V\varphi_j. \tag{9}$$

В силу теоремы об интегрировании рядов с неотрицательными членами [12] из (7), (8) и (9) следует

$$\mathrm{Sp}\,[(f(A)K^{-1})^*(f(A)K^{-1})] = \int_{R^1} |f(t)|^2 \sum_{(j)} \mu_j^2 |\varphi_j(t)|^2\, d\rho(t). \tag{10}$$

В силу того, что оператор $K \in \mathfrak{s}(A)$, то существует убывающая последовательность чисел $\varepsilon_i > 0$ $i = 1, 2, \cdots$, стремящихся к нулю, и функций $f_i(t) \in L^2\rho$, удовлетворяющих условиям а) и б) при $\varepsilon = \varepsilon_i$. В силу неравенства а) для любого $i = 1, 2, \cdots$, существует натуральное число $N(i)$ такое, что ρ-мера множества $F_i = \left\{ t;\ |f_i(t)| < \frac{1}{N(i)} \right\}$ меньше $2\varepsilon_i$.

Введем функции $\Phi_i^2(t)$, $i = 1, 2, \cdots$ следующим образом:

$$\Phi_i^2(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^2 |\varphi_j^i(t)|^2, \text{ если } t \in E_i = R^1 \setminus F_i,$$

$$\Phi_i^2(t) = 0, \text{ если } t \in F_i.$$

Подставляя в (10) $f_i(t)$ вместо $f(t)$ заключаем, что функции $\Phi_i^2(t)$ принадлежат пространству L_ρ^1 при всех $i = 1, 2, \cdots$. Так как $\int\limits_{R^1} d\rho(t) = 1$, то функция $\Phi_i(t) = \sqrt{\Phi_i^2(t)}$ также принадлежит пространству L_ρ^1.

По определению множеств E_i имеем

$$\lim_{i\to\infty} \rho(E_i) = 1. \tag{11}$$

Обозначим через E_i^* множество точек плотности множества E_i относительно меры ρ, т. е. точек λ, в которых предел

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{\rho((\lambda-\delta,\ \lambda+\delta) \cap E_i)}{\rho(\lambda-\delta,\ \lambda+\delta)} = 1.$$

Используя теоремы Витали-Лебега (см. [13], стр. 200), можно доказать, что $\rho(E_i) = \rho(Q_i)$, где $Q_i = E_i \cap E_i^*$. Тогда в силу (11) можно написать, что

$$\lim_{n\to\infty} \rho(Q_n) = 1. \tag{12}$$

Рассмотрим некоторое счетное всюду плотное в метрике H линейное многообразие $\Omega \subset D(K)$. Тогда в силу леммы 1, для произвольного элемента $\varphi \in \Omega$ существует множество Λ_φ такое, что для любого $\lambda \in \Lambda_\varphi$ имеет место равенство (4).

Составим множество $\Lambda_\Omega = \bigcap\limits_{\varphi\in\Omega} \Lambda_\varphi$, имеющее по лемме 1 полную ρ-меру.

Обозначим $\widetilde{E}_i = Q_i \cap M_i \cap \Lambda_\Omega$, где M_i — совокупность точек Лебега функции $\Phi_i(t)$ (относительно меры ρ), в которых значения Лебега конечны. По теореме Лебега (см. [13], стр. 212) множества M_i, $i = 1, 2, \cdots$ имеют полную ρ-меру, следовательно $\rho(\widetilde{E}_i) = \rho(Q_i)$. Отсюда и из (12) получаем, что множество $\Lambda_k = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \widetilde{E}_i$ имеет полную ρ-меру, т. е. $\rho(\Lambda_k) = 1$.

Таким образом, для любой точки $\lambda \in \Lambda_K$ и для любого элемента $\varphi \in \Omega$ существует предел (5), и первая часть леммы 2 доказана.

Теперь докажем неравенство (6).

Возьмем произвольную точку $\lambda_0 \in \Lambda_K$, тогда существует такой номер p_0, что $\lambda_0 \in \tilde{E}_{p_0} = Q_{p_0} \cap M_{p_0} \cap \Lambda_\Omega$.

Пусть φ—произвольный элемент из многообразия Ω. Возьмем элемент $\hat{\varphi} = \frac{\varphi}{\|\varphi\|_*}$. Так как $\|\hat{\varphi}\|_* = 1$, то из (2), (3) следует $\hat{\varphi} = K^{-1}\psi$, причем $\|\psi\| = 1$, поэтому

$$|T_{\lambda_0+i\tau}(\hat{\varphi})| = |T_{\lambda_0+i\tau}(K^{-1}\psi)|,$$

откуда будем иметь

$$|T_{\lambda_0+i\tau}(\hat{\varphi})| = \frac{\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_k a_k \varphi_k(t)}{(t-\lambda_0)^2+\tau^2}\, d\rho(t)\right|}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\rho(t)}{(t-\lambda_0)^2+\tau^2}}. \tag{13}$$

Ясно, что $\|\hat{\varphi}\| \leqslant \|K^{-1}\|$, поэтому для каждого $\Delta_0 = R^1 \setminus (\lambda_0 - \delta_0;\ \lambda_0 + \delta_0)$ имеем

$$\left|\int\limits_{\Delta_0} \frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_k a_k \varphi_k(t)}{(t-\lambda_0)^2+\tau^2}\, d\rho(t)\right| \leqslant \frac{1}{\delta_0}\left|\int\limits_{\Delta_0} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_k a_k \varphi_k(t)\, d\rho(t)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\delta_0}\int\limits_{\Delta_0}\left|\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_k a_k \varphi_k(t)\right|^2 d\rho(t) \cdot \int\limits_{\Delta_0} d\rho(t) \leqslant \frac{1}{\delta_0}\|K^{-1}\|^2. \tag{14}$$

Поскольку точка λ_0 принадлежит $S_l(A)$, то в силу определения $S_l(A)$ [11], знаменатель правой части равенства (13) стремится к бесконечности при $\tau \to +0$, поэтому используя неравенство (14) можем сказать, что при достаточно малом $\tau > 0$ равенство (13) превращается в неравенство

$$|T_{\lambda_0+i\tau}(\hat{\varphi})| \leqslant \frac{\left|\int\limits_{\lambda_0-\delta}^{\lambda_0+\delta} \frac{\sum\limits_{(k)} \mu_k a_k \varphi_k(t)}{(t-\lambda_0)^2+\tau^2}\, d\rho(t)\right|}{\int\limits_{\lambda_0-\delta}^{\lambda_0+\delta} \frac{d\rho(t)}{(t-\lambda_0)^2+\tau^2}} + \varepsilon \quad \text{при } 0 < \tau < \tau_0, \tag{15}$$

где ε стремится к нулю при $\tau \to 0$.

В силу определения функции $\Phi_l(t)$ можно, используя неравенство Коши—Буняковского, для числителя правой части неравенства (15) получить оценки

$$\left|\int\limits_{\lambda_0-\delta}^{\lambda_0+\delta}\frac{\sum\limits_{(k)}\mu_k a_k \varphi_k(t)}{(t-\lambda_0)^2+\tau^2}\,d\rho(t)\right| \leqslant \left|\int\limits_{E_{p_0}\cap(\lambda_0-\delta_0;\lambda_0+\delta_0)}\left|\frac{\sum\limits_{(k)}\mu_k a_k \varphi_k(t)}{(t-\lambda_0)^2+\tau^2}\,d\rho(t)\right|\right| +$$

$$+\left|\int\limits_{(\lambda_0-\delta_0,\,\lambda_0+\delta_0)\setminus E_{p_0}}\frac{\sum\limits_{(k)}\mu_k a_k \varphi_k(t)}{(t-\lambda_0)^2+\tau^2}\,d\rho(t)\right| \leqslant \int\limits_{\lambda_0-\delta_0}^{\lambda_0+\delta_0}\frac{\Phi_{p_0}(t)}{(t-\lambda_0)^2+\tau^2}\,d\rho(t)+ \tag{16}$$

$$+\left|\int\limits_{(\lambda_0-\delta_0;\,\lambda_0+\delta_0)\setminus E_{p_0}}\frac{\sum\limits_{(k)}\mu_k a_k \varphi_k(t)}{(t-\lambda_0)^2+\tau^2}\,d\rho(t)\right|.$$

Определим в интервале $(\lambda_0-\delta_0;\ \lambda_0+\delta_0)$ функцию $\tilde{\varphi}(t)=\chi(t)\,\overset{\bullet}{\varphi}(t)\equiv \equiv \chi(t)\cdot\sum\limits_{(k)}\mu_k a_k \varphi_k(t)$, где $\chi(t)$—характеристическая функция множества $(\lambda_0-\delta_0;\ \lambda_0+\delta_0)\setminus E_{p_0}$. Докажем, что точка λ_0 является точкой Лебега для функции $\tilde{\varphi}(t)$ и значения Лебега в этой точке равны нулю. В самом деле, составим отношение

$$\frac{1}{\rho(\lambda_0-h,\lambda_0+h)}\cdot\int\limits_{\lambda_0-h}^{\lambda_0+h}\tilde{\varphi}(t)\,d\rho(t).$$

При достаточно малом $h<\delta_0$, в силу неравенства Буняковского—Шварца и определения функции $\tilde{\varphi}(t)$, получим следующую оценку:

$$\left|\int\limits_{\lambda_0-h}^{\lambda_0+h}\tilde{\varphi}(t)\,d\rho(t)\right| \leqslant \|\overset{\bullet}{\varphi}(t)\|^2_{L^2_\rho}\,\rho((\lambda_0-h;\ \lambda_0+h)\setminus E_{p_0}). \tag{17}$$

Так как точка λ_0 является точкой плотности множества E_{p_0}, из неравенства (17) получаем

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left|\int\limits_{\lambda_0-h}^{\lambda_0+h}\tilde{\varphi}(t)\,d\rho(t)\right|}{\rho(\lambda_0-h;\ \lambda_0+h)} \leqslant \|\overset{\bullet}{\varphi}(t)\|^2\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\rho((\lambda_0-h,\lambda_0+h)\setminus E_{p_0})}{\rho(\lambda_0-h,\lambda_0+h)}=0.$$

Имея в виду (16), неравенство (15) можем переписать в виде

$$|T_{\lambda_0+i\tau}(\overset{\bullet}{\varphi})| \leqslant \frac{\int\limits_{\lambda_0-\delta}^{\lambda_0+\delta}\frac{\Phi_{p_0}(t)\,d\rho(t)}{(t-\lambda_0)^2+\tau^2}}{\int\limits_{\lambda_0-\delta}^{\lambda_0+\delta}\frac{d\rho(t)}{(t-\lambda_0)^2+\tau^2}} + \frac{\left|\int\limits_{\lambda_0-\delta_0}^{\lambda_0+\delta_0}\frac{\tilde{\varphi}(t)}{(t-\lambda_0)^2+\tau^2}\,d\rho(t)\right|}{\int\limits_{\lambda_0-\delta_0}^{\lambda_0+\delta_0}\frac{d\rho(t)}{(t-\lambda_0)^2+\tau^2}} + \varepsilon\tilde{\tau} < \tau_0. \tag{18}$$

Так как по построению множества Λ_ϵ точка λ_0 принадлежит множеству $S_l(A)$ и так как эта точка является точкой Лебега для функции $\Phi_{p_0}(t)$ с конечным лебеговым значением $\Phi_{p_0}(\lambda_0) < +\infty$, то по лемме 1 первое слагаемое правой части неравенства (18) стремится к величине $\Phi_{p_0}(\lambda_0)$ при $\tau \to +0$. По той же причине и второе слагаемое правой части неравенства (18) стремится к величине $\tilde{\varphi}(\lambda_0) = 0$ при $\tau \to +0$. Таким образом, в силу произвольности ε, мы доказали, что

$$|T_{\lambda_0}(\hat{\varphi})| = \lim_{\tau \to +0} |T_{\lambda_0+\tau}(\hat{\varphi})| \leq C_{\lambda_0} = \Phi_{p_0}(\lambda_0). ▶$$

Лемма 2 доказана.

Доказательство достаточности условия теоремы 1. Для каждого $\lambda \in \Lambda_K$ $T_\lambda(\varphi)$ является (в силу леммы 2) ограниченным по норме $\|\cdot\|_*$ функционалом, определенным на многообразии $\Omega \subset D(K)$. Следовательно, функционал $T_\lambda(\varphi)$ однозначно продолжим по непрерывности на замыкание Ω в пространстве E_K, совпадающем со всем пространством E_K. Полученные после такого продолжения функционалы, которые очевидно также будут принадлежать E_K^*, мы будем продолжать обозначать через $T_\lambda(\varphi)$.

Доказательство формулы

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} T_\lambda(f) \cdot \overline{T_\lambda(\varphi)}\, d\rho(\lambda)\, f, \varphi \in E_K$$

и утверждения, что построенная совокупность функционалов $\{T_\lambda \in E_K^*, \lambda \in \Lambda_K\}$ образует полную систему, можно провести так же как в работе [2].▶

Доказательство необходимости условия теоремы 1. Пусть существует полная система обобщенных функционалов $\{T_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ самосопряженного оператора A, которые непрерывны по норме $\|\varphi\|_* = \|K\varphi\|_H$, где $\rho(\Lambda) = 1$ и

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(\cdot, \omega_i)\, \varphi_i = K^{-1}(\cdot) \in S_p,\ p > 2.$$

Обозначим множество $\tilde{\Lambda}_K = \bigcap_{(i)} \Lambda_i$, где Λ_i — совокупность точек Лебега функции $\varphi_i(t) = V\varphi_i$ (относительно меры ρ), в которых значения Лебега конечны и равны $\varphi_i(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda_i$. Так как каждое множество $\Lambda_i (i = 1, 2, \cdots)$ имеет полную ρ-меру, то множество $\tilde{\Lambda} = \Lambda \cap \tilde{\Lambda}_K \cap S_l(A)$ также имеет полную ρ-меру.

Докажем, что при сделанных предположениях функция $\Phi(t) = (\sum_{(i)} \mu_i^2 |\varphi_i(t)|^2)^{1/2}$ почти всюду конечна по мере ρ. Предположим противное. Тогда существует множество F, для которого имеет место

$$\Phi^2(t) = \sum_{(i)} \mu_i^2 |\varphi_i(t)|^2 = +\infty, \text{ если } t \in F \subset \tilde{\Lambda},\ \rho(F) > 0. \tag{19}$$

Таким образом, мы будем считать, что ряд (19) составлен из значений Лебега функций $\mu_i^2 |\varphi_i(t)|^2$ в точках λ из множества F.

По условию существует счетное всюду плотное по метрике H многообразие Ω в $D(K)$ такое, что функционалы $\{T_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}$ на элементах $\varphi \in \Omega$ определяются по формуле

$$T_\lambda(\varphi) = \lim_{\tau \to +0} \frac{(R_{\lambda+i\tau}\varphi,\ R_{\lambda+i\tau} g)}{\|R_{\lambda+i\tau} g\|^2} = \lim_{\tau \to +0} \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sum_{(i)} \mu_i a_i \varphi_i(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2} d\rho(t)}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2}},\ \varphi \in \Omega. \tag{20}$$

Докажем, что при сделанном предположении (19) каждый функционал T_λ не ограничен по норме $\|\varphi\|_* = \|K\varphi\|$, если $\lambda \in F$. Пусть $\lambda_0 \in F$, тогда для любого числа B в силу (19) существует номер N такой, что

$$F_N(\lambda_0) = \sum_{i=1}^{N} \mu_i^2 |\varphi_i(\lambda_0)|^2 > B + 1. \tag{21}$$

Положим $\hat{a}_i = \mu_i \bar{\varphi}_i(\lambda_0) \cdot (F_N(\lambda_0))^{-1/2}$ при $i \leqslant N$ и $\hat{a}_i = 0$ при $i > N$, тогда точка λ_0 является точкой Лебега для функции $\sum_{i=1}^{N} \mu_i \hat{a}_i \varphi_i(t)$ с лебеговским значением $F_N(\lambda_0)$. С другой стороны, можно выбрать такую функцию $\tilde{\varphi}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \tilde{a}_i \varphi_i(t) \in \Omega$, что последовательность $\{\tilde{a}_i\}$ удовлетворяет условию

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\tilde{a}_i - \hat{a}_i|^2 < \varepsilon, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{a}_i^2 = 1. \tag{22}$$

Так как значения Лебега функций $\varphi_i(t)$ в точке λ_0 конечны, то в силу неравенства (21) можно считать (при подходящем выборе ε и последовательности $\{\tilde{a}_i\}$ в (22)), что λ_0 является точкой Лебега и для функции $\tilde{\varphi}(t)$, причем ее значение Лебега в λ_0 больше чем B. Следовательно, в силу леммы 1 и вышесказанного, равенство (20) при $\varphi \equiv \tilde{\varphi}(t)$ и $\lambda = \lambda_0$ принимает вид

$$T_{\lambda_0}(\tilde{\varphi}) = \sum_{(l)} \mu_l \, \tilde{a}_l \, \varphi_l(\lambda_0) > B.$$

Поскольку число B произвольно, а $\|\tilde{\varphi}\|_* = 1$, то получаем, что функционал T_{λ_0}, вопреки условию не ограничен по норме $\|\varphi\|_*$.

Таким образом, функция $\Phi(t)$, а следовательно и $\Phi^2(t)$, почти всюду по мере ρ конечны. Поэтому ρ-мера множества $M_n = \{t;\ \Phi^2(t) \leqslant n\}$ стремится к единице, при $n \to +\infty$. Теперь покажем, что оператор K принадлежит классу $\mathfrak{z}(A)$. Для произвольного числа $\varepsilon > 0$ возьмем интервал $(a, b) \subset R^1$ такой, что $\rho(a, b) > 1 - \dfrac{\varepsilon}{2}$, тогда в силу того, что $\lim\limits_{n \to \infty} \rho(M_n \cap (a, b)) = \rho(a, b)$, существует номер $n(\varepsilon)$ такой, что

$$\rho(M_{n(\varepsilon)} \cap (a, b)) > \rho(a, b) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $f(t)$ — произвольная функция из L^2_ρ, исчезающая на $\hat{M}_{n(\varepsilon)} = (R^1 \setminus (a, b)) \cup ((a, b) \setminus M_{n(\varepsilon)})$ и отличная от нуля на $R^1 \setminus \hat{M}_{n(\varepsilon)}$. Ясно, что $\rho(\{t;\ f(t) = 0\}) < \varepsilon$. Из того, что носитель функции $f(t)$ ограничен, следует, что оператор $f(A)\,K^{-1}$ ограничен, следовательно,

$$\operatorname{sp}[(f(A)\,K^{-1})^*(f(A)\,K^{-1})] = \sum_{(j)} \|f(A)\,K^{-1}\psi_j\|^2.$$

Тогда если вместо $\{\psi_j\}$ взять полную ортонормированную систему $\{\omega_j\}$, участвующую в представлении оператора K^{-1}, то получим

$$\sum_{(j)} \|f(A)\,K^{-1}\omega_j\|^2 = \sum_{(j)} \|f(A)\,\varphi_j\|^2 \cdot \mu_j^2 = \sum_{(j)} \mu_j^2 \, \|Vf(A)\,\varphi_j\|^2_{L^2_\rho} =$$

$$= \int\limits_{R^1} \sum_{(j)} \mu_j^2 |\varphi_j(t)|^2 \cdot |f(t)|^2 \, d\rho(t). \tag{23}$$

Из определения функции $f(t)$ и того, что $\Phi^2(t) < n(\varepsilon)$ на множестве $M_{n(\varepsilon)}$ следует, что правую часть равенства (23) можно оценить следующим образом:

$$\int\limits_{R^1} |f(t)|^2 \sum_{(j)} \mu_j^2 |\varphi_j(t)|^2 \, d\rho(t) \leqslant n(\varepsilon) \int\limits_{R^1} |f(t)|^2 \, d\rho(t) < +\infty.$$

Следовательно, оператор $f(A) \cdot K^{-1} \in S_2$. Таким образом, оператор K принадлежит классу $\mathfrak{z}(A)$, чем и завершается доказательство необходимости условий теоремы 1.

В определении класса $\mathfrak{z}(A)$ желательно, чтобы спектральная функция ρ не участвовала.

Действительно, если спектр оператора A лебеговский, то класс $\mathfrak{z}(A)$ можно определить без спектральной функции ρ.

С этой целью обозначим через B_n класс функций $f(t) \in L^2$, тождественно равных нулю вне интервала $(-n, n)$. Будем говорить, что оператор $K \in \sigma_a(A)$, если

i) $K \in \mathbf{K}$

ii) для любого $\varepsilon > 0$ и натурального n можно найти функцию $\varphi(t) \in B_n$ такую, что

a′) $\operatorname{mes}(\{t;\ \varphi(t) = 0\} \cap (-n, n)) < \varepsilon$,

б′) $\varphi(A) \cdot K^{-1} \in S_2$.

Наше утверждение следует из равенства

$$\sigma(A) = \sigma_a(A), \tag{24}$$

доказательство которого мы опускаем.

Если спектр оператора A лебеговский, то в силу (24) теорему 1 можно сформулировать следующим образом:

Теорема 2. *Для того чтобы существовала полная система непрерывных по норме $\|\varphi\|_* = \|K\varphi\|_H$ обобщенных функционалов $\{T_\lambda\}$ самосопряженного оператора A с лебеговским спектром, необходимо и достаточно, чтобы оператор $K \in \sigma_a(A)$.*

В общем случае, когда спектр оператора A имеет сингулярную и лебеговскую части, определим следующий класс операторов: будем говорить, что $K \in \sigma_1(A)$, если $K \in \mathbf{K}$ и существует непрерывная функция $f(t)$, обращающаяся в нуль не более чем в счетном множестве точек, такая, что оператор $f(A) K^{-1} \in S_2$. Очевидно, что $\sigma_1(A) \subset \sigma(A)$, поэтому имеет место следующая

Теорема 3. *Для существования полной системы непрерывных по норме $\|\varphi\|_* = \|K\varphi\|_H$ обобщенных функционалов $\{T_\lambda\}$ самосопряженного оператора A, достаточно чтобы оператор K принадлежал классу $\sigma_1(A)$*

Замечание. Пусть $f(t) = \prod_{j=1}^{m} (t - \lambda_j)^{n_j}$, тогда в силу равенства (10) из условия $f(A) K^{-1} \in S_2$ следует, что если λ_j $(j = 1, 2, \cdots, m)$ не принадлежит классическому спектру $S(A)$, то $K^{-1} \in S_2$, если же хотя бы одна точка $\lambda_i \in S(A)$, тогда как мы убедимся в дальнейшем (см. п. 3), существует оператор $K^{-1} \in S_\infty \setminus S_2$ такой, что $f(A) \cdot K^{-1} \in S_2$ и следовательно $K \in \sigma_1(A)$. В частности, если $f(t) = (t - \lambda)$, где $\lambda \in S(A)$, то существует оператор $K^{-1} \in S_\infty \setminus S_2$ такой, что $(A - \lambda I) K^{-1} \in S_2$.

3°. Основной результат этого пункта состоит в следующем: пересечение классов $\sigma^{-1}(A) \cap (S_p \setminus S_{p-1}) \overset{\text{def}}{=} \sigma^p(A)$ не пусто ни при каком $p = 3, 4, \cdots$, где $\sigma^{-1}(A)$ определяется так: $K \in \sigma^{-1}(A)$, если $K^{-1} \in \sigma(A)$. Кроме этого результата будет приведено новое доказательство теоремы Каца [6].

Предложение 1. *Для любого самосопряженного оператора A с простым спектром, действующего в гильбертовом пространстве H и для любого числа $2 < p < +\infty$, класс $\mathfrak{I}^p(A)$ всюду плотен (в смысле сходимости по метрике $|\cdot|_{S_p}$) в $S_p \setminus S_{p-1}$.*

◀ Не нарушая общности, можно предполагать, что оператор A ограничен, т. е., что его спектральная мера сосредоточена на интервале (a, b).

Пусть оператор $K(\cdot) = \sum_{(j)} \mu_j(\cdot, \omega_j)\varphi_j$ принадлежит классу $S_p \setminus S_{p-1}$. Это означает, что $\sum_{(j)} \mu_j^p < +\infty$, $\sum_{(j)} \mu_j^{p-1} = +\infty$. Тогда для любого числа $\varepsilon_0 > 0$ существует номер n_0 такой, что

$$\sum_{j=n_0+1}^{\infty} \mu_j^p < \varepsilon_0. \tag{25}$$

В интервале (a, b) выберем возрастающую последовательность чисел $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \cdots$ таких, что $\lim_{n\to\infty} t_n = b$ и ρ-мера каждого интервала $\Delta_k = (t_{k-1}, t_k)$ больше нуля, а ρ-мера каждой точки t_k, $k = 0, 1, 2, \cdots$ равна нулю. Обозначим через L_k^2 подпространство функций $f(t) \in L_\rho^2$, обращающихся в нуль вне интервала Δ_k. Очевидно, что

$$L_\rho^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \oplus L_k^2 \quad \text{и} \quad L_k^2 = L_{\rho_k}^2, \tag{26}$$

где

$$\rho_k(t) = \rho(t)\ t \in \Delta_k \ \text{ и } \ \rho_k(t) = \begin{cases} \rho(t_k) & t_k \leqslant t \leqslant b \\ \rho(t_{k-1}) & a \leqslant t \leqslant t_{k-1} \end{cases}.$$

Рассмотрим пространство $L_{k, n_0}^2 = L_k^2 \cap VH_{n_0}$, $k = 1, 2, \cdots$, где подпространство $H_{n_0} = H \ominus \{\varphi_j\}_{j=1}^{n_0}$. Тогда в силу (26) очевидно имеем

$$VH_{n_0} = \sum_{k=1}^{\infty} \oplus L_{k, n_0}^2. \tag{27}$$

Пусть множество положительных чисел $\{a_i^{(k)}\}_{i,k=1,2,\cdots}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a_i^{(k)})^2 < +\infty, \ k = 1, 2, \cdots, \tag{28}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} (a_i^{(k)})^{p-1} = +\infty, \tag{29}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} (a_i^{(k)})^p < \varepsilon_0. \tag{30}$$

Существование такого множества при любом $p>2$ легко установить. Произвольным образом перенумеруем множество чисел $\{a_i^{(k)}\}_{i, k=1, 2, \cdots}$ и полученную последовательность обозначим через $\{\eta_j\}$.

Из условий (29) и (30) следует, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j^{p-1} = +\infty, \tag{31}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j^{p} < \varepsilon_0. \tag{32}$$

Затем в пространстве L^2_{k, n_0} выберем полную ортонормальную систему $\{\omega_i^{(k)}(t)\}_1^{\infty}$, $k=1, 2, \cdots$ и соответственным образом перенумеруем множество функций $\{\omega_i^{(k)}(t)\}$, $i, k=1, 2, \cdots$; обозначим полученную последовательность через $\{f_j(t)\}_1^{\infty}$. Легко видеть, что система $\{f_j(t)\}$ будет полной и ортонормальной в пространстве VH_{n_0}.

Обозначим через $\{\theta_j(t)\}$ полную систему, биортогональную к $\{f_j(t)\}$. Тогда очевидно, что в силу (27), (31) и (32) оператор $B_{n_0}(\cdot) = \sum_{(j)} \eta_j(\cdot, \theta_j) f_j$ определен в H_{n_0} и принадлежит классу $S_p \setminus S_{p-1}$, где $\theta_j = V^{-1}\theta_j(t)$, $f_j = V^{-1} f_j(t)$. Рассмотрим оператор

$$B(\cdot) = \sum_{j=1}^{n_0} \mu_j(\cdot, \omega_j)\varphi_j + \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j(\cdot, \theta_j) f_j,$$

определенный в H и принадлежащий классу $S_p \setminus S_{p-1}$ и докажем, что оператор B^{-1} принадлежит классу $\mathfrak{z}(A)$. Для этого сперва покажем, что для любого m функция

$$F_m^2(t) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j^2 |f_j(t)|^2, & \text{если } t \in (a, t_m) \\ 0, & \text{если } t \in (t_m, b), \end{cases}$$

интегрируема по мере ρ.

В самом деле, в силу условия (28) и способа нумерации системы $\{\omega_i^{(k)}\}$ $i, k=1, 2, \cdots$, получаем

$$\int_a^b F_m^2(t)\, d\rho(t) = \sum_{k=1}^{m} \int_{\Delta_k} F_m^2(t)\, d\rho(t) = \sum_{k=1}^{m} \int_{\Delta_k} \sum_{i=1}^{\infty} \eta_{k_i}^2 |f_{k_i}(t)|^2\, d\rho(t) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \int_{\Delta_k} \sum_{i=1}^{\infty} (a_i^{(k)})^2 |\omega_i^{(k)}(t)|^2\, d\rho(t) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{\infty} (a_i^{(k)})^2 < +\infty, \tag{33}$$

где для фиксированного k последовательность чисел $\{a_i^{(k)}\}_{i=1}^{\infty}$ обозначена через $\{\tau_{ik_i}\}_{i=1}^{\infty}$, т. е. $a_i^{(k)} = \tau_{ik_i}$, $i=1, 2, \cdots$, а последовательность функций $\{\omega_i^{(k)}(t)\}_{i=1}^{\infty}$ обозначена соответственно через

$$\{f_{k_i}(t)\}_{i=1}^{\infty}, \text{ т. е. } \omega_i^{(k)}(t) = f_{k_i}(t), \; i=1, 2, \cdots.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Тогда существует такой номер $m(\varepsilon)$, что имеет место $\rho(t_{m(\varepsilon)}, b) < \varepsilon$. Возьмем, далее, ограниченную функцию $f(t) \in L_\rho^2$ такую, что $f(t) \neq 0$, если $t \in (a, t_{m(\varepsilon)})$, $f(t) = 0$, если $t \in (t_{m(\varepsilon)}, b)$. Легко видеть, что оператор $f(A) \cdot B \in S_2$. Так как

$$f(A) \cdot B(\cdot) = f(A) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n_0} \mu_j(\cdot, \omega_j) \varphi_j + B_{n_0}(\cdot) \right),$$

то для этого достаточно показать, что оператор $f(A) \cdot B_{n_0}$ принадлежит S_2. В самом деле, в силу (10) и (33) имеем

$$\mathrm{sp}\,[(f(A) \cdot B_{n_0})^* (f(A) \cdot B_{n_0})] = \int_a^b \sum_{j=1}^{\infty} \tau_j^2 |f_j(t)|^2 |f(t)|^2 d\rho(t) =$$

$$= \int_a^{t_{m(\varepsilon)}} F_{m(\varepsilon)}^2(t) |f(t)|^2 d\rho(t) \leqslant C \sum_{k=1}^{m(\varepsilon)} \sum_{i=1}^{\infty} (a_i^{(k)})^2 < +\infty.$$

Отсюда и из вышеуказанного следует, что оператор $B \in \mathfrak{z}^p(A)$. Теперь докажем, что операторы B и K близки в метрике пространства S_p. В самом деле, в силу (25) и (32) можем написать

$$|K - B|_{S_p} = \left| \sum_{j=n_0+1}^{\infty} \mu_j(\cdot, \omega_j) \varphi_j - \sum_{j=1}^{\infty} \tau_j(\cdot, \theta_j) f_j \right|_{S_p} \leqslant$$

$$\leqslant \left| \sum_{j=n_0+1}^{\infty} \mu_j(\cdot, \omega_j) \varphi_j \right|_{S_p} + |B_{n_0}|_{S_p} = \sum_{j=n_0+1}^{\infty} \mu_j^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \tau_j^p < 2\varepsilon_0. \blacktriangleright$$

П р е д л о ж е н и е 2. *Для любого $p > 2$ и любого оператора $K \in S_p$ существует самосопряженный оператор A такой, что оператор $K^{-1} \in \mathfrak{z}(A)$ (существование оператора K^{-1} в H мы предполагаем).*

◀ Пусть $K(\cdot) = \sum_{(i)} \mu_i(\cdot, \omega_i) \varphi_i$, где $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i^p < +\infty$ и система $\{\varphi_i\}$ — полная и ортонормированная в H. Легко показать, что из последовательности $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ можно выбрать подпоследовательности

$$\mu_{k_1^j}, \mu_{k_2^j}, \cdots, \mu_{k_i^j}, \cdots, j = 1, 2, 3, \cdots,$$

(где для каждого $j=1, 2, 3, \cdots$ через $\{k_i^j\}$ обозначена подпоследовательность последовательности натуральных чисел), удовлетворяющие условиям:

i) $\sum_{l=1}^{\infty} \mu_{k_l^j}^2 < +\infty$, $j = 1, 2, 3, \cdots$,

ii) $k_l^j = k_i^q$ тогда и только тогда, когда $j = q$, $i = l$.

iii) Каждый член последовательности $\{\mu_k\}$ участвует в какой-нибудь из взятых подпоследовательностей.

Возьмем интервал (a, b) и на нем последовательность точек

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_j < \cdots \text{ так что } \lim_{j \to \infty} t_j = b. \tag{34}$$

Обозначим через H_j подпространство пространства H, которое порождено системой $\{\varphi_{k_l^j}\}_{l=1}^{\infty}$, т. е. система $\{\varphi_{k_l^j}\}_{l=1}^{\infty}$ полна и ортонормирована в H_j.

Легко доказать, что существует самосопряженный оператор A_j с простым спектром, действующий на H_j, и соответствующая ему спектральная мера ρ_j, сосредоточенная на интервале $\Delta_j = (t_{j-1}, t_j)$.

Из условий ii) iii) и (34) следует, что

$$H_j \perp H_i \ i \neq j \text{ и } H = \sum_{j=1}^{\infty} \oplus H_j. \tag{35}$$

Введем самосопряженный оператор A в H следующим образом: $A|_{H_j} \overset{\text{def}}{=} A_j$, $j = 1, 2, \cdots$. Тогда в силу (35) оператор A имеет простой спектр и его спектральная функция будет

$$\rho(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j \rho_j(t), \quad \text{где} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j = 1, \ \varepsilon_j > 0.$$

Из условия (34) получаем, что мера ρ сосредоточена на интервале (a, b).

Теперь покажем, что оператор $K^{-1} \in \sigma(A)$.

Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$, тогда существует номер $n(\varepsilon)$ такой, что $\rho(t_{n(\varepsilon)}, b) < \varepsilon$. Введем ограниченную функцию $f(t) \in L_\rho^2$ следующим образом: $f(t) \neq 0$, если $t \in (a, t_{n(\varepsilon)})$, $f(t) = 0$, если $t \in (t_{n(\varepsilon)}, b)$. Легко видеть, что оператор $f(A) \cdot K \in S_2$. В самом деле, в силу (10), i) имеем

$$\operatorname{sp}[(f(A)K)^*(f(A)K)] = \int_a^b |f(t)|^2 \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^2 |\varphi_j(t)|^2 d\rho(t) =$$

$$= \int_a^{t_{n(\varepsilon)}} |f(t)|^2 \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^2 |\varphi_j(t)|^2 d\rho(t) \leqslant \text{const} \cdot \int_a^{t_{n(\varepsilon)}} \sum_{j=1}^{n(\varepsilon)} \sum_{l=1}^{\infty} \mu_{k_l^j}^2 |\varphi_{k_l^j}(t)|^2 d\rho(t) =$$

$$= \text{const} \sum_{j=1}^{n(\varepsilon)} \sum_{l=1}^{\infty} |\mu_{k_l^j}|^2 < +\infty, \text{ где } \varphi_j(t) = V\varphi_j \blacktriangleright.$$

Приведем теперь доказательство теоремы Каца [6] в новой формулировке.

Теорема 4. *Для любого оператора* $K \in \mathbf{K}$ *такого, что* $K^{-1} \in S_\infty / S_2$, *можно найти самосопряженный оператор* A *такой, что* $K \overline{\in} \mathfrak{z}(A)$ *или* $K^{-1} \overline{\in} \mathfrak{z}^{-1}(A)$.

◀ Пусть $K^{-1}(\cdot) = \sum\limits_{(i)} \mu_i a_i \varphi_i$, $a_i = (\cdot, \omega_i)$ и $\sum\limits_{(i)} \mu_i^2 = +\infty$.

Рассмотрим пространство L^2_ρ, где функция ρ монотонна, непрерывна и $\rho(-\infty) = 0$, $\rho(+\infty) = 1$.

Легко понять, что для любой последовательности положительных чисел $\{a_i\}$, удовлетворяющей условию $\sum\limits_{(i)} a_i^2 = +\infty$, существует полная ортонормированная система $\{\chi_i(t)\}$ в L^2_ρ такая, что имеет место условие

(i) $\sum\limits_{(i)} a_i^2 |\chi_i(t)|^2$ равна бесконечности на множестве положительной ρ-меры. В самом деле, в пространстве L^2_ρ для некоторой ортонормированной и полной системы $\{\chi_i(t)\}$ ($\chi_i(t)$ по отношению к мере ρ имеет такую же конструкцию, как и система Уолша $\{W_n(t)\}$ по отношению к мере Лебега. Заметим, что $|W_n(t)| = 1$ п. в. по мере Лебега, следовательно $|\chi_i(t)| = 1$ п. в. по мере ρ), имеем

$$\sum_{(i)} a_i^2 |\chi_i(t)|^2 = +\infty \text{ п. в. по мере } \rho.$$

В условии (i) можем считать, что $a_i = \mu_i$, $i = 1, 2, 3, \cdots$. Рассмотрим далее оператор $A = V^{-1} QV$, где Q—оператор умножения на независимую переменную, а V: $H \to L^2_\rho$—изометрический оператор, определяемый следующим образом:

$$V\varphi_i = \chi_i(t) \quad i = 1, 2, 3, \cdots.$$

Известно [14], что оператор A самосопряжен в H и его классический спектр $S(A)$ совпадает с точкой роста функции $\rho(t)$. По построению система $\{\chi_i(t)\}$ такова, что соответствующая оператору K^{-1} функция $\Phi^2(t) = \sum\limits_{(i)} \mu_i^2 |\chi_i(t)|^2$ равна бесконечности на множестве положительной спектральной меры оператора A. Далее из доказательства необходимости условия теоремы 1 следует, что оператор $K \overline{\in} \mathfrak{z}(A)$. ▶

Поскольку для каждого самосопряженного оператора A $\mathfrak{z}(A) \supset R_H$, то из теоремы 4 легко следует

Теорема 4*.

$$\bigcap_{(A)} \mathfrak{z}(A) = R_H.$$

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 4.II.1977

Ռ. Զ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ. Ինքնահամալուծ օպերատորի սեփական ֆունկցիոնալների լրիվ սիստեմի անընդհատությունը բնորոշող մի նոր հայտանիշի մասին (*ամփոփում*)

Հիմնականում այս աշխատանքը վերաբերվում է անհրաժեշտ-բավարար և բավարար պայմանների նկարագրելուն, որ H հիլբերտյան տարածության մեջ գործող A ինքնահամալուծ օպերատորի ընդհանրացված ֆունկցիոնալների $|T_\lambda|$ լրիվ սիստեմը լինի անընդհատ ըստ (2) բանաձևի սահմանված մետրիկայի։

R. Z. MKRTCHIAN. *On a new criterion characterizing the continuity of the full system of eigenfunctionals* (summary)

The paper is devoted to the description of necessary—sufficient and sufficient conditions for the continuity in the metric (2), of the full system of generalized eigenfunctionals $|T_\lambda|$ of the selfadjoint operator A, acting in the Hilbert space H.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. А. Александрян.* О спектральном разложении произвольных самосопряженных операторов по собственным функционалам, ДАН СССР, 162, № 1, 1965, 11—14.
2. *Р. А. Александрян, Р. З. Мкртчян.* О построении полной системы собственных функционалов произвольного самосопряженного оператора и об исследовании их структуры, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 3, №№ 4—5, 1968, 358—368.
3. *Ю. М. Березанский.* О разложении по собственным функциям самосопряженных операторов. УМЖ, 11, № 1, 1959, 16—24.
4. *Ю. М. Березанский.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, Изд. «Наукова думка», Киев, 1965.
5. *Г. И. Кац.* О разложении по собственным функциям самосопряженных операторов, ДАН СССР, 119, № 1, 1958, 19—22.
6. *Г. И. Кац.* Спектральные разложения самосопряженных операторов по обобщенным элементам гильбертова пространства, УМЖ, 13, № 4, 1961, 13—33.
7. *K. Maurin.* Math. Scand., 9, 1961, 359—371.
8. *К. Морен.* Методы гильбертова пространства, Изд. «Мир», М., 1965.
9. *Р. А. Александрян, Р. З. Мкртчян.* О ядре спектра самосопряженного оператора с простым спектром, действующего в сепарабельном гильбертовом пространстве, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», V, № 2, 1970, 97—108.
10. *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, Изд. «Наука», 1965.
11. *Р. А. Александрян, Р. З. Мкртчян.* Некоторые критерии, характеризующие спектр самосопряженного оператора в абстрактном гильбертовом пространстве, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 1, № 1, 1966, 25—34.
12. *С. Сакс.* Теория интеграла, ИИЛ, М., 1949, стр. 47.
13. *Г. Е. Шилов, Б. Л. Гуревич.* Интеграл, мера и производная, Изд. «Наука», М., 1967.
14. *Н. И. Ахиезер* и *И. М. Глазман.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, Изд. «Наука», М., 1966, стр. 158, 294.