ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XIV, № 1, 1979 Математика

С. Г. ДАЛАЛЯН

БАШНИ КРИВЫХ И МНОГООБРАЗИЯ ПРИМА

Задача отличения многообразий Прима от якобианов кривых стала актуальной после решения проблемы рациональности кубики Клеменсом и Гриффитсом [12]. Было установлено, что при разложении среднего якобиана в прямую сумму двух компонент, одна из которых является произведением якобианов кривых, а другая компонента Гриффитса [5] — не содержит якобианов кривых, они преобразуются автономно, причем компонента Гриффитса является бирациональным инвариантом. В случае кубики в P^4 (а также расслоения на коники, пересечения трех квадрик [7]) средний якобиан возникает как многообразие Прима двулистного накрытия, поэтому появляется необходимость отличения его от якобина кривой.

Усилиями Мамфорда [3], разобравшего общий случай, и Тюрина [5], [6], Рециллаcа [10], автора [8], Масиевицкого [11], исследовавшими оставшиеся специальные случаи, был получен ответ для многообразий Прима неразветвленных двулистных накрытий. В статье [8] было показано, что в случае разветвленного в двух точках накрытия гиперэллиптической кривой, как и в неразветвленном случае, многообразие Прима изоморфно якобиану кривой. Развивая метод башен кривых и накрытий, мы в этой статье докажем, что многообразие Прима, разветвленного в двух точках двулистного накрытия тригональной кривой, является якобианом при ограничительных условиях на точки ветвления (§ 7).

Автор признателен за ценные обсуждения А. Н. Тюрину, Майлсу Риду, Ф. А. Богомолову.

Сводка обозначений

Z/kZ — циклическая группа порядка k,

$R(C)$ — поле рациональных функций кривой C,

$C_1 \times_C C_2$ — расслоенное произведение,

W_α — дивизор ветвления накрытия $\alpha: \bar{C} \to C$,

U_α — половинка дивизора ветвления, соответствующая двулистному накрытию α,

(W_α, U_α) — характеристика двулистного накрытия α,

(W_1, W_2) — общая часть дивизоров,

i_α — инволюция кривой $\bar{C}$, индуцированная двулистным накрытием α,

$G(\tilde C / C) = G(R(\tilde C)/R(C))$ — группа Галуа накрытия α,

$\deg \alpha$ — степень накрытия α,

$1 = \mathrm{id}$ — тождественное отображение,

$\dot A$ — двойственное многообразие к абелеву многообразию A,

$\hat\alpha$: $\dot A' \to \hat A$ — дуальное отображение к α: $A \to A'$.

ЧАСТЬ I. БАШНИ КРИВЫХ И НАКРЫТИЙ

§ 1. Категория конечнолистных накрытий

Построим категорию конечнолистных накрытий полных неособых кривых Cov. Объектами этой категории являются конечнолистные накрытия полных неособых кривых π: $\tilde C \to C$. Морфизм объекта π: $\tilde C \to C$ в объект π': $\tilde C' \to C'$ определяется как пара накрытий $\tilde\alpha$: $\tilde C \to \tilde C'$, α: $C \to C'$, удовлетворяющая условию коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} \tilde C \arrow[r, "\tilde\alpha"] \arrow[d, "\pi"'] & \tilde C' \arrow[d, "\pi'"] \\ C \arrow[r, "\alpha"] & C' \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

Композицией морфизмов $(\tilde\alpha; \alpha)$: $\pi \to \pi'$ и $(\tilde\alpha', \alpha')$: $\pi' \to \pi''$ называется морфизм $(\tilde\alpha' \circ \tilde\alpha, \alpha' \circ \alpha)$: $\pi \to \pi''$. Проверка аксиом категории тривиальна.

В категории Cov можно определить понятие расслоеного произведения. Если α и π'—накрытия с общим концом C', их расслоенным произведением назовем накрытие π_0: $\tilde C_0 \to C'$, разлагающееся в произведения $\pi_0 = \alpha \circ \tilde\pi_0 = \pi' \circ \tilde\alpha_0$ и обладающее свойством универсальности: если накрытие τ: $\tilde C \to C'$ также разлагается в композиции $\tau = \alpha \circ \pi = \pi' \circ \tilde\alpha$, то существует коммутативная диаграмма (1.2). Кривая $\tilde C_0$ обозначается $C \times_{C'} \tilde C'$. Из свойства универсальности сразу выводится единственность расслоенного произведения. Существование расслоенных произведений в более общей ситуации доказывается в [2], [4].

Рассмотрим накрытие Галуа π: $\dot C \to C$ с группой Галуа G. Каждой подгруппе H группы G соответствует кривая C_H, получаемая из $\dot C$ факторизацией по действию H. Паре вложенных подгрупп $H_1 \subset H$ соответствует каноническое конечнолистное накрытие $C_{H_1} \to C_{H}$. Возь-

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[d, "\tilde{\pi}"] \arrow[dr, "\tilde{\alpha}"] & \\
 & \check{C}_0 \arrow[dl, "\pi_0"] \arrow[dr, "\check{\alpha}_0"'] & \\
\dot{C} \arrow[dr, "\alpha"'] & & \tilde{C}' \arrow[dl, "\pi'"] \\
 & C &
\end{tikzcd} \qquad (1.2)$$

мем все получаемые описанным образом кривые и те из накрытий, которые не разлагаются в произведение других таких же. Построенную башню кривых и накрытий назовем башней Галуа накрытия π. Если рассматривать полученную башню как ориентированный граф, то очевидно, что он будет совпадать с графом структуры подгрупп группы G. Типом башни назовем соответствующий ей орграф. Две однотипные башни называются изоморфными, если между их соответствующими кривыми существуют изоморфизмы, объединяющие эти две башни в одну коммутативную башню. Внутренние автоморфизмы группы G определяют автоморфизмы башен Галуа с изоморфизмами сопряжения соответствующих кривых.

Предложение 1.1. *Пусть* π: $\dot{C} \to C$ — *накрытие Галуа с группой Галуа* $G(\dot{C}/C) = G$, *подгруппы* $\bar{H}_1 \subset H_1$ *группы* G *сопряжены подгруппам* $\bar{H}_2 \subset H_2$, а π_1: $\bar{C}_1 = \dot{C}/\bar{H}_1 \to C_1 = \dot{C}/H_1$ *и* π_2: $\bar{C}_2 = \dot{C}/\bar{H}_2 \to C_2 = \dot{C}/H_2$ — *ассоциированные накрытия кривых. Тогда* π_1 *изоморфно* π_2, *т. е. существует коммутативный квадрат*

$$\begin{tikzcd}
\bar{C}_1 \arrow[r, "\bar{\alpha}"] \arrow[d, "\pi_1"'] & \bar{C}_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\
C_1 \arrow[r, "\alpha"] & C_2
\end{tikzcd}$$

с бирегулярными изоморфизмами $\bar{\alpha}$ *и* α.

Доказательство. Пусть для $j \in G$ $\sigma_j(x) = jxj^{-1}$ и $\sigma_j(\bar{H}_1) = \bar{H}_2$, $\sigma_j(H_1) = H_2$. Определим изоморфизмы $\bar{\alpha}$: $\bar{C}_1 \to \bar{C}_2$, α: $C_1 \to C_2$ равенствами $\bar{\alpha}(\bar{H}_1 x) = \bar{H}_2 j(x)$, $\alpha(H_1 x) = H_2 j(x)$. Они определены корректно и обратимы

$$\alpha^{-1}(\bar{H}_2 x) = \bar{H}_1 j^{-1}(x), \quad \alpha^{-1}(H_2 x) = H_1 j^{-1}(x).$$

§ 2. Нормализации трехлистных накрытий

Двулистные накрытия всегда являются накрытиями Галуа, но уже для трехлистных накрытий это не верно. Пусть $t_0\colon C_0 \to C$ — произвольное трехлистное накрытие. Соответствующее расширение полей рациональных функций является кубическим, и можно считать, что $R(C_0) = R(C)(x)$, где x — корень уравнения $f(X) = X^3 + aX + b = 0$ с $a, b \in R(C)$. Если дискриминант $\Delta = -4a^3 - 27b^2$ равен квадрату элемента из $R(C)$, то $R(C_0)/R(C)$ является расширением Галуа с группой Галуа $G(R(C_0)/R(C)) = G(C_0/C)$, изоморфной циклической группе $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ [1]. Очевидно, что в этом случае у трехлистного накрытия все точки ветвления индекса три, и обозначая их число через w, по формуле Гурвица получим

$$g(C_0) = w - 2 + 3g(C).$$

Если $\Delta \notin [R(C)]^2$, то $R(C_0)/R(C)$ не является расширением Галуа, ибо не нормально. Поле разложения F многочлена $f(X)$ на линейные множители имеет степень 6 относительно $R(C)$ и $G(F/R(C))$ изоморфно симметрической группе S_3. Неособая модель $\bar{C}_{\text{н}}$ поля F шестилистно накрывает C, причем существует коммутативная башня кривых и накрытий

$$\begin{tikzcd}
& \bar{C}_{\text{н}} \arrow[dl, "\nu_0"'] \arrow[d, "t"] \arrow[dr, "\nu_1"] \arrow[drr, "\nu_2"] & & \\
C_0 \arrow[dr, "t_0"'] & X \arrow[d, "\nu"] & C_1 \arrow[dl, "t_1"] & C_2 \arrow[dll, "t_2"] \\
& C & &
\end{tikzcd} \qquad (2.1)$$

Предложение 2.1. *Шестилистное накрытие $\pi\colon \bar{C}_{\text{н}} \to C$ допускает башню* 2.1 *с различными двулистными накрытиями ν_0, ν_1, ν_2 и трехлистным накрытием t тогда и только тогда, когда оно является накрытием Галуа с группой Галуа*

$$G(\bar{C}_{\text{н}}/C) \simeq S_3. \quad \textit{При этом} \quad \bar{C}_{\text{н}} = C_k \times_C X \ (k = 0, 1, 2).$$

Доказательство очевидно.

Обозначим через j элемент третьего порядка группы $G(\bar{C}_{\text{н}}/C)$.

Предложение 2.2. *Существуют бирегулярные изоморфизмы $\varphi_{kl}\colon C_k \to C_l$ $(k, l = 0, 1, 2;\ k < l)$, вписывающиеся в коммутативные башни*

$$\begin{tikzcd}
\check{C}_n \arrow[rr, "j^{l-k}"] \arrow[d, "\nu_k"'] & & \check{C}_n \arrow[d, "\nu_l"] \\
C_k \arrow[rr, "\vartheta_{kl}"] \arrow[dr, "t_k"'] & & C_l \arrow[dl, "t_l"] \\
& C &
\end{tikzcd}$$

Доказательство получается специализацией предложения 1.1.

Предложение 2.3. *В башне 2.1 накрытия t_0, t_1, t_2 разветвлены над одним и тем же дивизором $W = W_2 + W_3$, причем над точками W_m имеют ветвления индекса m, двулистные накрытия ν, ν_0, ν_1, ν_2 разветвлены над дивизорами* $W_\nu = W_2$, $W_{\nu_k} = t_k^*(W_2)$ mod. 2 $(k = 0, 1, 2)$, *а трехлистное накрытие t имеет только ветвления индекса три над дивизором* $\nu^*(W_3)$.

Доказательство. Достаточно заметить, что сквозное шестилистное накрытие может иметь только ветвления индексов два и три.

Следствие 1. Тригональное накрытие $C_3 \to P^1$ нормально тогда и только тогда, когда все ее точки ветвления индекса три.

Действительно, если тригональное накрытие с ветвлениями индекса три не нормально, то, нормализуя его, получим башню (2.1) с распадающимся накрытием ν. Обратное утверждение было доказано.

Следствие 2. В башне (2.1) трехлистные накрытия t_k $(k = 0, 1, 2)$ не нормальны, причем башня, возникающая при нормализации любой из них, совпадает с башней (2.1).

Предложение 2.4. *Накрытия ν_k, t_k $(k = 0, 1, 2)$ и автоморфизм третьего порядка $j \in G(\check{C}_k/C)$ связаны соотношением*

$$\nu_{k*} \circ j \circ \nu_k^* = t_k^* \circ t_{k*} - id.$$

Проверяется непосредственно.

§ 3. Восьмилистные накрытия группы квадрата

Ключевую роль в получении основных результатов настоящей статьи будет играть конструируемая в § 4 „многоэтажная“ башня

(4.1). В предыдущем параграфе мы отдельно исследовали нижний блок этой башни. Настоящий параграф посвящен изучению трех однотипных верхних блоков этой башни. Впервые башни такого типа появились при доказательстве совпадения примианов разветвленных двулистных накрытий гиперэллиптических кривых с якобианами [8].

Группа Галуа восьмилистного накрытия Галуа имеет порядок 8. Неабелевых групп восьмого порядка всего две: группа единиц тела кватернионов и группа Q движений плоскости, переводящих фиксированный квадрат в себя. Эта группа изоморфна сопряженным между собой подгруппам восьмого порядка симметрической группы S_4 и называется группой квадрата.

Определение. Композиция двулистных накрытий $\tilde{\tilde{C}} \xrightarrow{\tilde{\pi}} \tilde{C} \xrightarrow{\pi} C$ назовем диаграммизуемой, если сквозное четырехлистное накрытие является накрытием Галуа с группой Галуа $G(\tilde{\tilde{C}}/C) \simeq Z/2Z \times Z/2Z$. Теоремы 1 и 2 [8] дают некоторые необходимые и достаточные условия диаграммизуемости.

Предложение 3.1. *Восьмилистное накрытие* $\pi: \tilde{\tilde{C}} \to C$ *допускает разложение в башню* (3.1) *из двулистных накрытий с недиаграммизуемой композицией* $\pi_0 \circ \tilde{\pi}_0$ *тогда и только тогда, когда* π *является накрытием Галуа с группой Галуа* G_π, *изоморфной группе квадрата* Q.

$$
\begin{tikzcd}
 & & \tilde{\tilde{C}} \arrow[dll, "\tilde{\tilde{\pi}}_1'"'] \arrow[dl, "\tilde{\tilde{\pi}}_2'"] \arrow[d, "\tilde{\tilde{\pi}}_0"] \arrow[dr, "\tilde{\tilde{\pi}}_1''"'] \arrow[drr, "\tilde{\tilde{\pi}}_2''"] & & \\
\tilde{C}_1' \arrow[dr, "\pi_1'"'] & \tilde{C}_2' \arrow[d, "\pi_2'"] & \tilde{C}_0 \arrow[dl, "\pi_0'"] \arrow[d, "\pi_0"] \arrow[dr, "\pi_0''"'] & \tilde{C}_1'' \arrow[d, "\pi_1''"] & \tilde{C}_2'' \arrow[dl, "\pi_2''"] \\
 & \tilde{C}' \arrow[dr, "\pi'"'] & \tilde{C} \arrow[d, "\pi"] & \tilde{C}'' \arrow[dl, "\pi''"] & \\
 & & C & &
\end{tikzcd}
\qquad (3.1)
$$

Доказательство. Из существования башни (3.2) следует, что группа $\mathrm{Aut}_{R(C)}\, R(\dot{C})\, R(C)$ — автоморфизмов поля $R(\tilde{C})$ заведомо содержит инволюции $i_{\tilde{\pi}_1}$, $i_{\tilde{\pi}_2}$, $i_{\tilde{\pi}_0}$, $i_{\tilde{\pi}_1}$, $i_{\tilde{\pi}_1}$ и значит порядок ее, который должен делить степень расширения $[R(\dot{C}) : R(C)] = 8$, равен восьми, т. е. π является накрытием Галуа.

Подгруппа $G(\dot{C}/\tilde{C})$ группы $G(\dot{C}/C)$ отлична от $Z/2Z \times Z/2Z$, следовательно, циклическая. Группа $G(\dot{C}/C)$ порождается образующей j этой циклической группы и, скажем, инволюцией $i_{\tilde{\pi}} = i$, причем если бы $ij = ji$, то $1 = (ij)^2 = j^2$, поэтому $ij = j^3 i$. Значит G изоморфна группе квадрата. Обратное утверждение теоремы получается факторизацией $\dot{C}$ по действию подгрупп группы G_{π}.

В статье [8] башня (3.1) получается следующим построением. Рассматриваются двулистные накрытия π_1 и π'. Строится накрытие $\pi_2 = i_{\pi'} \circ \pi_1$ и расслоенное произведение $\dot{C} = \tilde{C}_1 \times_{\tilde{C}} \tilde{C}_2$ с каноническими накрытиями $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_2$. Устанавливается, что на $\dot{C}$ кроме $i_{\tilde{\pi}_1}$, $i_{\tilde{\pi}_2}$ есть еще ровно три инволюции, факторизуя по действию которых получаем накрытия $\tilde{\pi}_0$, $\tilde{\pi}_1$, $\tilde{\pi}_2$ и $\dot{\pi}_0$, $\dot{\pi}_1$, $\dot{\pi}_2$. Остальные накрытия существуют из условия диаграммизуемости ([8], теорема 1).

Мы покажем, что приведенная конструкция универсальна, т. е. любая башня (3.1) может быть получена таким построением.

Предложение 3.2. *Между кривыми $\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2$ башни (3.1) существует бирегулярный изоморфизм $\gamma: \tilde{C}_1 \to \tilde{C}_2$, вписывающийся в коммутативный квадрат*

$$\begin{tikzcd} \tilde{C}_1 \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\pi'_1"'] & \tilde{C}_2 \arrow[d, "\pi'_2"] \\ C' \arrow[r, dash, "i_{\pi'}"] & C' \end{tikzcd}$$

Доказательство следует из предложения 1.1.

Следствие. Приведенная выше конструкция башни (3.1) универсальна.

Достаточно отождествить $\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2$ с помощью изоморфизма γ.

Заметим, что из соображений симметрии утверждение предложения 3.2 справедливо и для кривых $\dot{C}_1$ и $\dot{C}_2$, поэтому конструировать башню (3.1) можно, исходя и из композиции $\pi'' \circ \pi_1$. Это так называемое свойство обратимости (конструкции) башни (3.1).

Предложение 3.3. *Характеристики накрытий π_1', π' и π'' связаны соотношениями*

$$W_{\pi''} = \pi_*(W_{\pi_1'} - W_0), \quad U_{\pi''} = (\pi'')^{-1}(U_{\pi_1'} + i_{\pi'} U_{\pi_1'} - W_0),$$

$W_0 = (W_{\pi_1'}, i_{\pi'} W_{\pi_1'}) - ((W_{\pi_1'}, i_{\pi'} W_{\pi'}), W_{\pi''})$, *где* $W_{\pi'}$ — *дивизор ветвления* π', $W_{\pi_1'}$ — *дивизор, над которым разветвлено* π_1', $U_{\pi_1'}$ — *половинка* $W_{\pi_1'}$, *соответствующая* π_1', $(W_{\pi''}, U_{\pi''})$ — *характеристика* π''.

§ 4. Накрытия Галуа с группой S_4

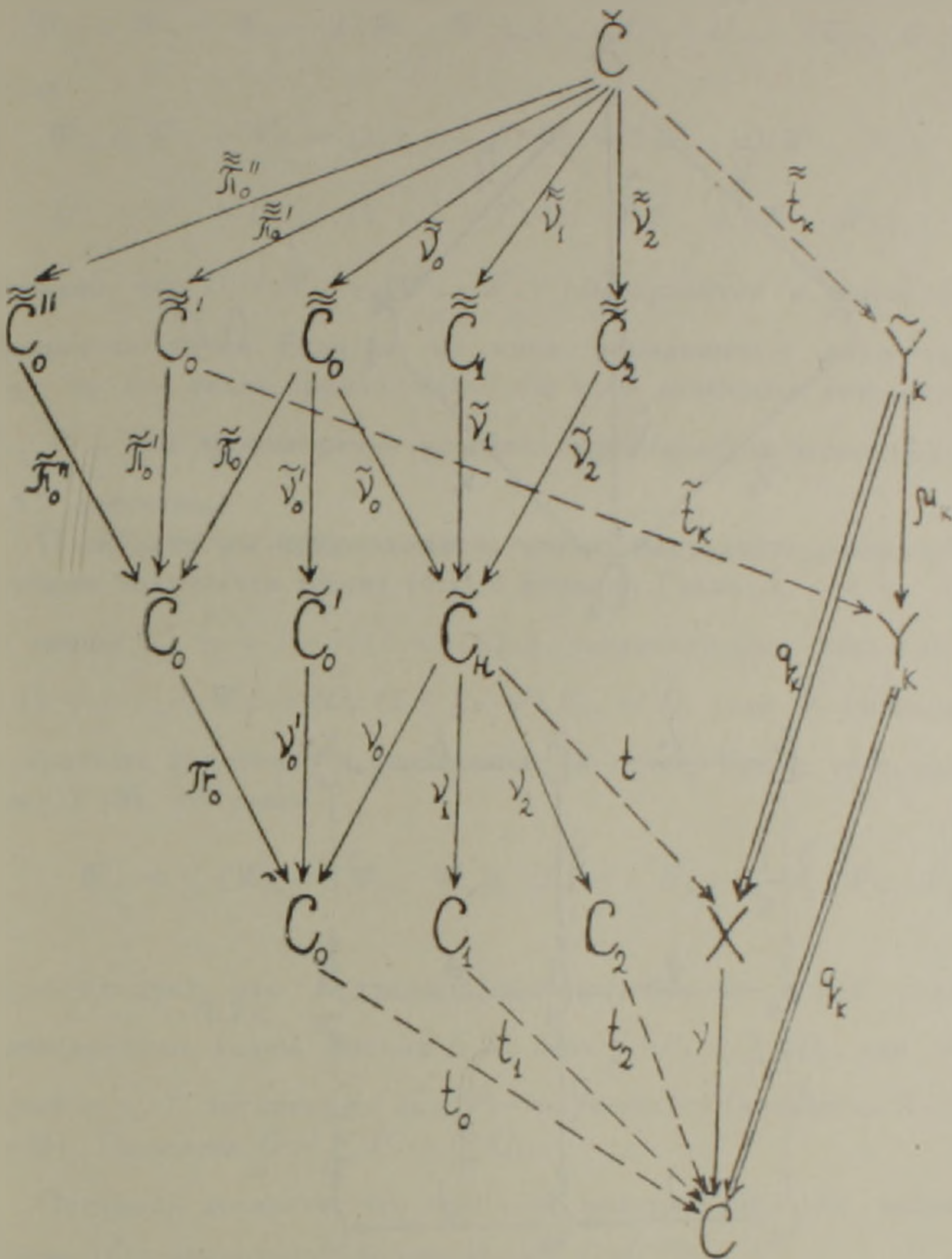
В этом параграфе мы построим и изучим башни двадцатичетырехлистных накрытий Галуа с группой Галуа, изоморфной симметрической группе S_4.

Основная конструкция. Пусть $t_0: C_0 \to C$ — не нормальное трехлистное накрытие, $\bar{\pi}_0: \bar{C}_0 \to C_0$ — двулистное накрытие. Нормализуя t_0 согласно § 2, получим башню (2.1). Построим расслоенное произведение $\tilde{C}_0 = \bar{C}_0 \times_{C_1} \tilde{C}_{11}$ с канонической проекцией $\tilde{\nu}_0: \tilde{C}_0 \to \tilde{C}_{11}$, отображение $\tilde{\nu}_1 = j \circ \tilde{\nu}_0: \tilde{C}_1 = \tilde{C}_0 \to \tilde{C}_{11}$, где j — элемент третьего порядка группы $G(\tilde{C}_{11}/C)$, и кривую $\dot{C} = \tilde{C}_0 \times_{\tilde{C}_{11}} \tilde{C}_1$ с каноническими проекциями $\tilde{\nu}_0$ и $\tilde{\nu}_1$.

Предложение 4.1. *Сквозное отображение $\pi: \dot{C} \to C$, получающееся в результате основной конструкции, является накрытием Галуа с группой Галуа $G \simeq S_4$ тогда и только тогда, когда выполняется условие (D): существует дивизор D без кратных компонент такой, что $t_{0*} W_{\bar{\pi}_0} = 2D$, $t_{0*} U_{\bar{\pi}_0} = D$. Любое накрытие Галуа с группой Галуа S_4 может быть получено с помощью основной конструкции.*

Доказательство. Предположим сначала, что $G_\pi = S_4$. Факторизуя $\dot{C}$ по действию подгрупп группы S_4, получим башню (4.1), где сплошные стрелки обозначают двулистные, пунктирные — трехлистные, двойные — четырехлистные накрытия. Чтобы не перегрузить рисунок, мы чертим только один из трех блоков типа (3.1) и накрытие $\tilde{t}_k$ $(k = 0, 1, 2, 3)$, ассоциированное с одним из четырех сопряженных друг другу подгрупп третьего порядка группы S_4.

Из предположения $G_\pi = S_4$ следует, что $G(\dot{C}/\bar{C}_{11}) \simeq Z/2Z \times Z/2Z$ является нормальным делителем в G_π. Значит $\tilde{C}_{11} \to C$ будет накрытием Галуа с группой Галуа $G(\bar{C}_{11}/C) \simeq S_3$ и следовательно, согласно § 2 будет нормализацией накрытия $t_0: C_0 \to C$.



(4.1)

Лемма 4.1. *Если кривая $\dot{C}$ башни из двулистных накрытий (4.2)* * *имеет такой автоморфизм j_k третьего порядка, что $i_{\nu_0}=j_k^2$, $i_{\nu_1}=j_k=j_k\, i_{\nu_2}\, j_k^2$, то существуют автоморфизм $j \in G(\check{C}/C)$ третьего порядка и изоморфизмы $\partial_r : \dot{C}_r \to \dot{C}_s$ $(r<s)$, вписывающиеся в коммутативную диаграмму* (4.3) (см. стр. 58).

Доказательство получается специализацией предложения 1.1.

Из леммы 4.1 следует универсальность основной конструкции.

Проверим выполнение условия (D).

---

* См. стр. 58.

$$\begin{tikzcd}
 & \check{C} \arrow[dl, "\tilde{\tilde{\nu}}_0"'] \arrow[d, "\tilde{\tilde{\nu}}_1"] \arrow[dr, "\tilde{\tilde{\nu}}_2"] & \\
\tilde{\tilde{C}}_0 \arrow[dr, "\tilde{\nu}_0"'] & \tilde{\tilde{C}}_1 \arrow[d, "\tilde{\nu}_1"] & \tilde{\tilde{C}}_2 \arrow[dl, "\tilde{\nu}_2"] \\
 & \tilde{C}_{\text{н}} &
\end{tikzcd} \tag{4.2}$$

$$\begin{tikzcd}
\check{C} \arrow[r, "j_{\kappa}"] \arrow[d, "\tilde{\tilde{\nu}}_0"'] & \check{C} \arrow[r, "j_{\kappa}"] \arrow[d, "\tilde{\tilde{\nu}}_1"'] & \check{C} \arrow[d, "\tilde{\tilde{\nu}}_2"'] \\
\tilde{\tilde{C}}_0 \arrow[r, "\vartheta_{01}"] \arrow[d, "\tilde{\nu}_0"'] & \tilde{\tilde{C}}_1 \arrow[r, "\vartheta_{12}"] \arrow[d, "\tilde{\nu}_1"'] & \tilde{\tilde{C}}_2 \arrow[d, "\tilde{\nu}_2"'] \\
\tilde{C}_{\text{н}} \arrow[r, "j"] & \tilde{C}_{\text{н}} \arrow[r, "j"] & \tilde{C}_{\text{н}}
\end{tikzcd} \tag{4.3}$$

Лемма 4.2. *Если $\tilde{C}_{\text{н}}$ — кривая с автоморфизмом j третьего порядка, то для существования коммутативной башни* (4.2) *с* $\tilde{\nu}_l = j^l \circ \tilde{\nu}_0$ $(l = 1, 2)$ *необходимо и достаточно, чтобы характеристика* $(W_{\tilde{\nu}_0}, U_{\tilde{\nu}_0})$ *накрытия* $\tilde{\nu}_0$ *удовлетворяла условию* $(\tilde{D})$: $(1+j+j^2)\, W_{\tilde{\nu}_0} = 2\tilde{D}$, $(1+j+j^2)\, U_{\tilde{\nu}_0} = \tilde{D}$, *где* $\tilde{D}$ — *j-инвариантный дивизор без j-неподвижных точек и кратных компонент.*

В самом деле, согласно лемме 1 [8] характеристики башни (4.2) должны удовлетворять соотношениям

$$W_{\tilde\nu_0} = W_{\bar\nu_1} + W_{\tilde\nu_2} - 2(W_{\bar\nu_1}, W_{\tilde\nu_2}),\quad U_{\tilde\nu_0} \equiv U_{\bar\nu_1} + U_{\tilde\nu_2} - (W_{\bar\nu_1}, W_{\tilde\nu_2}),$$

откуда

$$W_{\bar\nu_0} + W_{\bar\nu_1} + W_{\tilde\nu_2} = (1 + j + j^2)\, W_{\bar\nu_0} = 2\, W_{\tilde\nu_0} + 2(W_{\bar\nu_1}, W_{\tilde\nu_2}),$$

$$U_{\tilde\nu_0} + U_{\tilde\nu_1} + U_{\tilde\nu_2} \equiv (1 + j + j^2)\, U_{\bar\nu_r} \equiv W_{\bar\nu_0} + (W_{\bar\nu_1}, W_{\tilde\nu_2}).$$

Очевидно, что $D = W_{\tilde\nu_0} + (W_{\bar\nu_1}, W_{\tilde\nu_2})$ j-инвариантен и имеет только однократные точки. Если бы он имел неподвижную относительно j точку, то эта точка принадлежала бы всем дивизорам ветвления $W_{\bar\nu_0}$, $W_{\tilde\nu_1}$, $W_{\bar\nu_2}$, что противоречит условию существования башни (4.2). Лемма 4.2 доказана.

Поскольку мы предположили, что в результате основной конструкции получается башня (4.1) с группой Галуа S_4, то на основании леммы 4.1 $\bar\nu_l = j^l \circ \nu_0$ $(l = 1, 2)$ и, следовательно, согласно лемме 4.2 $(1 + j + j^2)\, W_{\bar\nu_1} = 2\tilde D$, $(1 + j + j^2)\, U_{\tilde\nu_0} \equiv \tilde D$, где $\tilde D$ j-инвариантен без кратных компонент и j-неподвижных точек. Кроме того, применяя лемму 2 [8], получаем

$$W_{\bar\nu_0} = \nu_0^*\,(W_{\varepsilon_0} - (W_{\varepsilon_0}, W_{\nu_0})),\quad U_{\tilde\nu_0} \equiv \nu_0^*\, U_{\varepsilon_0} - \frac{1}{2}\, \nu_0^*\,(W_{\varepsilon_0}, W_{\nu_0}),$$

откуда следует, что $\tilde D$ также i_{ν_0}-инвариантен, но может содержать i_{ν_0}-неподвижные точки. Значит $t_{0*}\nu_{0*}\tilde D = \sum\limits_R 6P_r + \sum\limits_S 3Q_s$, где над Q_s накрытия ν_0, t_0 ветвятся, а над P_r — не ветвятся (возможно $R = \varnothing$ или $S = \varnothing$). Положим $D = \sum\limits_R P_r + \sum\limits_S Q_s$.

Осталось доказать, что основная конструкция при выполнении условия (D) приводит к башне (4.1) с $G(\check C/C) \simeq S_4$.

Так как композиции $\bar\nu_0 \circ \nu_0 = \bar\nu_1 \circ \nu_1$ диаграммизуемы, то их можно вложить в башню (4.2) ([8], теорема 1). При этом, используя лемму 2 [8], из условия (D) можно вывести условие $(\tilde D)$ и значит на основании леммы 4.2 $\bar\nu_l = j^l \circ \nu_0$.

Лемма 4.3. *Если кривая $\bar C_{\rm H}$ коммутативной башни* (4.2) *имеет автоморфизм третьего порядка j и $\bar\nu_0 = j^2 \circ \bar\nu_1 = j \circ \bar\nu_2$, то на $\bar C_0 = \bar C_1 = \bar C_2$ существует сохраняющееся при циклических перестановках тернарное отношение, которое индуцирует автоморфизм третьего порядка на $\check C$.*

Доказательство. Определим тернарное отношение условиями:

$$(x_0,\ x_1,\ x_2) \rightleftarrows \bar{\nu}_0\, x_0 = \bar{\nu}_1\, x_1 = \bar{\nu}_2\, x_2,\quad x_2 = \tilde{\nu}_2\,((x_0,\ x_1)),$$

где $(x_0,\ x_1)$ — точка расслоенного произведения $\check{C} = \tilde{C}_0 \times_{\tilde{C}_*} \tilde{C}_1$. Непосредственно проверяется, что $(x_1,\ x_2,\ x_0)$ и $(x_2,\ x_0,\ x_1)$ также образуют тернарное отношение. Чтобы определить автоморфизм j_0 на $\dot{C}$ представим ее в виде расслоенного произведения $\bar{C}_0 \times_{\bar{C}_{ii}} \bar{C}_1$ и положим $j_0(x_0,\ x_1) = (x_1,\ x_2)$.

Применяя лемму 4.3 к нашей ситуации, получаем на $\dot{C}$ кроме построенного автоморфизма j_0 еще три $j_{k+1} = i_{\tilde{\nu}_k}\, j_0\, i_{\tilde{\nu}_k}$ $(k=0,\ 1,\ 2)$, а всего вместе с обратными восемь автоморфизмов третьего порядка.

Лемма 4.4. *В блоке* (4.2) *башни* (4.1) *характеристики накрытий* $\bar{\nu}_1,\ \tilde{\nu}_2$ i_{ν_0}-*инволютивны, т. е.* $W_{\tilde{\nu}_2} = i_{\nu_0} W_{\bar{\nu}_1}$, $U_{\tilde{\nu}_2} = i_{\nu_0} U_{\bar{\nu}_1}$.

Аналогичные утверждения справедливы для других пар накрытий $\tilde{\nu}_0,\ \bar{\nu}_1,\ \tilde{\nu}_2$.

Действительно, $(W_{\tilde{\nu}_2},\ U_{\tilde{\nu}_2}) = j\,(W_{\nu_0},\ U_{\nu_0}) = j\, i_{\nu_0}\,(W_{\nu_0},\ U_{\nu_0}) =$
$= i_{\nu_0}\, j^2\,(W_{\nu_0},\ U_{\nu_0}) = i_{\nu_0}\,(W_{\bar{\nu}_1},\ U_{\bar{\nu}_1})$.

Из леммы 4.3 следует, что применима универсальная конструкция § 3, и восьмилистные накрытия $\nu_l \circ \bar{\nu}_l \circ \tilde{\nu}_l$: $\check{C} \to C$ $(l = 0,\ 1,\ 2)$ вкладываются в башни типа (3.1), причем с использованием предложений 3.3 и 2.4 доказывается, что кривая $\check{C}/\{1,\ i_{\nu_0},\ i_{\bar{\nu}_1},\ i_{\tilde{\nu}_1}\}$ совпадает с $\tilde{C}_0$ при выполнении условия (D). Нетрудно проверить, что три полученные башни типа (3.1) изоморфны между собой. На основании предложения 3.1 кривая $\check{C}$ имеет девять инволюций и шесть автоморфизмов четвертого порядка. Значит сквозное отображение τ: $\check{C} \to C$ имеет 24 автоморфизма и, следовательно, является накрытием Галуа. Точно так же, как это делается в предложении 5.1, можно показать, что инволюции i_{ν_0} и i_{ν_1} вместе с любым автоморфизмом третьего порядка порождают знакопеременную группу $A_4 \subset S_4$. Инволюции $i_{\nu_0},\ i_{\nu_1},\ i_{\tau_0}$ порождают группу квадрата (§ 3). Отсюда получается, что $G \cong S_4$. Предложение 4.1 доказано.

Таким образом, башня (4.1) вполне определяется не нормальным трехлистным накрытием t_0: $C_0 \to C$ и двулистным накрытием τ_0: $\tilde{C}_0 \to C_0$, удовлетворяющим условию (D). Поэтому, исходя из характеристик этих двух накрытий, можно определить все характеристики башни (4.1). Нам понадобится частичный результат.

Предложение 4.2. *В башне* (4.1) *накрытия* $\pi_l: \bar{C}_l \to C_l$ ($l = 0, 1, 2$) *изоморфны между собой и накрытия* $q_k: Y_k \to C$ ($k = 0, 1, 2, 3$) *изоморфны между собой, причем роды этих кривых связаны соотношением* $g(Y_k) - g(C) = g(\bar{C}_l) - g(C_l)$.

Доказательство. Существование изоморфизмов устанавливается из общего предложения 1.1. Соотношение на роды вытекает из следующей леммы.

Лемма 4.5. *Пусть x — точка кривой C. Тогда*

(i) *если t_l и π_l не разветвлены над x, то все накрытия башни* (4.1) *не разветвлены над ней;*

(ii) *если t_l над x имеет ветвление индекса три, то π_l над x не разветвлено, а q_k имеет ветвление индекса три;*

(iii) *если t_l над x имеет ветвление индекса два, а π_l над x не разветвлено, то q_k над x имеет одно ветвление индекса два;*

(iV) *если π_l над x разветвлено, а t_l — не разветвлено, то π_l и q_k над x имеют ровно два ветвления индекса два;*

(V) *если и π_l, и t_l над x разветвлены, то t_l над x имеет одно ветвление индекса два, следовательно, два прообраза. π_l разветвлено над ними обоими, а q_k над x имеет ветвление индекса 4.*

Обозначим число точек x типа (ii), (iii), (iV), (V) соответственно через w'', w''', w^{IV}, w^{V}. Применив формулу Гурвица к лемме 4.5, получим

$$g(Y_k) = 4g(C) - 3 + w'' + \frac{1}{2}w''' + w^{IV} + \frac{3}{2}w^{V},$$

$$g(C_l) = 3g(C) - 2 + w'' + \frac{1}{2}w'' + \frac{1}{2}w^{V}, \quad g(\bar{C}_l) = 6g(C) - 5 + 2w'' + w''' + w^{IV} + 2w^{V},$$

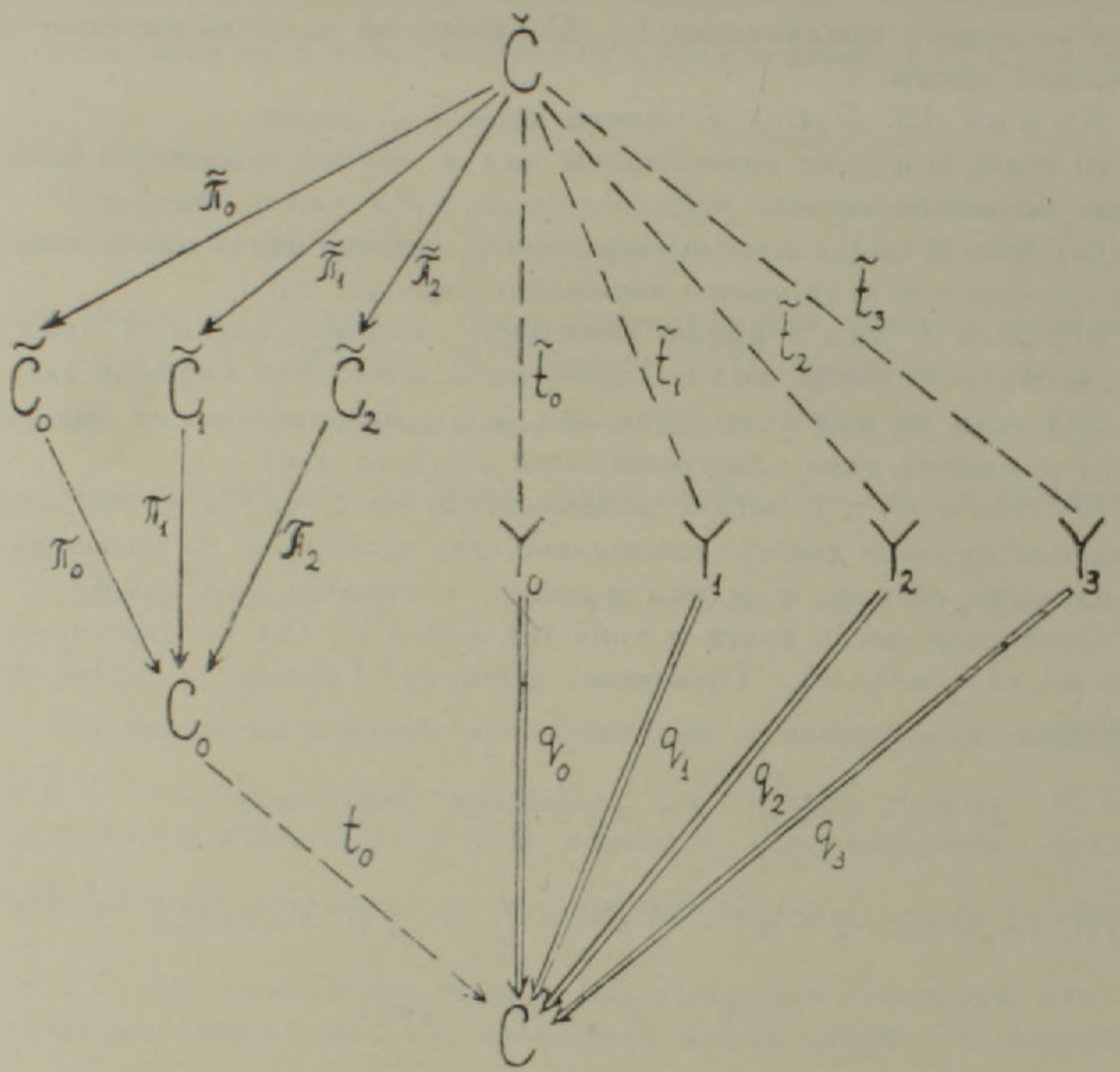
$$g(\bar{C}_l) - g(C_l) = 3g(C) - 3 + w'' + \frac{1}{2}w''' + \frac{3}{2}w^{V} = g(Y_k) - g(C).$$

Замечание 1. Из леммы 4.5 следует, что при неразветвленном накрытии π_0 ряд g^1_4, индуцированный накрытием $q_k: Y_k \to C = P^1$, не содержит элементов вида $4P$ и $2P + 2Q$.

Замечание 2. Башня (4.1) обладает свойством обратимости конструкции в следующем смысле. Все сопряженные накрытия q_k башни (4.1) не нормальны, причем их нормализацией является 24-листное накрытие $\pi: \check{C} \to C$. Следовательно, башню (4.1) можно конструировать, исходя из накрытия q_k. Для этого надо взять его нормализацию π и башню Галуа накрытия π.

§ 5. Нормальный случай

Исследуем случай, когда трехлистное накрытие $t_0\colon C_0 \to C$ нормально, следовательно, является накрытием Галуа. Тогда группа Галуа G_t изоморфна $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$, и через j мы обозначим ее образующую. Как и прежде, $\pi_0\colon \tilde{C}_0 \to C_0$ — двулистное накрытие. Нас интересует вопрос, когда композицию $t_0 \circ \pi_0$ можно вписать в коммутативную башню



(5.1)

Здесь как и в башне (4.1), двойные стрелки обозначают четырехлистные, пунктирные — трехлистные, сплошные — двулистные накрытия.

Предложение 5.1. *Двенадцатилистное накрытие* $\pi\colon \check{C} \to C$ *допускает разложение в башню* (5.1) *тогда и только тогда когда является накрытием Галуа с группой Галуа, изоморфной знакопеременной группе* $A_4 \subset S_4$. *При этом* $\check{C} = C_0 \times_C Y_k$ $(k = 0, 1, 2, 3)$.

Доказательство. Отображение $\pi\colon \check{C} \to C$ башни (5.1) имеет три инволюции и восемь автоморфизмов третьего порядка, следовательно, является накрытием Галуа. Инволюции $i_{\tilde{\pi}_0}$, $i_{\tilde{\pi}_1}$, $i_{\tilde{\pi}_2}$ вместе с произвольным автоморфизмом j_k третьего порядка порождают группу G_{π}. Если бы j_k был перестановочен с какой-либо инволюцией, то G_{π} была бы циклической группой. Значит можно предположить, что $i_{\pi_k} = j_k i_{\pi_k} j_k^2 = j_k^2 i_{\pi_k} j_k$. Получено описание группы A_4 с помощью образующих и определяющих соотношений.

Предложение 5.2. *Композиция $t_0 \circ \pi_0$ вписывается в коммутативную башню* (5.1) *тогда и только тогда, когда характеристика* (W_{π_0}, U_{π_0}) *накрытия π_0 удовлетворяет условию* (D)*: существует дивизор D такой, что $t_{0*} W_{\pi_0} = 2D$, $t_{0*} U_{\pi_0} = D$.*

Доказательство. Необходимость условия (D) получается из леммы 4.2. Обратно, при условии (D) строится блок типа (4.2) башни (5.1) с $\pi_l = j^l \circ \pi_0$ ($l = 1, 2$). Тогда на основании леммы 4.3 на $\check{C}$ существуют четыре пары автоморфизмов третьего порядка, факторизуя по действию которых получаем кривые Y_k ($k = 0, 1, 2, 3$). Накрытия q_k корректно определяются условием коммутативности башни (5.1).

Если композиция $t_0 \circ \pi_0$ удовлетворяет условию (D), то башню (5.1) можно получить, взяв $\check{C} = \bar{C}_0 \times_{C_0} \bar{C}_1$, где $\pi_1 \colon \bar{C}_1 \to C_0$ определяется как $j \circ \pi_0$. Из леммы 4.1 и предложения 5.2 следует, что любая башня (5.1) может быть получена таким путем.

Предложение 5.3. *В башне* (5.1) *накрытия $q_k \colon Y_k \to C$ изоморфны между собой, а накрытия $\pi_l \colon \bar{C}_l \to C_0$ — между собой, причем $g(Y_k) - g(C) = g(\bar{C}_l) - g(C_0)$.*

Доказательство. Изоморфизмы накрытий получаются специализацией предложения 1.1. Соотношение на роды выводится из леммы 5.1.

Лемма 5.1. *Пусть x — точка кривой C башни* (5.1). *Тогда*

(i) *если t_0 и π_0 не разветвлены над x, то все накрытия башни* (5.1) *не разветвлены над ней;*

(ii) *если t_0 над x имеет ветвление индекса три, то π_l над x не разветвлено, а q_k имеет ветвление индекса три;*

(iii) *если π_l над x разветвлено, то t_0 над x не разветвлено, а π_l и q_k имеют ровно два ветвления индекса два.*

Отметим, что замечания 1 и 2 § 4 остаются в силе и сейчас, с той лишь разницей, что нормализацией четырехлистных накрытий $q_k \colon Y_k \to C$ в этом случае будет 12-листное накрытие $\pi \colon \check{C} \to C$.

ЧАСТЬ II. МНОГООБРАЗИЯ ПРИМА

§ 6. О функториальности соответствия Прима

Каждому конечнолистному накрытию кривых $\pi \colon \tilde{C} \to C$ соответствует ассоциированный гомоморфизм якобиевых многообразий, так называемое норменное отображение. Неприводимая компонента нуля этого гомоморфизма называется многообразием Прима или просто примианом накрытия π: $P_\pi = \ker^0 J_*(\pi)$. Изучим вопрос: является ли соответствие Прима функтором из категории конечнолистных накрытий кривых в категорию абелевых многообразий (см. § 1).

Соответствие Якоби J: $C \to J(C)$ индуцирует два функтора из категории кривых в категорию абелевых многообразий:

(i) ковариантный функтор прямого образа, сопоставляющий накрытию кривых α: $C \to C'$ норменное отображение $J_*(\alpha)$: $J(C) \to J(C')$;

(ii) контравариантный функтор обратного образа $J^*(\alpha)$: $J(C') \to J(C)$. Диаграмма (1.1) индуцирует диаграммы

$$\begin{array}{ccc} J(\tilde{C}) & \xrightarrow{J_*(\tilde{\alpha})} & J(\tilde{C}') \\ {\scriptstyle J_*(\pi)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle J_*(\pi')} \\ J(C) & \xrightarrow{J_*(\alpha)} & J(C') \end{array} \quad (6.1) \qquad \begin{array}{ccc} J(\tilde{C}) & \xrightarrow{J^*(\tilde{\alpha})} & J(\tilde{C}') \\ {\scriptstyle J_*(\pi)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle J_*(\pi')} \\ J(C) & \xleftarrow{J^*(\alpha)} & J(C') \end{array} \quad (6.2)$$

Из функториальности J_* следует, что диаграмма (6.1) коммутативна. Поэтому $J_*(\tilde{\alpha}) P_\pi \subset P_{\pi'}$ и, доопределив $P_*(\tilde{\alpha}, \alpha) = J_*(\tilde{\alpha})|_{P_\pi}$, получаем ковариантный функтор.

Во втором случае вопрос решается с помощью расслоенного произведения. Пусть сначала $\tilde{C}$ в диаграмме (1.1) является расслоенным произведением $C \times_{C'} \tilde{C}'$. Тогда, как нетрудно проверить, диаграмма (6.2) коммутативна. Поэтому $J^*(\tilde{\alpha}) P_{\pi'} \subset P_\pi$.

Если $\tilde{C} \neq C \times_{C'} \tilde{C}'$, то диаграмму (1.1) можно дополнить до диаграммы (1.2) и $J^*(\tilde{\alpha}) P_{\pi'} = J^*(\tilde{\pi})(J^*(\tilde{\alpha}_0) P_{\pi'})$, причем $J^*(\tilde{\alpha}_0) P_{\pi'} \subset P_{\pi_0}$. Но тогда

$$J_*(\pi)(J^*(\tilde{\alpha}) P_{\pi'}) = J_*(\pi_0) J_*(\tilde{\pi}) J^*(\tilde{\pi}) J^*(\tilde{\alpha}_0) P_{\pi'} \subset \deg \tilde{\pi} \cdot J_*(\pi_0) P_{\pi_0} = 0.$$

Итак, соответствие Прима индуцирует два функтора из категории конечнолистных накрытий кривых в категорию абелевых многообразий:

(i) ковариантный $P_*(\tilde{\alpha}, \alpha) = J_*(\tilde{\alpha})|_{P_\pi}$;

контравариантный $P^*(\tilde{\alpha}, \alpha) = J^*(\tilde{\alpha})|_{P_{\pi'}}$.

Любая поляризация φ: $J \to \hat{J}$ якобиана накрывающей кривой индуцирует поляризацию на примиане условием коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, "\rho_J"] & \hat{J} \arrow[d, "\hat{\nu}"] \\ P \arrow[u, "\text{вложение } \nu"] \arrow[r, "\rho_P"] & \hat{P} \end{tikzcd}$$

Полученная поляризация примиана называется канонической. Канонические поляризации примианов двулистных накрытий изучены Мамфордом [3]. Сасаки обобщил его результаты на случай произвольных циклических накрытий [9]. Он показал, что хотя, вообще говоря, каноническая поляризация примиана циклического накрытия не является главной, существует изогенное примиану многообразие, ассоциированная поляризация которой главная. Построенная изогения превращается в изоморфизм для примианов:

(1) неразветвленных двулистных накрытий,
(2) разветвленных p-листных циклических накрытий с глобальным индексом ветвления $r = \sum (r_i - 1) = (p-2)(g-1) + 2$, где g — род накрываемой кривой.

В этих случаях говорят о главно поляризованном многообразии Прима. В частности, многообразия Прима двулистных накрытий главно поляризованы тогда и только тогда, когда накрытия разветвлены не более, чем в двух точках. Заметим, что главно поляризованное многообразие Прима произвольного конечнолистного накрытия $C \to \mathbf{P}^1$ совпадает с канонически поляризованным якобианом кривой C.

Как оказалось, действие функторов Прима не распространяется на канонически поляризованные многообразия Прима: канонические поляризации не соответствуют друг другу при морфизмах многообразий ([8], теорема 3).

§ 7. Многообразие Прима двулистного накрытия тригональной кривой

Здесь мы докажем основной результат об изогении многообразий Прима, превращающейся в некоторых интересных случаях в изоморфизм примиана с якобианом.

Согласно части I композицию $\tilde{C}_0 \xrightarrow{\tilde{\pi}_0} C_0 \xrightarrow{t_0} C$ двулистного накрытия π_0 и трехлистного накрытия t_0 можно вписать в башню (4.1), если t_0 не является накрытием Галуа, или в башню (5.1), если t_0 — нормальное накрытие.

Предложение 7.1. *Между многообразиями Прима P_{π_0} и P_{q_k} башни* (4.1) (*или* (5.1)) *существуют изогении $\alpha_k: P_{\pi_0} \to P_{q_k}$, $\hat{\alpha}_k: P_{q_k} \to P_{\pi_0}$ такие, что $\hat{\alpha}_k \circ \alpha_k = 2_{P_{\pi_0}}$, $\alpha_k^*(\rho_{q_k}) = 2\rho_{\pi_0}$.*

Доказательство проведем сначала для более простого нормального случая. Определим $\alpha_k = \tilde{t}_{k*} \circ \tilde{\pi}_0^*$ и $\hat{\alpha}_k = \tilde{\pi}_{0*} \circ \tilde{t}_k^*$. Ввиду функториальности соответствия Прима имеем $\alpha_k(P_{\pi_0}) \subset P_{q_k}$ и $\alpha'_k(P_{q_k}) \subset$ $\subset P_{\pi_0}$. Рассмотрим композицию

$$P_{\pi_0} \xrightarrow{\alpha_k} P_{q_k} \xrightarrow{\alpha'_k} P_{\pi_0}: \alpha'_k \circ \alpha_k = 2\, p_{\pi_0} + \tilde{\pi}_{0*}\, j_k\, \tilde{\pi}_0^* + \tilde{\pi}_{0*}\, j_k^2\, \tilde{\pi}_0^*,$$

причем $\tilde{\pi}_{0*}\, j_k^l\, \tilde{\pi}_0^* = \pi_0^* j^l \pi_{0*} = 0$ на многообразии Прима P_{π_0} $(l=1, 2)$. Так как к тому же многообразия Прима P_{π_0} и P_{q_k} неприводимы и одинаковой размерности (предложение 5.3), то α_k и α'_k изогении.

Проверим соотношение на поляризации. По определению

$$\alpha_k^*(\varphi_{q_k}) = \hat{\alpha}_k \circ \varphi_{q_k} \circ \alpha_k = \hat{\tilde{\pi}}_0^* \circ \hat{\tilde{t}}_{k*} \circ \hat{\nu}_{P_{q_k}} \circ \lambda_{\theta(Y_k)} \circ \nu_{P_{q_k}} \circ \tilde{t}_{k*} \circ \tilde{\pi}_0^*,$$

где $\nu_{P_{q_k}}$ означает естественное вложение P_{q_k} в $J(Y_k)$. Построим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
P_{\pi_0} \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\tilde{\pi}_0^*"] & J(\tilde{C}_0) \arrow[r, "\lambda_{2\theta(\tilde{C}_0)}"] \arrow[d, "\tilde{\pi}_0^*"] & \hat{J}(\tilde{C}_0) \arrow[r, "\nu"] & \hat{P}_{\pi_0} \\
P_{\tilde{\pi}_0} \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\tilde{t}_{k*}"] & J(\check{C}) \arrow[r, "\lambda_{\theta(\check{C})}(1+j_k+j_k^2)"] \arrow[d, "\tilde{t}_{k*}"] & \hat{J}(\check{C}) \arrow[r, "\nu"] \arrow[u, "\hat{\tilde{\pi}}_0^*"] & \hat{P}_{\tilde{\pi}_0} \arrow[u, "\hat{\tilde{\pi}}_0^*"] \\
P_{q_k} \arrow[r, "\nu"] & J(Y_k) \arrow[r, "\lambda_{\theta(Y_k)}"] & \hat{J}(Y_k) \arrow[r, "\nu"] \arrow[u, "\hat{\tilde{t}}_{k*}"] & \hat{P}_{q_k} \arrow[u, "\hat{\tilde{t}}_{k*}"]
\end{tikzcd}$$

Нужное соотношение на поляризации сразу следует из коммутативности этой диаграммы, причем коммутативность всех ее квадратов очевидна за исключением двух средних.

Для доказательства коммутативности нижнего среднего квадрата заметим, прежде всего, что гомоморфизмы прямого и обратного образов якобиевых многообразий $\tilde{t}_{k*}: J(\check{C}) \to J(Y_k)$, $\tilde{t}_k^*: J(Y_k) \to J(\check{C})$ дуальны друг к другу $\hat{\tilde{t}}_{k*} = \lambda_{\theta(\check{C})} \tilde{t}_k^* \lambda_{\theta(Y_k)}^{-1}$, $\check{\tilde{t}}_k^* = \lambda_{\theta(Y_k)} \tilde{t}_{k*} \lambda_{\theta(\check{C})}^{-1}$. Поэтому $(\tilde{t}_{k*})^* \lambda_{\theta(Y_k)} = \hat{\tilde{t}}_{k*} \lambda_{\theta(Y_k)} \tilde{t}_{k*} = \lambda_{\theta(\check{C})} \tilde{t}_k^* \tilde{t}_{k*} = \lambda_{\theta(\check{C})}(1 + j_k + j_k^2)$. Поскольку $\hat{\tilde{\pi}}_0^* \lambda_{\theta(\check{C})} \tilde{\pi}_0^* = \lambda_{2\theta(\tilde{C}_0)}$ ([3], [8]), то доказательство коммутативности верхнего среднего квадрата упирается в соотношение $\hat{\tilde{\pi}}_0^* \lambda_{\theta(\check{C})} j_k^l \tilde{\pi}_0^* = 0$ $(l=1, 2)$.

Рассмотрим гомоморфизм $J(\tilde{C}_0)\times J(\tilde{C}_1)\times J(\tilde{C}_2)\xrightarrow{\tilde{\pi}_0^*+\tilde{\pi}_1^*+\tilde{\pi}_2^*} J(\dot{C})$ и представим $\tilde{\pi}_l^*$ в виде композиции канонического вложения $J(\tilde{C}_l)$ в $J(\tilde{C}_0)\times J(\tilde{C}_1)\times J(\tilde{C}_2)$ и гомоморфизма $\tilde{\pi}_0^*+\tilde{\pi}_1^*+\tilde{\pi}_2^*$. Для любой точки $x\in J(\dot{C})$ имеем

$$\tilde{\pi}_0^* \lambda_{\theta(\check{C})}(x)=\tilde{\pi}_0^*\,\mathrm{cl}\,(T_x^*\theta(\check{C})-\theta(\check{C}))=\mathrm{cl}\,(T^*_{(\tilde{\pi}_0^*)^{-1}x}\,\tilde{\pi}_0^*\theta(\check{C})-\tilde{\pi}_0^*\theta(\dot{C})).$$

Так как $j_k^l\tilde{\pi}_0^*=\tilde{\pi}_{l-l}^*$ (лемма 4.1), то при $x\in j_k\tilde{\pi}_0 J(\tilde{C}_0)$ имеем $x\in\tilde{\pi}_{3-l}^* J(\tilde{C}_{3-l})$ и можно взять $(\tilde{\pi}_0^*)^{-1}x=0$. Отсюда $\hat{\tilde{\pi}}_0^*\lambda_{\theta(\check{C})}\tilde{\pi}_{3-l}^*=0$ $(l=1,2)$.

Перейдем к доказательству не нормального случая (башня 4.1)). Положим $\alpha_k=\mu_{k*}t_{k*}\tilde{\pi}_k^*\tilde{\pi}_0^*$ и $\bar{\alpha}_k=\tilde{\pi}_{0*}\tilde{\pi}_{0*}t_k^*\mu_k^*$. Опять из-за функториальности соответствия Прима $\alpha_k(P_{\tilde{\pi}_0})\subset P_{q_k}$, $\bar{\alpha}_k(P_{q_k})\subset P_{\tilde{\pi}_0}$. Вместе с α_k и $\bar{\alpha}_k$ удобно рассматривать $\alpha_k=t_{k*}\tilde{\pi}_0^*$ и $\bar{\alpha}_k=\tilde{\pi}_{0*}t_k^*$, так как ввиду $\tilde{\pi}_0\circ\tilde{\pi}_0=\tilde{\pi}_0\circ\tilde{\pi}_0$ и $\mu_k\circ t_k=t_k\circ\tilde{\pi}_0$ имеем $\tilde{\alpha}_k=2\alpha_k$ и $\bar{\alpha}_k=2\bar{\alpha}_k$. Прямое вычисление дает $\bar{\alpha}_k\circ\alpha_k=4\bar{\alpha}_k\circ\alpha_k=8_{P_{\tilde{\pi}_0}}$, откуда $\bar{\alpha}_k\circ\alpha_k=2_{P_{\tilde{\pi}_0}}$ и значит α_k и $\bar{\alpha}_k$ изогении (предложение (4.2)).

$$\begin{tikzcd}
P_{\tilde{\pi}_0} \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\tilde{\pi}_0^*"'] & J(\tilde{C}_0) \arrow[r, "\lambda_{8\theta(\tilde{C}_0)}"] \arrow[d, "\tilde{\tilde{\pi}}_0^*"'] & \hat{J}(\tilde{C}_0) \arrow[r, "\hat{\nu}"] & \hat{P}_{\tilde{\pi}_0} \\
P_{\tilde{\gamma}_0} \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\tilde{\tilde{\pi}}_0^*"'] & J(\tilde{\tilde{C}}_0) \arrow[r, "\lambda_{2\theta(\tilde{\tilde{C}}_0)}(1+i_{\tilde{\pi}_0})"] \arrow[d, "\tilde{\tilde{\pi}}_0^*"'] & \hat{J}(\tilde{\tilde{C}}_0) \arrow[r, "\hat{\nu}"] \arrow[u, "\hat{\tilde{\pi}}_0^*"'] & \hat{P}_{\tilde{\gamma}_0} \arrow[u, "\hat{\tilde{\tilde{\pi}}}_0^*"'] \\
P_{\tilde{\tilde{\gamma}}_k} \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "(\mu_k\cdot\tilde{\tilde{t}}_k)_*"'] & J(\check{C}) \arrow[r, "\lambda_{\theta(\check{C})}(1+j_k+j_k^2+i_{\tilde{\tilde{\pi}}_0}+i_{\tilde{\tilde{\pi}}_0}j_k+i_{\tilde{\tilde{\pi}}_0}j_k^2)"] \arrow[d, "(\mu_k\cdot\tilde{t}_k)_*"'] & \hat{J}(\check{C}) \arrow[r, "\hat{\nu}"] \arrow[u, "\hat{\tilde{\tilde{\pi}}}_0^*"'] & \hat{P}_{\tilde{\tilde{\gamma}}_k} \arrow[u, "\hat{\tilde{\tilde{\pi}}}_0^*"'] \\
P_{q_k} \arrow[r, "\nu"] & J(Y_k) \arrow[r, "\lambda_{\theta(Y_k)}"] & \hat{J}(Y_k) \arrow[r, "\hat{\nu}"] \arrow[u, "\widehat{(\mu_k\cdot\tilde{\tilde{t}}_k)}_*"'] & \hat{P}_{q_k} \arrow[u, "\widehat{(\mu_k\cdot\tilde{\tilde{t}}_k)}_*"']
\end{tikzcd}$$

Для доказательства соотношения на поляризации нам понадобится коммутативность этой диаграммы (все $\vee$ означают вложения):

По существу в доказательстве нуждается лишь коммутативность трех средних квадратов.

Так как отображения $(\mu_k \circ \dot{i}_k)_*: J(\check{C}) \to J(Y_k)$, $(\mu_k \circ \tilde{i}_k)^*: J(Y_k) \to J(\check{C})$ дуальны друг к другу, то $(\widehat{\mu_k \circ t_k})_* = i_{\theta(\check{C})} (\mu_k \circ \bar{t}_k)^* \, i^{-1}_{\theta(Y_k)}$, $(\widehat{\mu_k \circ t_k})^* = i_{\theta(Y_k)} (\mu_k \circ \bar{t}_k)_* \, i^{-1}_{\theta(\check{C})}$. Отсюда получается коммутативность нижнего среднего квадрата. Для доказательства коммутативности центрального квадрата используется равенство $i_{\bar{\pi}_0} \circ \tilde{\pi}_0^* = \tilde{\pi}_0^* \circ i_{\bar{\pi}_0}$. Наконец, коммутативность верхнего среднего квадрата следует из раненства $i_{\bar{\pi}_0} \circ \bar{\pi}_0^* = \bar{\pi}_0^*$.

Используя коммутативность построенной диаграммы, получаем

$$\bar{\alpha}_k^*(\varphi_{q_k}) = \dot{\bar{\alpha}}_k \circ \varphi_{q_k} \circ \bar{\alpha}_k = 8_{\varphi_{\pi_0}} = 4\alpha_k^*(\varphi_{q_k}). \text{ Отсюда } \alpha_k^*(\varphi_{q_k}) = 2\varphi_{\pi_0}.$$

Предложение 7.1 доказано.

Предложение 7.2. *Если $C_0 \to \mathbf{P}^1$ — тригональная кривая, $\pi_0: \bar{C}_0 \to C_0$ — двулистное накрытие, разветвленное не более, чем над двумя точками кривой C_0, отображающимися при t_0 в одну и ту же точку, то главно поляризованные абелевы многообразия (P_{π_0}, Ξ_{π_0}) и $(J(Y_k), \Theta(Y_k))$ изоморфны.*

Доказательство. С одной стороны имеем $\alpha_k \circ \alpha_k' = 2_{P_{\pi_0}}$. С другой стороны, из-за $\alpha \circ \pi_0^* = q_k^* \circ t_{0*} = 0$ верно, включение $\pi_0^*(J(C_0)) \cap P_{\pi_0} = (P_{\pi_0})_2 \subset \ker \alpha$. Отсюда $\alpha = 2\alpha_0$, где α_0 и α' взаимно обратные изоморфизмы. Поскольку главная поляризация $\varphi_{\Xi_{\pi_0}}$ определяется условием $2\varphi_{\Xi_{\pi_0}} = \varphi_{\pi_0}$ [3], то из $\alpha^*(\varphi_{q_k}) = 2\varphi_{\pi_0}$ получаем $\alpha_k^*(\Theta(Y_k)) = \Xi_{\pi_0}$. Заметим, что ограничение на U_π условия (D) при $t_0: C_0 \to C = \mathbf{P}^1$ выполняется автоматически, ибо дивизоры одинаковой степени на $\mathbf{P}^1$ линейно эквивалентны.

Результаты предложения 7.2 в случае неразветвленного накрытия π_0 известны по работе Рециллэса [10]. Там по произвольной кривой Y с рядом g_4^1, не содержащим дивизоров вида $2P + 2Q$ и $4P$, строится неразветвленное двулистное накрытие $\pi_0: C_0 \to C$ с тригональной кривой C и изоморфное отображение ее якобиана $J(Y)$ в многообразие Прима двулистного накрытия π_0.

Предложение 7.3. (*„Теорема Торелли"*) *Пусть M — семейство двулистных накрытий, удовлетворяющих условиям предложения 7.2. Тогда отображение Прима, сопоставляющее накрытию $\pi_0 \in M$ его главно поляризованный примиан, инъективно.*

Доказательство следует из предложения 7.2 и свойства обратимости конструкции башен (4.1) и (5.1).

Если ограничиться неразветвленными накрытиями, получаем результат, хорошо известный по статье [6].

Ереванский государственный
университет

Поступила 17.X.1977

Ս. Հ. ԴԱԼԱԼՅԱՆ. Կորերի աշտարակներ և Պրիմի բազմաձևություններ (*ամփոփում*)

Մտցվում է լրիվ հանրահաշվական կորերի Գալուայի արտապատկերման Գալուայի աշտարակի հասկացությունը և հետազոտվում են S_3 և S_4 սիմետրիկ խմբերին, $A_4 \subset S_4$ նշանափոխ խմբին և Q քառակուսու խմբին իզոմորֆ Գալուայի խմբեր ունեցող արտապատկերումների աշտարակները: Ստացված արդյունքների կիրառությամբ ապացուցվում է, որ տրիգոնալ պատկեր և հատուկ բնութագրիչ ունեցող երկթերթանի արտապատկերման պրիմիանը իզոգեն է g^1_4 շարքով կորի յակոբիանին: Ապացուցվում է, որ այդ իզոգենությունը վերածվում է իզոմորֆիզմի, եթե երկթերթանի արտապատկերումը ճյուղավորված չէ կամ ճյուղավորված է միայն երկու կետում:

S. H. DALALIAN. *Galois towers and Prym varieties* (summary)

The concept of the Galois tower for a Galois covering of complete nonsingular algebraic curves is introduced and towers of coverings with the Galois groups isomorphic to symmetric groups S_3 and S_4 the alternathing groups $A_4 \subset S_4$ and the group Q of the square are explored.

These results are applied to prove that the Prym manyfold of a trigonal twosheet covering with a special characteristic is isogenic to the Jacobian manyfold of curve with g^1_4 series. The isogeny is transformed into an isomorphism if the twosheet covering is unramified or ramified only at two points.

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. Ленг.* Алгебра, М., Изд. „Мир", 1968.
2. *Д. Мамфорд.* Лекции о кривых на алгебраической поверхности, М., Изд. „Мир", 1968.
3. *D. Mumford.* Prym varieties I, Contributions to Analysis. A collection of papers dedicated to Lipman Bers, Acad. press, 1974, 325–350.
4. *Ю. И. Манин.* Лекции по алгебраической геометрии, М., МГУ, 1970.
5. *А. Н. Тюрин.* Пять лекций о трехмерных многообразиях, УМН, 27, вып. 5, 1972, 3–50.
6. *А. Н. Тюрин.* Геометрия дивизора Пуанкаре многообразия Прима, Изв. АН СССР, сер. матем., 39, 1975, 1003–1043.
7. *А. Н. Тюрин.* О пересечении квадрик, УМН, 30, вып. 6, 1975, 51–99.
8. *С. Г. Далалян.* Многообразие Прима двулистного накрытия гиперэллиптической кривой с двумя точками ветвления, Матем. сб., 98, № 2, 1975, 255–267.
9. *R. Sasaki.* Prym varieties and their application. Sci Repts Tokyo Kyoigu Diagaku, A. 13, № 347–355, 1975, 111–128.
10. *S. Recillas.* Jacobians of curves with g^1_4's are the Prym's of trigonal curves, Bol. de la Soc. Mat. Mexicana, vol. 19, 1, 1974.
11. *L. Masiewicki.* Universal properties of Prym varieties with an applicati to algebraic curves of genus five, Trans. Amer. Mat. Soc., Vol. 222, 1976.
12. *К. Г. Клеменс, Ф. А. Гриффитс.* Промежуточный якобиан трехмерной кубической гиперповерхности, Математика, 17: 1, 1973, 3–41, 16: 6, 1972, 3–32.