Л. З. ГЕВОРКЯН

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ И ИНВАРИАНТНЫЕ
 ПОДПРОСТРАНСТВА НЕКОТОРОГО КЛАССА
 СТРОГО ЦИКЛИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

0°. Строго циклические операторы изучены в ряде работ ([1]–[5]).

В работе [2] построена функциональная модель для полупростых циклических подалгебр.

В п. 1^а настоящей заметки, используя новую идею, уточняется эта модель и попутно доказываются некоторые связанные с этой моделью утверждения.

В п. 2^а изучается конкретный строго циклический оператор и описывается решетка инвариантных подпространств этого оператора.

1. Построение функциональной модели

Пусть A – ограниченный оператор в гильбертовом пространстве H , $B(H)$ – алгебра ограниченных операторов в H , A – слабо замкнутая подалгебра, порожденная этим оператором. Напомним, что оператор A называется строго циклическим, если существует элемент $\xi \in H$ такой, что $A\xi = H$.

Обозначим через ρ отображение A в H , определяемое формулой

$$\rho(B) = B\xi. \quad (1.1)$$

Легко можно заметить, что ρ является линейным взаимно однозначным отображением банахова пространства A на банахово пространство H . В доказательстве нуждается лишь инъективность отображения ρ . Допустим, что $B\xi = C\xi$. Тогда $BA^n\xi = CA^n\xi$. Так как множество $\{A^n\xi\}_{n=0}^{\infty}$ плотно в H , то отсюда следует, что $B = C$. Без ограничения общности можно предположить, что $\|\xi\| = 1$. Тогда ρ является сжатием

$$\|\rho(B)\| = \|B\xi\| \leq \|B\|\|\xi\| = \|B\|. \quad (1.2)$$

Из теоремы Банаха об открытом отображении следует, что ρ^{-1} тоже непрерывен, поэтому существует константа c такая, что

$$\|B\| \leq c \|B\xi\|. \quad (1.3)$$

Отождествим A и H , т. е. не будем делать различия между оператором B и элементом $B\xi$. Тем самым в пространстве H определены две нормы, одна гильбертова $\|\cdot\|$, другая кольцевая $|\cdot|$. Эти две нормы эквивалентны

$$|\tilde{x}| < |x| \leq c |\tilde{x}|. \quad (1.4)$$

В гильбертовом пространстве H можно ввести естественное умножение двух элементов $x = B\tilde{\xi}$ и $y = C\tilde{\xi}$ по формуле

$$x \cdot y = BC\tilde{\xi}. \quad (1.5)$$

При этом гильбертово пространство H по отношению нормы $|\cdot|$ превращается в коммутативную банахову алгебру с единицей (роль единицы играет элемент $\tilde{\xi}$).

Действие некоторого оператора $C \in A$ на элемент $x \in H$ сводится к умножению элементов $y = C\tilde{\xi}$ и $x = B\tilde{\xi}$:

$$Cx = CB\tilde{\xi} = xy. \quad (1.6)$$

Опишем теперь инвариантные подпространства оператора A .

Лемма 1.1. Множество инвариантных относительно A подпространств совпадает с множеством замкнутых идеалов алгебры H .

Легко заметить, что любое инвариантное подпространство оператора A будет инвариантным также относительно любого оператора $B \in A$. Отсюда следует, что любое инвариантное подпространство будет замкнутым идеалом. Обратное включение очевидно.

Пусть A_0 — равномерно замкнутая подалгебра, порожденная оператором A . Подпространство A_0 будет инвариантным относительно A , следовательно и относительно любого оператора $B \in A$. Так как $\tilde{\xi} \in A_0$, то $A_0 = A$. Таким образом, верна следующая

Теорема 1.1. Если A — строго циклический оператор, то слабо замкнутая и равномерно замкнутая подалгебры, порожденные оператором A , совпадают.

Более слабое утверждение, и притом для частного класса строго циклических алгебр, доказано в [1].

В силу этой теоремы, в определении строгой циклическости слабую замкнутость можно заменить равномерной замкнутостью.

Перейдем теперь к построению функциональной модели оператора A .

Пусть M — некоторый максимальный идеал алгебры H . Как известно, любой максимальный идеал является ядром некоторого линейного мультипликативного функционала, который, в силу (1.4), является элементом гильбертова пространства H . Легко видеть, что этот линейный мультипликативный функционал определяется элементом y из ортогонального дополнения к M (которое одномерно), нормированным условием $(\tilde{\xi}, y) = 1$. Так как M инвариантно относительно A , то y является собственным вектором оператора A^* .

Пусть теперь y является собственным вектором оператора A^* . Тогда ортогональное дополнение к y является инвариантным подпространством оператора A коразмерности 1, т. е. максимальным идеалом.

Таким образом, множество линейных мультипликативных функционалов над H и множество собственных векторов оператора A^* , нормированных условием $(\xi, \cdot) = 1$, совпадают.

Докажем, что оператор A^* простой, т. е. каждое собственное значение простое. Допустим противное, тогда существуют x и y такие, что

$$(\xi, x) = 1, (\xi, y) = 1, A^* x = \lambda x, A^* y = \mu y. \quad (1.7)$$

Тогда

$$(\xi, x - y) = 0, (A\xi, x - y) = \bar{\lambda} (\xi, x - y) = 0. \quad (1.8)$$

По индукции

$$(A^n \xi, x - y) = (A^{n-1} \xi, A^n(x - y)) = \bar{\lambda} (A^{n-1} \xi, x - y) = 0. \quad (1.9)$$

Так как множество $\{A^n \xi\}_{n=0}^{\infty}$ плотно в H , то $x = y$. Отсюда следует, что между линейными мультипликативными функционалами над H и точечным спектром оператора A^* существует взаимно-однозначное соответствие.

Отобразим гильбертово пространство H в некоторое пространство функций, определенных на некотором подмножестве комплексной плоскости следующим образом: каждому элементу f поставим в соответствие функцию

$$f(\lambda) = (f, h_{\lambda}), \quad (1.10)$$

где h_{λ} — собственный вектор оператора A^* , нормированный условием $(\xi, h_{\lambda}) = 1$.

В действительности $\bar{f}(\lambda)$ является преобразованием Гельфанда элемента $f \in H$, причем элементу $A\xi$ соответствует функция $f(\lambda) = \lambda$, так как

$$(A\xi, h_{\lambda}) = (\xi, A^* h_{\lambda}) = \lambda (\xi, h_{\lambda}) = \lambda. \quad (1.11)$$

Как известно, спектр любого элемента банаховой алгебры совпадает с множеством значений преобразования Гельфанда этого элемента. Легко можно доказать, что алгебра A является максимальной коммутативной подалгеброй алгебры $B(H)$ (см., например, [4]).

Поэтому очевидно, что спектр оператора A^* состоит из простых собственных значений.

Это утверждение содержится также и в [4].

Предположим теперь, что алгебра A полупростая. В этом случае для любого элемента $z \in H$ будет существовать элемент h_z такой, что $(z, h_z) \neq 0$. Тогда замкнутая линейная оболочка векторов $\{h_z\}$ будет совпадать с H .

Введем в этом пространстве функций скалярное произведение

$$(\bar{f}(\lambda), \bar{g}(\lambda)) = (f, g). \quad (1.12)$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 1.2. Для любого строго циклического оператора A такого, что алгебра, порожденная этим оператором, полупростая, существует изометричное отображение H на функционально-гильбертово пространство, состоящее из функций, определенных на спектре оператора A , при котором оператор A переходит в оператор умножения на независимую переменную.

Аналогичное утверждение содержится в работе [2].

Заметим, что это функциональное пространство является замкнутой в норме $\|\cdot\|$ линейной оболочкой множества полиномов от λ . Из хорошо известных свойств преобразования Гельфанда следует [6], что норма в этом пространстве мажорирует норму $\|f\|_\infty = \sup_{\lambda \in S_{0,1}} |f(\lambda)|$.

2. Описание инвариантных подпространств одного строго циклического оператора

Пусть H — гильбертово пространство непрерывных функций на отрезке $[0,1]$ с квадратично суммируемой производной. Следуя Шилдсу, введем в H скалярное произведение

$$(f, g) = f(0) \overline{g(0)} + \int_0^1 f'(x) \overline{g'(x)} dx. \quad (2.1)$$

Пространство H является функциональным гильбертовым пространством [7] с воспроизводящим ядром

$$h(\lambda, x) = h_\lambda(x) = \begin{cases} 1+x & 0 \leq x \leq \lambda \\ 1+\lambda & \lambda \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (2.2)$$

Вычислим норму элемента h_λ :

$$\|h_\lambda\|^2 = (h_\lambda, h_\lambda) = h_\lambda^2(0) + \int_0^1 |h_\lambda'|^2 dx = 1 + \lambda. \quad (2.3)$$

Из неравенства Шварца следует, что $|f(\lambda)| = |(f, h_\lambda)| \leq \|f\| \|h_\lambda\|$, откуда

$$\|f\|_\infty = \sup_{\lambda \in [0,1]} |f(\lambda)| \leq \sqrt{2} \|f\|. \quad (2.4)$$

Оценим норму произведения

$$\begin{aligned} \|f\varphi\|^2 &= |\varphi(0)f(0)|^2 + \int_0^1 |\varphi'f + f'\varphi|^2 dx \leq |\varphi(0)|^2 |f(0)|^2 + 2 \int_0^1 (|\varphi'|^2 |f|^2 + |\varphi f'|^2) dx \leq \\ &\leq |\varphi(0)|^2 |f(0)|^2 + 2\|\varphi'\|^2 \int_0^1 |f|^2 dx + 2\|\varphi\|^2 \int_0^1 |f'|^2 dx \leq 8\|\varphi\|^2 \|f\|^2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Из неравенства (2.5) следует, что умножение на φ является линейным ограниченным оператором в H . Обозначим норму этого оператора через $|\varphi|$, тогда

$$|\varphi| = \sup_{\|f\|=1} \|\varphi f\| \geq \|\varphi\|. \quad (2.6)$$

Комбинируя (2.5) и (2.6), заключаем, что нормы $|\cdot|$ и $\|\cdot\|$ эквивалентны

$$\|\varphi\| \leq |\varphi| \leq c \|\varphi\|. \quad (2.7)$$

Обозначим через A оператор умножения на независимую переменную

$$(Af)(x) = xf(x). \quad (2.8)$$

Докажем, что оператор A строго циклический с циклическим вектором $\varepsilon(x) \equiv 1$. Для этого достаточно доказать, в силу (2.7), что множество полиномов от x всюду плотно в H по норме $\|\cdot\|$. Пусть $f \perp \{x^n\}_{n=0}^{\infty}$. Тогда

$$f(0) = (f, 1) = 0 \text{ и } (f, x^n) = n \int_0^1 f' x^{n-1} dx = 0, \quad (2.9)$$

откуда легко заключить, что $f(x) \equiv 0$.

Перейдем к нахождению инвариантных подпространств оператора A .

Теорема 2.1. Решетка инвариантных подпространств оператора A изоморфна множеству замкнутых подмножеств отрезка $[0,1]$, упорядоченному по обратному включению.

Пусть F — замкнутое подмножество отрезка $[0,1]$. Обозначим через M множество всех функций из H , тождественно равных нулю на F . Очевидно, что F является инвариантным относительно умножения на x линейным многообразием. Докажем замкнутость M . Пусть $\{f_n\} \subset M$ и $\|f - f_n\| \rightarrow 0$, тогда для любого $i \in F$

$$|f(i)| = |(f, h_i)| = |(f - f_n, h_i)| < \varepsilon, \text{ т. е. } f(i) = 0. \quad (2.10)$$

Итак, каждому F соответствует некоторое инвариантное подпространство M .

Докажем обратное включение. Пусть M — некоторое инвариантное относительно A подпространство, т. е. замкнутый идеал (см. лемму 1.1). Пусть $\{M_\alpha\}_{\alpha \in U}$ — множество замкнутых идеалов, содержащих идеал M . Каждый максимальный идеал состоит из всех функций, равных нулю в некоторой точке $\lambda_\alpha \in [0,1]$. Введем обозначение $F = \{\lambda_\alpha, \alpha \in U\}$. Поскольку все функции из H непрерывны, легко заключить, что F — замкнутое множество. Докажем теперь, что M состоит из всех функций, равных нулю на F . Для этого достаточно установить, что M является пересечением всех максимальных идеалов, содержащих M . Допустим, что $g \in \cap M_\alpha$, $g \perp M$.

Поскольку легко заключить, что H -полупростая регулярная алгебра (т. е. для любого замкнутого подмножества $F \subset [0,1]$ и любой точки $\gamma \in [0,1] \setminus F$ существует функция $f(x)$ такая, что $f|_F = 0$ и $f(\gamma) = 1$, то принимая во внимание известную теорему (см. [6], § 15, гл. III), заключаем, что M содержит все функции, равные нулю в некоторой окрестности множества F . Следовательно, для любой функции φ , носитель которой содержится в $[0,1] \setminus F$

$$(g, \varphi) = g(0)\overline{\varphi(0)} + \int_0^1 g'(x)\overline{\varphi'(x)} dx = 0, \quad (2.11)$$

откуда следует, что сужение g' на каждую компоненту связности множества $[0,1] \setminus F$ равно константе $g'|_{V_i} = c_i$.

Наконец, поскольку g непрерывна, то из условия $g|_F = 0$ заключаем, что $g(x) \equiv 0$.

Замечание 1. Существенным моментом доказательства теоремы 2.1 является тот факт, что любой идеал в H является пересечением всех максимальных идеалов, содержащих данный идеал. Поэтому, если для некоторого строго циклического оператора S будет выполняться аналогичное условие, то решетка его инвариантных подпространств будет изоморфна множеству замкнутых подмножеств спектра S .

Замечание 2. Из доказанной теоремы легко следует, что любое инвариантное относительно A^* подпространство определяется замкнутым множеством $F \subset [0,1]$ и является замкнутой линейной оболочкой множества $\{h_i\}_{i \in F}$, т. е. множества собственных векторов.

Далее, интересно отметить, что существует изометрический изоморфизм пространства $L^2(0,1)$ на подпространство H_0 пространства H , состоящий из функций, равных нулю в точке $x=0$. Этот изоморфизм устанавливается оператором интегрирования Вольтерра V

$$(Vf)(x) = \int_0^x f(t) dt. \quad (2.12)$$

Легко видеть, что при этом оператору $A|_{H_0}$ в $L^2(0,1)$ соответствует оператор

$$(Bf)(x) = xf(x) + \int_0^x f(t) dt. \quad (2.13)$$

Рассмотрим оператор B^*

$$(B^*f)(x) = xf(x) + \int_x^1 f(t) dt. \quad (2.14)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что функции

$$K_\lambda(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq \lambda \\ 0 & \lambda < x \leq 1 \end{cases} \quad (2.15)$$

являются простыми собственными функциями оператора B^λ с собственным значением, равным λ .

Сопоставляя каждой функции $f \in L^2(0,1)$ функцию

$$\tilde{f}(\cdot) = (f, K_\lambda), \quad (2.16)$$

мы как раз получим упомянутый выше изоморфизм.

Следовательно, оператор $A|_{M_\lambda}$ является естественной моделью оператора B . При таком представлении можно легко описать инвариантные подпространства оператора B , написать явное выражение для обратного оператора, оценить норму резольвенты и т. д.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 19.III.1978

Լ. Զ. ԳԵՎՈՐԿՅԱՆԻ ՈՐՈՇ ԴՊՍԻ ՉԻԿԻԻԿ ՕՍԿԵՐԱՏՈՐՆԵՐԻ ՖՈՒՆԿՑԻՈՆԱԿ ԺՈՂԵՂՐ Ե ԻՆՎԱՐԻԱՆՏ ԷՆԹՎԱՏԱՐԱԾՈՒՅՐՅՈՒՆՆԵՐ (ամփոփում)

Պատկերված է որոշ դպսի խիստ չիկիիկ օսկերատորների ֆունկցիոնալ ժողելը: Նկարագրված է որոշակի խիստ չիկիիկ օսկերատորի ինվարիանտ էնթատարածությունների ջանցը:

L. Z. GEVORKIAN. *On the functional model and the invariant subspaces of a class of strictly cyclic operators (summary)*

The functional model of a certain class of strictly cyclic operators is constructed and the lattice of invariant subspaces is described.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. A. Lambert. Strictly cyclic weighted shifts. Proc. Amer. Math. Soc., 29, 1971, 331—336.
2. A. Lamber. Strictiy cyclic algebras, Pacific J. Math., 39, 1971, 717—727.
3. R. Bouldin. Reducing decomposition for strictly cyclic operators, Proc. Amer. Math. Soc., 40, 1972, 474—482.
4. B. Barnes. Operators with strictly cyclic vector, Proc. Amer. Math. Soc., 41, 1973, 480—487.
5. M. Embry. Strictly cyclic operator algebras on Banach space, Pacific J. Math., 45, 1973, 443—452.
6. М. А. Наймарк. Нормированные кольца, М., Изд. „Наука“, 1968.
7. П. Халмош. Гильбертово пространство в задачах, М., Изд. „Мир“, 1979