ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIV, № 1, 1979 Математика

Д. Г. МАРТИРОСЯН

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ГИББСОВСКИЕ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ КЛАССИЧЕСКИХ РЕШЕТЧАТЫХ МОДЕЛЕЙ

Введение

В настоящей заметке дается полное описание периодических гиббсовских состояний для некоторого класса решетчатых моделей.

Мы будем пользоваться следующими обозначениями: через Z^ν, $\nu > 1$ будем обозначать ν-мерную целочисленную решетку. Векторы $i = (i_1, \cdots, i_\nu)$ с целочисленными координатами будем называть точками решетки, подмножества V решетки Z^ν будем называть объемами. Для объема V через $|V|$ обозначим число точек решетки, содержащихся в объеме V. Расстояние между двумя точками решетки $i = (i_1, \cdots, i_\nu)$ и $i' = (i'_1, \cdots, i'_\nu)$ полагаем равным

$$\mathrm{dist}\,(i, i') = \sum_{k=1}^{\nu} |i_k - i'_k|. \tag{1}$$

Зафиксируем некоторое конечное множество $X = (x_1, \cdots, x_k)$. Отображения $x(i)\colon Z^\nu \to X$ будем называть конфигурациями решетчатой модели. Множество всех конфигураций называется фазовым пространством решетчатой модели и обозначается через $\mathfrak{M}$. Предположим, что на фазовом пространстве $\mathfrak{M}$ задано некоторое семейство $\{U_i[x(j)]\}_{i\in Z^\nu}$ действительных конечных функций, при каждом $i \in Z^\nu$ зависящее только от значений конфигураций $x(j)$ в R-окрестности точки i. Для любых двух конфигураций $x'(i)$ и $x''(i)$, совпадающих почти всюду (т. е. всюду, за исключением конечного числа точек решетки), определим относительный потенциал $H(x', x'')$ формулой

$$H(x'(i), x''(i)) = \sum_{i\in Z^\nu} [U_i(x'(j)) - U_i(x''(j))]. \tag{2}$$

Легко видеть, что в правой части (2) под знаком суммы только конечное число слагаемых отлично от нуля, так что $H(x', x'')$ определен корректно.

Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что U_i периодично, т. е. инвариантно относительно действия некоторой подгруппы $\hat{Z}$ группы Z^ν конечного индекса; последнее означает, что для любых $i \in Z^\nu$, $k \in \hat{Z}$ и любой конфигурации $x(j)$

$$U_{i+k}[x(j-k)] = U_i[x(j)]. \tag{3}$$

Из периодичности U_i и из того, что U_i принимают конечные значения, вытекает, что для любых двух конфигураций $x(i)$ и $y(i)$, совпадающих почти всюду

$$|H(x(i), y(i))| \leqslant cN(i \in Z^\nu: x(i) \neq y(i)), \tag{4}$$

где $N(i \in Z^\nu: x(i) \neq y(i))$ — число точек решетки, в которых конфигурации $x(i)$ и $y(i)$ не совпадают, а c—некоторая постоянная. Далее, из формулы (2) немедленно вытекает, что если конфигурации x', x'', x''' совпадают почти всюду, то

$$H(x', x'') + H(x'', x''') = H(x', x'''). \tag{5}$$

Формулы (4) и (5) будут неоднократно использоваться нами в дальнейшем.

Определение 1. Тройку (Z^ν, X, H) назовем решетчатой моделью. Число R будем называть радиусом взаимодействия решетчатой модели.

Далее, мы будем называть конфигурацию $s(j)$ периодической, если $s(j+k) = s(j)$ для всех $j \in Z^\nu$ и $k \in \hat{Z}$, где $\hat{Z}$ — некоторая подгруппа группы Z^ν конечного индекса. Множество периодических конфигураций будет обозначаться через $\mathfrak{M}^{(per)}$.

Определение 2. ([1]) Периодическая конфигурация s называется основным состоянием относительного потенциала H, если для любой конфигурации x, почти всюду совпадающей с s, $H(x, s) \geqslant 0$.

Пусть $T \subset Z^\nu$. Конфигурацией на T назовем отображение $T \to X$. Конфигурации на T будут обозначаться через $(T, x(i))$. Пусть $T_1 \subset T_2 \subset Z^\nu$ и $(T_1, x(i))$ и $(T_2, y(i))$ конфигурации на T_1 и T_2 соответственно. $(T_1, x(i))$ называется проекцией $(T_2, y(i))$ на T_1, $(T_1, x(i)) = \mathrm{pr}_{T_1}(T_2, y(i))$, если $y(i) = x(i)$ при $i \in T_1$. В случае $T_2 = Z^\nu$ мы будем обозначать проекцию через $\mathrm{pr}_{T_1} x(i)$.

Следуя С. А. Пирогову и Я. Г. Синаю, мы рассматриваем относительные потенциалы вида $H' = H_0 + \sum h_i H_i$, где h_i—параметры, а H_i удовлетворяют тем же условиям, что в [1] и [2]. Формулировку этих условий мы приводим в определениях 3—6.

Предположим, что H_0 имеет конечное число основных состояний, обозначаемых нами через $s_1, \cdots, s_r$. Пусть $\hat{Z}$—та подгруппа группы Z^ν конечного индекса, относительно которой инвариантны H_0 и конфигурации $s_1, \cdots, s_r$. Положим $N = (Z^\nu : \hat{Z})$ и обозначим через $U_N(i)$ множество $\{j \in Z^\nu: \mathrm{dist}\,(i, j) \leqslant N\}$.

Определение 3. Пусть $s \in \mathfrak{M}$. Точка $i \in Z^\nu$ называется неправильной точкой конфигурации s, если $\mathrm{pr}_{U_N(i)}\, s \neq \mathrm{pr}_{U_N(i)}\, s_q$ ни для одного $q = 1, 2, \cdots, r$.

Определение 4. Относительный потенциал H_i с основными состояниями $s_1, \cdots, s_r$ удовлетворяет условию Пайерлса, если для любого $q = 1, 2, \cdots, r$ и для любой конфигурации s, совпадающей с s_q почти всюду

$$H_0(s, s_q) \geq \rho\, |B(s)|, \tag{6}$$

где через $|B(s)|$ обозначено число неправильных точек конфигурации s, а ρ — положительная постоянная.

Рассмотрим теперь относительные потенциалы $H_1, \cdots, H_{r-1}$, число которых на единицу меньше числа основных состояний относительного потенциала H_0. Прежде чем сформулировать условия, которым удовлетворяют $H_1, \cdots, H_{r-1}$, приведем одно определение.

Определение 5. Пусть $s', s'' \in \mathfrak{M}^{(per)}$ и $V_R = \{i = (i_1, \cdots, i_\nu) \in Z^\nu : \max\limits_{1 \leq k \leq \nu} |i_k| \leq R\}$. Положим

$$s_{V_R}(i) = \begin{cases} s'(i), & i \in V_R \\ s''(i), & i \notin V_R \end{cases} \tag{7}$$

и образуем

$$\lambda_H(s', s'') = \lim_{R \to \infty} \frac{H(s_{V_R}, s'')}{|V_R|}. \tag{8}$$

Нетрудно показать, что предел (8) существует, и что на $\mathfrak{M}^{(per)}$ можно найти функцию $e_H(s)$, определенную с точностью до аддитивной постоянной, такую, что $\lambda_H(s', s'') = e_H(s') - e_H(s'')$. Функция $e_H(s)$ называется удельной энергией конфигурации s.

Для относительного потенциала $H = \sum\limits_{l=1}^{r-1} h_l H_l$ определим $e_H(s_q)$, $1 \leq q \leq r$ и положим $t_H(s_q) = e_H(s_q) - \min\limits_q e_H(s_q)$. Набор чисел $t_H(s_q)$, который уже определяется однозначно, можно рассматривать как точку границы положительного октанта R^r_+ пространства R^r

$$W^{r-1} = \{(a_1, \cdots, a_r) \in R^r : \min a_i = 0\}.$$

Определение 6. Набор относительных потенциалов $H_1, \cdots, H_{r-1}$ снимает вырождение основного состояния H_0, если отображение

$$\tau : h = (h_1, \cdots, h_{r-1}) \to t_H = (t_H(s_1), \cdots, t_H(s_r))$$

отображает пространство параметров $(h_1, \cdots, h_{r-1})$ на всю границу положительного октанта R^r_+.

И, наконец, приведем определение гиббсовского состояния.

Пусть заданы решетчатая модель (Z^ν, X, H), конечный объем $V \subset Z^\nu$, $|V| < \infty$ и параметр $\beta > 0$, где $\beta = \frac{1}{T}$ — обратная температура. Зафиксируем конфигурацию $\overline{x(i)} \in \mathfrak{M}$ и обозначим через $\mathfrak{M}(V, \overline{x(i)})$ множество всех конфигураций, совпадающих с конфигурацией $\overline{x(i)}$ вне объема V, т. е.

$$\mathfrak{M}(V, \overline{x(i)}) = \{x(i) \in \mathfrak{M} : x(i) = \overline{x(i)},\ i \notin V\}.$$

На $\mathfrak{M}(V, \overline{x(i)})$, состоящем, как легко видеть, из конечного числа конфигураций, определим распределение вероятностей $P_{\overline{x}, V, \beta}(\cdot)$ так, чтобы для любых $x(i)$, $x'(i) \in \mathfrak{M}(V, \overline{x(i)})$

$$P_{\overline{x}, V, \beta}(x(i)) / P_{\overline{x}, V, \beta}(x'(i)) = \exp\{-\beta H(x(i), x'(i))\}. \tag{9}$$

Распределение вероятностей $P_{\overline{x}, V, \beta}(\cdot)$ называется распределением Гиббса в конечном объеме V с граничными условиями $\overline{x(i)}$.

Определение 7. ([3]) Предельным распределением Гиббса для решетчатой модели (Z^ν, X, H) и параметра $\beta > 0$ называется распределение вероятностей P на $\mathfrak{M}$, для которого условные вероятности

$$P\{x(i),\ i \in V \mid x(i) = \overline{x(i)},\ i \notin V\} \tag{10}$$

P — почти наверное совпадают с $P_{\overline{x}, V, \beta}(\cdot)$.

Предельное распределение Гиббса P является распределением вероятностей некоторого случайного поля ξ_i с дискретным аргументом, принимающим значения в целочисленной ν-мерной решетке Z^ν и значениями в конечном множестве X. Это случайное поле называется гиббсовским случайным полем, отвечающим потенциалу H и параметру $\beta > 0$.

Предельное распределение Гиббса мы будем называть периодическим, если мера P инвариантна относительно действия некоторой подгруппы $\hat{Z}$ конечного индекса. Если при этом $\hat{Z} = Z^\nu$, то предельное распределение Гиббса называется трансляционно-инвариантным. Предельное распределение Гиббса иногда называется также гиббсовским состоянием.

Мы будем изучать периодические состояния для решетчатых моделей с относительным потенциалом вида $H' = H_0 + \sum_{i=1}^{r-1} h_i H_i$, где H_0 удовлетворяет условию Пайерлса с основными состояниями $s_1, \cdots, s_r$, а набор относительных потенциалов $H_1, \cdots, H_{r-1}$ снимает вырождение основного состояния H_0. Пусть, как и раньше, $W^{r-1} = \{(a_1, \cdots, a_r) \in R^r : \min a_i = 0\}$. Для $a \in W^{r-1}$ через $N(a)$ обозначим число координат вектора a, равных нулю. Для $h = (h_1, \cdots, h_{r-1})$ положим $|h| = \max |h_i - h_j|$, $1 \leq i, j \leq r-1$. Для рассматриваемого класса относительных потенциалов известно следующее [1], [2]. Найдутся такие постоянные $\beta_0 > 0$, $B > 0$, что при всех $\beta > \beta_0$ существует гомеоморфизм $J(\beta)$ области $\{|h| < B\}$ на некоторую окрестность точки 0 в W^{r-1}, при этом для значений параметров β, h имеется по крайней мере $N(J(\beta) h)$ попарно сингулярных предельных гиббсовских распределений, инвариантных относительно действия некоторой подгруппы $\hat{Z}$ группы Z^ν конечного индекса.

Основной результат работы, относящийся к описанию периодических гиббсовских состояний, содержится в следующей теореме.

Теорема. *Пусть относительные потенциалы $H_0, H_1, \cdots, H_{r-1}$ удовлетворяют условиям, сформулированным выше, и пусть значения параметров β, h выбраны таким образом, что $\beta > \beta_0$, $|h| < B$ и $N(J(\beta)h) = r$ или $r-1$. Тогда существует $N(J(\beta)h)$ попарно сингулярных гиббсовских состояний $P_1, \cdots, P_m$, $m = N(J(\beta)h)$, и любое периодическое гиббсовское состояние имеет вид $P = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i P_i$, где коэффициенты $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ таковы, что $\alpha_i > 0$, $\sum \alpha_i = 1$, $1 \leqslant i \leqslant m = N(J(\beta)h)$.*

Заметим, что аналогичный результат для модели классического изинговского ферромагнетика при нулевом поле и достаточно большом значении обратной температуры β был установлен в [4].

§ 1. Две общие леммы

Леммы, которые мы приводим в этом параграфе, будут неоднократно использоваться нами в дальнейшем.

Лемма 1.1. *Пусть (Z^ν, X, H) — решетчатая модель, $x(i)$ — конфигурация на Z^ν, $x(i) \in \mathfrak{M}$, P — предельное распределение Гиббса для решетчатой модели (Z^ν, X, H) и параметра β, и $V_1 \subset V_2 \subset Z^\nu$, где V_2 — конечный объем. Тогда для P — почти всех $x(i)$*

$$1 \leqslant \frac{P\{z(i) = x(i),\ i \in V_1 \mid \overline{z(i) = x(i),\ i \in V_1}\}}{P\{z(i) = x(i),\ i \in V_2 \mid \overline{z(i) = x(i),\ i \in V_2}\}} \leqslant \exp\{\alpha |V_2 \setminus V_1|\}, \quad (1.1)$$

где α зависит только от H и β и не зависит от выбора V_1, V_2.

Доказательство. Зафиксируем конфигурацию $x(i)\colon Z^\nu \to X$, $X = (x_1, \cdots, x_k)$. Если $V' \subset Z^\nu$ — произвольный объем, то в силу определения гиббсовского состояния P имеем

$$\frac{P\{z(i),\ i \in V' \mid \overline{z(i) = x(i),\ i \in V'}\}}{P\{z(i) = x(i),\ i \in V' \mid \overline{z(i) = x(i),\ i \in V'}\}} = \exp\{-\beta H(z(i), x(i))\}, \quad (1.2)$$

где $z(i)$ — конфигурация, совпадающая с $x(i)$ вне объема V'.

Из формулы (1.2) и из очевидной формулы

$$\sum_{z(i):\ z(i) = x(i),\ i \in \overline{V'}} P\{z(i),\ i \in V' \mid \overline{z(i) = x(i),\ i \in V'}\} = 1, \quad (1.3)$$

справедливой для любого $V' \subset Z^\nu$, $|V'| < \infty$, вытекают соотношения

$$P\{z(i) = x(i),\ i \in V' \mid \overline{z(i) = x(i),\ i \in V'}\} =$$
$$= \left\{\sum_{z(i):\ z(i) = x(i),\ i \in \overline{V'}} \frac{P\{z(i),\ i \in V' \mid \overline{z(i) = x(i),\ i \in V'}\}}{P\{z(i) = x(i),\ i \in V' \mid \overline{z(i) = x(i),\ i \in V'}\}}\right\}^{-1} =$$
$$= \left\{\sum_{z(i):\ z(i) = x(i),\ i \in \overline{V'}} \exp\{-\beta H(z(i), x(i))\}\right\}^{-1}. \quad (1.4)$$

Воспользуемся формулой (1.4) при V', равном V_1 и V_2 соответственно, в результате чего оцениваемое нами отношение вероятностей запишется в виде

$$\frac{\sum\limits_{z(i):\ z(i)=x(i),\ i\notin V_2} \exp\{-\beta H(z(i),\ x(i))\}}{\sum\limits_{z(i):\ z(i)=x(i),\ i\notin V_1} \exp\{-\beta H(z(i),\ x(i))\}}. \tag{1.5}$$

Определим отображение f множества конфигураций в себя по формуле $f(z(i)) = z'(i)$, где

$$z'(i) = \begin{cases} z(i), & i\notin V_2\setminus V_1 \\ x(i), & i\in V_2\setminus V_1. \end{cases}$$

Конфигурации $z(i)$ и $f(z(i))$ совпадают всюду вне множества $V_2\setminus V_1$, поэтому из формулы (4) вытекает, что $|H(z(i), f(z(i))| \leqslant c\,|V_2\setminus V_1|$ с некоторой постоянной c, зависящей только от H, откуда

$$\exp\{\beta H(z(i),\ x(i))\} = \exp\{\beta H(z(i),\ f(z(i))\}\exp\{\beta H(f(z(i)),\ x(i))\} \leqslant$$
$$\leqslant \exp\{\beta c\,|V_2\setminus V_1|\}\cdot \exp\{\beta H(f(z(i)),\ x(i))\}. \tag{1.6}$$

Оценим сверху выражение (1.5). Заметим, что из (1.6) следует

$$\sum_{z(i):\ z(i)=x(i),\ i\notin V_2} \exp\{\beta H(z(i),\ x(i))\} \leqslant$$
$$\leqslant \exp\{\beta c\,|V_2\setminus V_1|\} \sum_{z(i):\ z_1(i)=x(i)\ i\notin V_1} \exp\{\beta H(f(z(i),\ (x(i))\} \leqslant$$
$$\leqslant \exp\{\beta c|V_2\setminus V_1|\} \sum_{z_1(i):\ z_1(i)=x(i),\ i\notin V_1} N\{z(i):\ f(z(i))=z_1(i)\} \times$$
$$\times \exp\{\beta H(z_1(i),\ x(i))\}. \tag{1.7}$$

Для оценки $N(z(i): f(z(i)) = z_1(i))$ заметим, что в каждой точке $i\in Z^\nu$ конфигурация $z(i)$ может находиться в одном из k возможных состояний $X = (x_1,\cdots, x_k)$, $|X| = k$ и поскольку $z_1(i)$ должно совпадать с $z(i)$ вне множества $V_2\setminus V_1$, то число конфигураций $z(i)$, для которых $f(z(i)) = z_1(i)$, не превосходит $k^{|V_2\setminus V_1|} = \exp\{\ln k\,|V_2\setminus V_1|\}$ Поэтому (1.7) не больше

$$\exp\{\beta c\,|V_2\setminus V_1|\} \sum_{z_1(i):\ z_1(i)=x(i),\ i\notin V_1} \exp\{\ln k\,|V_2\setminus V_1|\}\times$$
$$\times \exp\{\beta H(z_1(i),\ x(i))\}.$$

Полагая $\alpha = \beta c + \ln k$, получаем правое неравенство (1.1).

Для доказательства левого неравенства (1.1) воспользуемся включением $\{z(i): z(i) = x(i),\ i\notin V_1\}\subset\{z'(i): z'(i) = x(i),\ i\notin V_2\}$, откуда следует

$$\sum_{z(i):\ z(i)=x(i),\ i\notin V_1} \exp\{\beta H(z(i),\ x(i))\} \leqslant$$
$$\sum_{z'(i):\ z'(i)=x(i),\ i\notin V_2} \exp\{\beta H(z(i),\ x(i))\},$$

что и доказывает лемму 1.1.

Определение 1.1. Пусть множества $A,\ B \subset Z^{\nu}$. Назовем множество B R-связным по отношению к множеству A, если для любой точки $i_0 \in B$ найдется такая цепочка $i_0, i_1, \cdots, i_k$, $i_s \in B$, $k = 1, 2, \cdots$, $s = 0, 1, \cdots, k$, что расстояние $\mathrm{dist}\,(i_s, i_{s+1})$ между последовательно взятыми точками i_s, i_{s+1} меньше R и $\mathrm{dist}\,(i_k, A) \leqslant R$.

Лемма 1.2. *Для любого конечного множества A число всех множеств B, R-связных по отношению к множеству A и таких, что $|B| = b$ фиксировано, не превосходит $\exp\{\alpha(|A| + b)\}$. Константу α можно выбрать так, что она будет зависеть только от R и размерности решетки ν, $\alpha = \alpha(R, \nu)$.*

Утверждения типа леммы 1.2 достаточно стандартны и доказательства аналогичных предложений можно найти во многих работах (см., например, [5], [6]), поэтому мы опускаем доказательство.

§ 2. Контурные модели с параметром

Понятие контура является для нас одним из основных. Мы будем исходить из определения, приведенного в ([2], стр. 61–65).

Напомним некоторые обозначения из [2], связанные с этим понятием. Контур с граничными условиями s_q обозначается через Γ^q, а носитель контура Γ^q через $\mathrm{supp}\ \Gamma^q$. m-внутренность контура Γ^q мы будем обозначать через $\mathrm{Int}_m \Gamma^q$. Здесь в отличие от [2] мы предполагаем, что $m \neq q$, а внешность контура мы определим, как множество $\mathrm{Ext}\ \Gamma^q = Z^{\nu} \setminus (\mathrm{supp}\ \Gamma^q \cup (\bigcup_{m \neq q} \mathrm{Int}_m \Gamma^q))$. Заметим, что при этом все утверждения работы [2] остаются справедливыми. И, наконец, через $\Xi(\Gamma^q / \beta H)$ обозначается кристаллическая статистическая сумма для контура Γ^q, относительного потенциала H и параметра β, через $\Xi_{\mathrm{rar}}(V / \beta H)$ — разреженная статистическая сумма для объема V, относительного потенциала H и параметра β, а через $\Xi(\Gamma^q | F_q)(\Xi_{\mathrm{rar}}(V | F_q))$, где F_q — контурный функционал, обозначена контурная кристаллическая (разреженная) статистическая сумма.

Пусть $a > 0$ — параметр, F_q — контурный функционал и $\{\Gamma_1^q, \cdots, \Gamma_n^q\}$ — некоторый набор внешних контуров в объеме V. Обозначим через V_i объемы, соответствующие внешним контурам Γ_i^q, $V_i = \bigcup_{m \neq q} \mathrm{Int}_m \Gamma_i^q$, и положим вероятность расположения данного набора внешних контуров $\{\Gamma_1^q, \cdots, \Gamma_n^q\}$ в объеме V равной

$$\Xi^{-1}(V, a) \prod_{i=1}^{n} \Xi(\Gamma_i^q | F_q)\, e^{a|V_i|}, \tag{2.1}$$

где $\Xi(V, a)$ — нормирующий множитель, равный $\sum \prod e^{a|V_i|}\, \Xi(\Gamma_i^q | F_q)$.

Определение 2.1 ([7]) Модель с распределением вероятностей, задаваемым формулой (2.1), называется контурной моделью с параметром.

Замечание. В случае $a=0$ модель с распределением вероятностей, задаваемая формулой (2.1), называется контурной моделью ([8]).

Пусть $F(\Gamma)$ — контурный τ-функционал, т. е. $F(\Gamma)\geqslant\tau|\Gamma|$*, где через $|\Gamma|$ мы обозначаем $|\Gamma|=|\mathrm{supp}\,\Gamma|$. τ выбирается таким образом, чтобы выполнялось неравенство $\tau>2\alpha(1,\nu)$ с $\alpha(R,\nu)$ из формулировки леммы 1.2, при этом достаточно положить $R=1$. Мы потребуем дополнительно, чтобы $F(\Gamma)$ было ограничено сверху, т. е. что существует $\tau_1>0$ такое, что

$$\tau|\Gamma|\leqslant F(\Gamma)\leqslant\tau_1|\Gamma|. \tag{2.2}$$

Условие (2.2) выполняется во всех задачах, рассматриваемых нами, поэтому мы будем предполагать его выполненным, не оговаривая этого особо.

Зафиксируем контурный τ-функционал $F(\Gamma)$ и параметр $a>0$ и рассмотрим соответствующую контурную модель с параметром.

Леммы 2.1 и 2.2, доказываемые ниже, относятся к распределениям вероятностей, отвечающим рассматриваемой контурной модели с параметром.

Лемма 2.1. *Для любого $d>0$ найдется $A(d)>0$ такое, что вероятность расположения всех наборов внешних контуров $\{\Gamma_1,\cdots,\Gamma_s\}$, удовлетворяющих неравенству $\sum|V_i|<|V|-A(d)|\Gamma|$, где $|\Gamma|$ — граница объема V, а V_i — объемы, соответствующие контурам Γ_i, не превосходит* $\exp\{-d|\Gamma|\}$.

Доказательство. Рассмотрим следующее выражение $\sum'\prod e^{a|V_i|}\,\Xi(\Gamma_i|F)$, где суммирование производится по всем наборам внешних контуров, для которых $\sum|V_i|<|V|-A(d)|\Gamma|$ с некоторой постоянной $A(d)$, которую мы подберем позже. Так как $\sum'\prod\Xi(\Gamma_i|F)\leqslant\leqslant\Xi_{\mathrm{rar}}(V|F)$, будем иметь

$$\sum{}'\prod e^{|aV_i|}\,\Xi(\Gamma_i|F)=\sum{}'\exp\{a\sum|V_i|\}\prod_i\Xi(\Gamma_i|F)\leqslant$$

$$\leqslant\exp\{a[|V|-A(d)|\Gamma|]\}\,\Xi_{\mathrm{rar}}(V|F). \tag{2.3}$$

Среди всех контуров, носители которых лежат в V, выберем тот, (обозначаемый далее через Γ'), для которого соответствующий объем V' — наибольший. Очевидно

$$\sum\prod e^{a|V_i|}\,\Xi(\Gamma_i|F)\geqslant\exp\{a|V'|\}\,\Xi(\Gamma'|F). \tag{2.4}$$

Вероятность $P\{\sum|V_i|<|V|-A(d)|\Gamma|\}$ есть, согласно определению

$$P\{\sum|V_i|<|V|-A(d)|\Gamma|\}=\frac{\sum'\prod e^{a|V_i|}\,\Xi(\Gamma_i|F)}{\sum\prod e^{a|V_i|}\,\Xi(\Gamma_i|F)}. \tag{2.5}$$

Из формул (2.3), (2.4) и (2.5) будем иметь

---

* Предполагается, что q, $q=1,\cdots,r$ — фиксировано, и всюду в этом параграфе для удобства записи вместо $F_q(\Gamma^q)$ мы будем писать $F(\Gamma)$, опуская индекс q.

$$P\{\sum |V_i| < |V| - A(d)|\Gamma|\} \leqslant \frac{\exp\{a(|V| - A(d)|\Gamma|)\}\,\Xi_{rar}(V|F)}{\exp\{a|V'|\}\,\Xi(\Gamma'|F)} =$$

$$= \exp\{a[|V| - |V'| - A(d)|\Gamma|] + F(\Gamma')\}\,\frac{\Xi_{rar}(V|F)}{\Xi_{rar}(V'|F)}. \qquad (2.6)$$

Воспользуемся теперь представлением разреженной статистической суммы для контурной модели. Как показано в работе [9], имеет место формула

$$\ln \Xi_{rar}(V|F) = s(F)|V| + \Delta(\Gamma|F), \qquad (2.7)$$

где $s(F)$ зависит только от контурного τ-функционала F, и $|\Delta(\Gamma|F)| \leqslant |\Gamma|$ при достаточно большом τ. Учитывая (2.2), из (2.6) и (2.7) получим

$$P\{\sum |V_i| < |V| - A(d)|\Gamma|\} \leqslant \exp\{a(|V'| - |V|) + \Delta(\Gamma|F) - \Delta(\Gamma'|F) +$$
$$+ s(F)(|V| - |V'|) + F(\Gamma') - A(d)\,a|\Gamma|\}. \qquad (2.8)$$

Так как контур Γ' лежит во внутренности объема V, можно предположить, что $|\Gamma'| < 2|\Gamma|$. Кроме того $||V| - |V'|| \leqslant |\Gamma|$, откуда

$$P\{\sum |V_i| < |V| - A(d)|\Gamma|\} \leqslant \exp\{-A(d)\,a|\Gamma| + 2\tau_1|\Gamma| + s(F)|\Gamma| + |\Gamma|\}.$$

Выбирая $A(d)$ таким образом, чтобы $aA(d) - 2\tau_1 - s(F) - 1 = d$, получим требуемое утверждение.

Лемма 2.2. *Для любого* $d > 0$ *можно найти* $B(d) > 0$ *такое, что вероятность всех наборов внешних контуров* $\{\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_n\}$ *в объеме* V, *для которых* $\sum |\Gamma_i| > B(d)|\Gamma|$, *где* $|\Gamma|$ — *длина границы* V, *не превосходит* $\exp\{-d|\Gamma|\}$.

Доказательство. Выберем произвольное число $d > 0$ и выбросим из рассмотрения все наборы внешних контуров, для которых $\sum |V_i| < |V| - A(2d)|\Gamma|$. Согласно лемме 2.1 вероятность таких наборов контуров меньше $\exp\{-2d|\Gamma|\}$. Оценим выражение

$$\sum{}'' \prod e^{a|V_i|}\,\Xi(\Gamma_i|F), \qquad (2.9)$$

где суммирование производится по всем наборам контуров, для которых

$$\sum |V_i| > |V| - A(2d)|\Gamma|, \quad \sum |\Gamma_i| > B(d)|\Gamma|. \qquad (2.10)$$

Воспользовавшись формулой $\Xi(\Gamma|F) = \exp\{-F(\Gamma)\}\,\Xi_{rar}(V|F)$ и очевидным неравенством $\prod \Xi_{rar}(V_i|F) \leqslant \Xi_{rar}(V|F)$, преобразуем (2.9) следующим образом:

$$\sum{}'' \prod e^{a|V_i|}\,\Xi(\Gamma_i|F) \leqslant \sum{}'' \prod \exp\{a|V_i| - F(\Gamma_i)\}\,\Xi_{rar}(V_i|F) \leqslant$$
$$\leqslant \exp\{a|V|\}\,\Xi_{rar}(V|F) \sum{}'' \prod \exp\{-F(\Gamma_i)\}. \qquad (2.11)$$

Используем условия (2.10) для оценки $\sum{}'' \prod \exp\{-F(\Gamma_i)\}$. Множества $V \setminus \bigcup V_i$, как легко видеть, 1-связно по отношению к множеству ∂V (см. определение 1.1), а $\bigcup \operatorname{supp} \Gamma_i$, в свою очередь, 1-связно по отношению к множеству $V \setminus \bigcup V_i$. Вычислим число всех множеств, таких, что $|V| - \sum |V_i| < A(2d)|\Gamma|$ и $\sum |\Gamma_i| = a$. Число способов, которыми можно выбрать множество $V \setminus \cup V_i$, удовлетворяющее равенству $|V| - \sum |V_i| = b$, согласно лемме 1.2, не превосходит $c^{|\partial V| + b} = c^{|\Gamma| + b}$ с некоторой постоянной c, зависящей только от размерности решетки ν. Таким образом, число тех расположений $\{\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n\}$, для которых $|V| - \sum |V_i| < A(2d)|\Gamma|$, не больше $\sum_{b=1}^{A(2d)|\Gamma|} c^{|\Gamma| + b} \leqslant c^{|\Gamma| + A(2d)|\Gamma|} \cdot \frac{c}{c-1}$.

При каждом фиксированном $V \setminus \cup V_i$ число способов, при помощи которых можно расположить $\cup \operatorname{supp} \Gamma_i$, согласно той же самой лемме, не превосходит $c^{|\Gamma| - \sum |V_i|} \cdot c^a \leqslant c^{A(2d)|\Gamma| - a}$. Поэтому число всех расположений внешних контуров, удовлетворяющих условиям $\sum |\Gamma_i| = a$, $\sum |V_i| > |V| - A(2d)|\Gamma|$, не превосходит

$$c^{|\Gamma| + A(2d)|\Gamma|} \cdot c^{A(2d)|\Gamma| - a} \leqslant \exp\{\alpha(2A(2d) - 1)|\Gamma| + \alpha a\},$$

где $\alpha = \ln c$.

Имеем

$$P\{\sum |\Gamma_i| > B(d)|\Gamma|\} = P\{\sum |V_i| < |V| - A(2d)|\Gamma|, \sum |\Gamma_i| > B(d)|\Gamma|\} +$$
$$+ P\{\sum |V_i| > |V| - A(2d)|\Gamma|, \sum |\Gamma_i| > B(d)|\Gamma|\} \leqslant$$
$$\leqslant \exp\{-2d|\Gamma|\} + P\{\sum |V_i| > |V| - A(2d)|\Gamma|, \sum |\Gamma_i| > B(d)|\Gamma|\}. \quad (2.12)$$

Очевидно, что

$$P\{\sum |V_i| > |V| - A(2d)|\Gamma|, \sum |\Gamma_i| > B(d)|\Gamma|\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\sum'' \prod e^{a|V_i|} \Xi(\Gamma_i|F)}{\sum \prod e^{a|V_i|} \Xi(\Gamma_i|F)} \leqslant \frac{\sum'' \prod e^{a|V_i|} \Xi(\Gamma_i|F)}{e^{a|V'|} \Xi(\Gamma'|F)} \leqslant \quad (2.13)$$
$$\leqslant e^{a(|V| - |V'|)} \frac{\Xi_{\mathrm{rar}}(V|F)}{\Xi(\Gamma'|F)} \sum'' \prod \exp\{-F(\Gamma_i)\},$$

где в качестве V', как и в доказательстве леммы 2.1, взято наибольшее из множеств, граница которых содержится во внутренности V.

$$\sum'' \prod \exp\{-F(\Gamma_i)\} \leqslant \sum'' \exp\{-\tau \sum |\Gamma_i|\} \leqslant \sum_{a > B(d)|\Gamma|} N\{(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n):$$
$$: \sum |\Gamma_i| = a\} \exp\{-\tau a\} \leqslant \sum_{a > B(d)|\Gamma|} \exp\{\alpha(2A(2d) - 1)|\Gamma|\} \exp\{(\alpha - \tau) a\} \leqslant$$
$$\leqslant \exp\{\alpha(2A(2d) - 1)|\Gamma| + (\alpha - \tau) B(d)|\Gamma|\}. \quad (2.14)$$

Рассмотрим величину

$$\exp\{-A(2d)|\Gamma|\} \frac{\exp\{a|V|\} \Xi_{\mathrm{rar}}(V|F)}{\exp\{a|V'|\} \Xi(\Gamma'|F)}.$$

Это выражение совпадает с правой частью неравенства (2.6) и из оценок леммы 2.1 вытекает нераненство

$$\exp\{-A(2d)|\Gamma|\} \frac{\exp\{a|V|\} \Xi_{\mathrm{rar}}(V|F)}{\exp\{a|V'|\} \Xi(\Gamma'|F)} \leqslant \exp\{-2d|\Gamma|\}. \quad (2.15)$$

Теперь из (2.13), (2.14) и (2.15) следует

$$P\{\sum |V_i| > |V| - A(2d)|\Gamma|,\ \sum |\Gamma_i| > B(d)|\Gamma|\} \leqslant$$
$$\leqslant \exp\{[(1+2\alpha)A(2d) + (\alpha - 2d)]|\Gamma| + (\alpha - \tau)B(d)|\Gamma|\}. \qquad (2.16)$$

Так как мы предположили, что τ достаточно большое, $\tau > 2\alpha > \alpha + 1$, то в формуле (2.16) можно подобрать $B(d)$ таким образом, чтобы

$$P\{\sum |\Gamma_i| > B(d)|\Gamma|\} \leqslant \exp\{-d|\Gamma|\},$$

что и доказывает лемму 2.2.

§ 3. Описание периодических гиббсовских состояний

В этом параграфе мы приводим доказательство теоремы, сформулированной во введении.

Рассмотрим относительный потенциал H_0, удовлетворяющий условию Пайерлса с основными состояниями $s_1, \cdots, s_r$, и пусть набор относительных потенциалов $H_1, \cdots, H_{r-1}$ снимает вырождение основного состояния относительного потенциала H_0. При изучении периодических гиббсовских состояний для решетчатой модели с относительным потенциалом $H' = H_0 + \sum h_i H_i$ и параметром β, где $\beta > \beta_0$ и $|h| = \sum |h_i| < B$ для некоторых β_0 и B, мы будем пользоваться представлениями для статистических сумм $\Xi(\Gamma^q|\beta H)$, доказанными в ([1], [2]). Во введении мы уже приводили формулировку теоремы С. А. Пирогова и Я. Г. Синая. Нам понадобится еще один результат этих же авторов, состоящий в следующем. Пусть $\beta > \beta_0$, $|h| < B$ и пусть $J(\beta)h = (a_1, \cdots, a_r) \in W^{r-1}$, где $a_i \geqslant 0$, $\min a_i = 0$. Тогда найдутся r контурных τ-функционала $F_q(\Gamma^q)$, $1 \leqslant q \leqslant r$, таких, что

$$\Xi(\Gamma^q|\beta H') = \exp\{a_q |V(\Gamma^q)|\}\, \Xi(\Gamma^q|F_q),\ 1 \leqslant q \leqslant r. \qquad (3.1)$$

Здесь r равно числу основных состояний H_0, а через $V(\Gamma^q)$ обозначен объем, отвечающий контуру Γ^q, $V(\Gamma^q) = \bigcup_{m \neq q} \mathrm{Int}_m \Gamma^q$. Если $a_q = 0$, то мы будем говорить, что распределение вероятностей в объеме V с граничными условиями s_q описывается контурной моделью, построенной по функционалу F_q. Естественность такого определения следует из формулы (3.1) и определения 2.2. Аналогично, если $a_q > 0$, то мы будем говорить, что распределение вероятностей в объеме V с граничными условиями s_q задается контурной моделью с параметром.

Для описания периодических гиббсовских состояний нам понадобятся также некоторые свойства корреляционных функций. Корреляционные функции для контурных моделей изучены в работах Р. А. Минлоса и Я. Г. Синая ([8], [9]), где исследованы вопросы сходимости допредельных корреляционных функций (т. е. корреляционных функций в объеме V) к предельным корреляционным функциям при $V \to \infty$ и оценена скорость сходимости. Мы используем ниже несколько иной вид корреляционных функций, чем в [9]. Для любого набора $i_1, \cdots, i_n \in V \subset Z^\nu$ и для любых $x_1, \cdots, x_n \in X$ через $r^q(i_1, \cdots$

$\cdots, i_n, x_1, \cdots, x_n | V)$ обозначим корреляционную функцию, равную вероятности того, что в объеме V с граничными условиями s_q в узлах решетки $i_k \in V \subset Z_1$ решетчатая модель находится в состояниях $x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$ соответственно. Необходимые результаты [9] могут быть теперь сформулированы в следующем виде: если $a_q = 0$, $q = 1, \cdots, r$, то корреляционные функции $r^q(i_1, \cdots, i_n, x_1, \cdots, x_n | V)$ таковы, что

1. Для любых фиксированных наборов $(i_1, \cdots, i_n)$ и $(x_1, \cdots, x_n)$ существует предел $r^q(i_1, \cdots, i_n, x_1, \cdots, x_n | V)$ при $V \to \infty$, обозначаемый далее через $r^q(i_1, \cdots, i_n, x_1, \cdots, x_n)$.

2. Справедлива оценка

$$|r^q(i_1, \cdots, i_n, x_1, \cdots, x_n | V) - r^q(i_1, \cdots, i_n, x_1, \cdots, x_n)| \leq$$
$$\leq \exp\{-d(i_1 \cdots, i_n; \partial V)\},$$

где через $d(i_1, \cdots, i_n; \partial V)$ обозначено расстояние между множеством $i_1, \cdots, i_n$ и границей ∂V объема V;

3. Если относительные потенциалы $H_0, H_1, \cdots, H_{r-1}$ периодичны относительно действия группы $\hat{Z} \subset Z$, то тем же самым свойством обладает предельная корреляционная функция. Иными словами, для любого $i \in \hat{Z}$ выполняется равенство

$$r^q(i_1 + i, \cdots, i_n + i, x_1, \cdots, x_n) = r^q(i_1, i_n, x_1, \cdots, x_n).$$

Для конечного множества $V \subset Z$ обозначим через $V'(V)$ множество, обладающее следующими свойствами.

1. $V \subset V'(V) \subset Z$.

2. Любые два гиббсовских распределения в объеме V с граничными условиями $\overline{x(i)}$ и $\overline{y(i)}$ вне V, $P_{\overline{x(i)}}(\cdot)$, $P_{\overline{y(i)}}(\cdot)$, совпадают, если $\overline{x(i)} = \overline{y(i)}$ при $i \in V'(V) \setminus V$.

3. Множество $V'(V)$ — наименьшее из всех множеств, удовлетворяющих условиям 1 и 2.

Существование множества $V'(V)$, удовлетворяющего условиям 1 и 2, следует из финитности рассматриваемых нами относительных потенциалов. Если существует хотя бы одно конечное множество V', удовлетворяющее условиям 1, 2, то очевидно, $V'(V)$ можно подобрать так, чтобы выполнялось также условие 3.

Перейдем теперь к определению приграничных кристаллических компонент. Пусть $s_q(i)$ — основное состояние относительного потенциала H_0 и пусть значения параметров β, h выбраны таким образом, что распределение вероятностей с граничными условиями $s_q(i)$ описывается контурной моделью. Рассмотрим конфигурацию $(V, x(i))$ в объеме V и пусть $(Z \setminus V, \overline{x(i)})$ — произвольная конфигурация вне объема V. Введем в рассмотрение новую конфигурацию на $Z \setminus V$, $(Z \setminus V, \overline{y(i)})$, полагая $\overline{y(i)} = \overline{x(i)}$, если $i \in V'(V) \setminus V$, и $\overline{y(i)} = s_q(i)$, если $i \notin V'(V)$. В силу определения множества $V'(V)$ гиббсовские распределения в объеме V с граничными условиями $\overline{x(i)}$ и $\overline{y(i)}$ совпадают. Конфигу рация на Z^{ν}, проекции которой на множества V и $Z^{\nu}\setminus V$ совпадают с $(V, x(i))$ и $(Z^{\nu}\setminus V, \overline{y(i)})$ соответственно, и обозначаемая далее через $(x_V(i), \overline{y_{Z^{\nu}\setminus V}(i)})$, почти всюду совпадает с $s_q(i)$, что позволяет определить внешние контуры (см. [2]).

Определение 3.1. Приграничными кристаллическими компонентами, отвечающими конфигурации $(x_V(i), \overline{x_{Z^{\nu}\setminus V}(i)})$, объему V и основному состоянию $s_q(i)$, назовем внешние контуры конфигурации $(x_V(i), \overline{y_{Z^{\nu}\setminus V}(i)})$, пересекающиеся с $Z^{\nu}\setminus V$.

Лемма 3.1. *Пусть в объеме V с граничными условиями $\overline{x(i)}$ вне V, $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n$ являются приграничными кристаллическими компонентами для конфигурации $(x_V(i), \overline{x(i)})$. Тогда найдутся постоянные A и $\delta>0$ такие, что вероятность множества всех конфигураций $x_V(i)$, для которых $\sum_{i=1}^{n}|\Gamma_i|>A|\Gamma|$, где $|\Gamma|$ — длина границы V, не превосходит* $\exp(-\delta|\Gamma|)$.

Доказательство. Обозначим через $P\{\Gamma_1, \cdots, \Gamma_k|V, \overline{x(i)}\}$ вероятность того, что в объеме V с граничными условиями $\overline{x(i)}$ приграничными кристаллическими компонентами служат $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_k$ и только они. Согласно лемме 1.1 можно написать оценку

$$P\{\Gamma_1, \cdots, \Gamma_k|V, \overline{x(i)}\}\leqslant\exp\{\alpha|V'(V)\setminus V|\}\,P\{\Gamma_1, \cdots, \Gamma_k|V'(V), s_q(i)\}, \tag{3.2}$$

где через $P\{\Gamma_1, \cdots, \Gamma_k|V'(V), s_q(i)\}$ обозначена вероятность того, что в объеме $V'(V)$ с граничными условиями $s_q(i)$ внешними контурами, пересекающимися с $V'(V)\setminus V$, являются в точности $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_k$. В силу финитности рассматриваемых относительных потенциалов $|V'(V)\setminus V|\leqslant R|\Gamma|$, где $R=\max\{R_0, R_1, \cdots, R_{r-1}\}$, а R_i — радиус взаимодействия относительного потенциала H_i, $0\leqslant i\leqslant r-1$, и неравенство (3.2) переписывается в виде

$$P\{\Gamma_1, \cdots, \Gamma_k|V, \overline{x(i)}\}\leqslant\exp\{\alpha'|\Gamma|\}\,P\{\Gamma_1, \cdots, \Gamma_k|V'(V), s_q(i)\}, \tag{3.2'}$$

где $\alpha'=\alpha R$. Из формулы (3.2) видно, что нам достаточно доказать существование такого числа $A>0$, чтобы вероятность события $\sum|\Gamma_i|>A|\Gamma|$ в объеме $V'(V)$ с граничными условиями $s_q(i)$ была бы меньше $\exp\{-(\delta+\alpha')|\Gamma|\}$ для некоторого $\delta>0$. Так как $a_q=0$, то распределение вероятностей $P\{\cdot|V'(V), s_q\}$ описывается контурной моделью с функционалом $F_q(\Gamma^q)$. Теперь из неравенства Пайерлса (см., например, [4]) и из того, что $F_q(\Gamma^q)$ является контурным τ-функционалом, вытекает следующая цепочка неравенств:

$$P\{\Gamma_1, \cdots, \Gamma_k|V'(V), s_q\}\leqslant\exp\left\{-\sum_{i=1}^{k}F_q(\Gamma_i^q)\right\}\leqslant\exp\left\{-\tau\sum_{i=1}^{k}|\Gamma_i^q|\right\}. \tag{3.3}$$

Каждый набор приграничных кристаллических компонент $\{\Gamma_1, \cdots, \Gamma_k\}$, как легко видеть, R-связен по отношению к множеству $V'(V)\setminus V$. Используя комбинаторную лемму 1.2, получим, что число всех наборов приграничных кристаллических компонент $\{\Gamma_1, \cdots, \Gamma_k\}$ таких, что $\sum|\Gamma_i| = a$, не превосходит $\exp\{\alpha[a + |V'(V)|\setminus V]\}$. Вероятность всех наборов $\{\Gamma_1, \cdots, \Gamma_k\}$, $\sum|\Gamma_i| = a$, меньше

$$\exp\{(\alpha - \tau)a\}\exp\{\alpha|V'(V)\setminus V|\} \leqslant \exp\{(\alpha-\tau)a\}\exp\{\alpha'|\Gamma|\}. \tag{3.4}$$

Вероятность того, что $\sum|\Gamma_i| > b$, оценивается таким образом

$$P\{\sum|\Gamma_i| > b\} \leqslant \sum_{a=b+1}^{\infty} P\{\sum|\Gamma_i| = a\} < \exp\{\alpha'|\Gamma|\}\sum_{a=b+1}^{\infty}\exp\{(\alpha-\tau)a\}.$$

Для завершения доказательства достаточно выбрать b так, чтобы $\alpha'|\Gamma| + (\alpha - \tau)b < -(\delta + \alpha')|\Gamma|$, что всегда возможно, в силу неравенства $\tau > \alpha + 1$.

Перейдем к доказательству теоремы, сформулированной во введении.

Доказательство теоремы. Обозначим через $P(i_1, \cdots, i_n, x_1, \cdots, x_n|\overline{x(i)}, i\in V)$ вероятность того, что в объеме V с граничными условиями $\overline{x(i)}$ в точках $i_1, \cdots, i_n \in V\subset Z^\nu$ решетчатая модель находится в состояниях $x_1, \cdots, x_n \in X$ соответственно. Для описания периодических (трансляционно-инвариантных) гиббсовских состояний нужно исследовать усредненные корреляционные функции $\overline{P}\{i_1, \cdots, i_n, x_1, \cdots, x_n|\overline{x(i)}, i\in V\}$ и их поведение при $V\to\infty$. Усредненную корреляционную функцию в объеме V с граничными условиями $\overline{x(i)}$ определим формулой

$$\overline{P}\{i_1, \cdots, i_n, x_1, \cdots, x_n|\overline{x(i)}, i\in V\} = \frac{1}{|V\cap\hat{Z}|}\sum_i P\{i_1 + i, \cdots, i_n + i, x_1, \cdots, x_n|\overline{x(i)}, i\in V\}, \tag{3.5}$$

где суммирование производится по всем тем $i\in\hat{Z}$, для которых набор $\{i_1 + i, \cdots, i_n + i\}$ целиком лежит в объеме V. Мы будем доказывать теорему отдельно для случаев $N(J(\beta)h) = r-1$ и $N(J(\beta)h) = r$.

а) Пусть $N(J(\beta)h) = r-1$. Тогда уравнения С. А. Пирогова и Я. Г. Синая запишутся в виде

$$\Xi(\Gamma^q|\beta H) = \exp\{a_q|V(\Gamma^q)|\}\,\Xi(\Gamma^q|F_q). \tag{3.6}$$

$a_q \geqslant 0$ и все a_q, за исключением одного, равны нулю. Предположим для определенности, что $a_1 = a_2 = \cdots = a_{r-1} = 0$ и $a_r > 0$. В этом случае распределение вероятностей внешних контуров в объеме V с граничными условиями s_q описывается контурной моделью при каждом $q = 1, \cdots, r-1$. В качестве предельных гиббсовских распределений

$P_1, \cdots, P_{r-1}$ из формулировки теоремы выберем предельные гиббсовские распределения, получаемые предельным переходом при $V \to \infty$ гиббсовских распределений в конечном объеме V с граничными условиями $s_1, \cdots, s_{r-1}$ соответственно ([3]).

Мы докажем следующее утверждение, достаточное для доказательства теоремы.

Для любого конечного $V \subset Z^\nu$ и граничных условий $\overline{x(i)}$ вне V найдутся такие числа

$$\alpha_j(V, \overline{x(i)}),\ j = 1, \cdots, r,\ \sum_{j=1}^{r-1} \alpha_j(V, \overline{x(i)}) = 1$$

и функция

$$\beta(i_1, \cdots, i_k, x_1, \cdots, x_k | V, \overline{x(i)}),\ i_1, \cdots, i_k \in Z^\nu,\ x_1, \cdots, x_k \in X,$$

для каждого фиксированного набора $(i_1, \cdots, i_k, x_1, \cdots, x_k)$ стремящаяся к нулю при $V \to \infty$ равномерно по всем $\overline{x(i)}$, так что для усредненной корреляционной функции

$$\overline{P}(i_1, \cdots, i_k, x_1, \cdots, x_k | V, \overline{x(i)}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{r-1} \alpha_j(V, \overline{x(i)})\, r^j(i_1, \cdots, i_k, x_1, \cdots, x_k) + \beta(i_1, \cdots, i_k, x_1, \cdots, x_k | V, \overline{x(i)}). \tag{3.7}$$

Здесь через $r^j(\cdot)$ обозначена, как и выше, предельная корреляционная функция.

Доказательство формулы (3.7) будет приведено позже. А сейчас, предполагая (3.7) выполненным, докажем утверждение теоремы.

В самом деле, пусть P — крайняя точка совокупности периодических гиббсовских состояний, отвечающих выбранным значениям параметров, т. е. P невозможно представить в виде $P = \alpha' P' + \alpha'' P''$, $\alpha' > 0$, $\alpha'' > 0$, $\alpha' + \alpha'' = 1$, а $P' \neq P''$ — периодические гиббсовские состояния с теми же значениями параметров.

Из результатов работы [10] вытекает, что найдется последовательность вложенных объемов $V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n \subset \cdots$, $\cup V_n = Z^\nu$, и последовательность граничных условий $\overline{x_n(i)}$ вне V_n так, что усредненные корреляционные функции $\overline{P}(i_1, \cdots, i_k, x_1, x_2, \cdots, x_k | V_n, \overline{x_n(i)})$ сходятся к $P(i_1, \cdots, i_k, x_1, \cdots, x_k)$ при $n \to \infty$. Воспользуемся формулой (3.7) при $V_n = V$, $\overline{x_n(i)} = \overline{x(i)}$

$$\overline{P}(i_1, \cdots, i_k, x_1, \cdots, x_k | V_n, \overline{x_n(i)}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{r-1} \alpha_j(V_n, \overline{x_n}(i))\, r^j(i_1, \cdots, i_k, x_1, \cdots, x_k) + \beta(i_1, \cdots, i_k, x_1, \cdots, x_k | V_n, x_n(i)). \tag{3.7'}$$

Предположим, что $\alpha_j(V_n, \overline{x_n(i)})$ для всех $j = 1, \cdots, r-1$ сходятся при $n \to \infty$ к некоторым пределам, которые будем обозначать через α_j, $j=1,\cdots, r-1$. Это предположение не нарушает общности, так как в противном случае, очевидно, можно было бы выбрать некоторую подпоследовательность последовательности V_n, для которой $\alpha_j(V_n, \overline{x_n(i)})$ уже сходятся, и проводить все рассуждения для этой подпоследовательности. Легко видеть, что $\alpha_j \geqslant 0$, $j=1,\cdots, r-1$ и $\sum_{j=1}^{r-1} \alpha_j = 1$, поскольку эти свойства выполнялись для $\alpha_j(V_n, \overline{x_n(i)})$ при всех n.

Переходя к пределу в равенстве (3.7′) при $n \to \infty$, получим

$$P(i_1,\cdots, i_k, x_1,\cdots, x_k) = \sum_{j=1}^{r-1} \alpha_j P_j(i_1,\cdots, i_k, x_1,\cdots, x_k) \tag{3.8}$$

для всякого набора $(i_1,\cdots, i_k, x_1,\cdots, x_k)$, $i_1,\cdots, i_k \in Z^\nu$, $x_1,\cdots, x_k \in X'$ т. е. $P = \sum_{j=1}^{r-1} \alpha_j P_j$. Поскольку P, согласно предположению, является крайней точкой совокупности гиббсовских состояний, то все коэффициенты α_j в разложении (3.8), кроме одного, равны нулю. С другой стороны, каждое из гиббсовских состояний P_j, $j=1,\cdots, r-1$ периодично, следовательно, множество крайних точек совокупности гиббсовских состояний есть в точности множество $\{P_1,\cdots, P_{r-1}\}$, откуда следует утверждение теоремы.

Перейдем к доказательству формулы (3.7). Для конечного объема V и конфигурации $x(i)$ на Z^ν определим внешние контуры следующим образом. Обозначим через $V'(V)$ наименьший из всех объемов, содержащих V, такой, что изменение граничных условий вне $V'(V)$ не меняет распределения Гиббса в объеме V. Обозначим через $x'(i)$ конфигурацию на Z^ν, совпадающую с $x(i)$ на $V'(V)$ и с $s_r(i)$ вне $V'(V)$, т. е,

$$x'(i) = \begin{cases} x(i), & i \in V'(V) \\ s_r(i), & i \overline{\in} V'(V), \end{cases}$$

где $s_r(i)$ в соответствии с принятым соглашением таково, что распределение вероятностей внешних контуров в конечном объеме с граничными условиями s_r описывается контурной моделью с параметром $a_r > 0$. Таким образом, конфигурация $x'(i)$ почти всюду совпадает с $s_r(i)$, что позволяет определить внешние контуры для конфигурации $x'(i)$. Эти контуры назовем внешними контурами конфигурации $x(i)$.

Рассмотрим распределение Гиббса в объеме V с граничными условиями $\overline{x(i)}$. Через $\mathbf{A}(\Gamma_1,\cdots,\Gamma_s)$ обозначим множество всех конфигураций $x(i)$, совпадающих с $\overline{x(i)}$ вне V и имеющих контуры $\Gamma_1,\cdots,\Gamma_s$ в качестве внешних контуров. Докажем, что вероятность всех тех $\mathbf{A}(\Gamma_1,\cdots,\Gamma_s)$, для которых $\left||V'(V)| - \sum |V_i|\right| > A\,|\Gamma|$ или $\sum |\Gamma_i| > B|\Gamma|$, стремится к нулю при $V \to \infty$, если соответствующим образом подобрать постоянные A и B. Для этого воспользуемся сначала леммой 1.1, откуда

$$P\{\mathbf{A}(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_s) | V, \overline{x(i)}\} \leqslant \exp\{\alpha |\Gamma|\} P\{\mathbf{A}(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_s) | V'(V), s_r(i)\}. \tag{3.9}$$

Положим $d = 2\alpha$ и воспользуемся леммами 2.1 и 2.2, положив $A = A(d)$ и $B = B(d)$. Вероятность $P\{\cdot | V'(V), s_r(i)\}$ выполнения хотя бы одного из неравенств $||V'(V)| - \sum |V_i|| > A|\Gamma|$ или $\sum |\Gamma_i| > B|\Gamma|$ не превосходит $\exp\{-2\alpha|\Gamma|\}$. Отсюда и из (3.9)

$$P\{x(i): ||V'(V)| - \sum |V_i|| > A|\Gamma| \text{ или } \sum |\Gamma_i| > B|\Gamma| \,|\, V, \overline{x(i)}\} \leqslant \exp\{-\alpha|\Gamma|\}. \tag{3.10}$$

Все остальные наборы внешних контуров $\mathbf{A}(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_s)$ удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered} ||V'(V)| - \sum |V_i|| < A|\Gamma|, \\ \sum |\Gamma_i| < B|\Gamma|. \end{gathered} \tag{3.11}$$

Усредненная корреляционная функция $\overline{P}\{\cdot | V, \overline{x(i)}\}$ может быть записана в виде

$$\overline{P}(i_1, \cdots, i_k, x_1, \cdots, x_k | V, \overline{x, (i)}) = \frac{1}{|V|} \sum_{\substack{i:\, i_p + i \in V \\ p = 1, \cdots, k}} P\{i_1 + i, \cdots, i_k + i, x_1, \cdots$$

$$\cdots, x_k | V, \overline{x(i)}\} = \frac{1}{|V|} \sum_{\mathbf{A}(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_s)} \sum_{\substack{i:\, i_p + i \in V \\ p = 1, \cdots, k}} P\{i_1 + i, \cdots, i_k + i, x_1, \cdots$$

$$\cdots, x_k | \mathbf{A}(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_s)\} P\{\mathbf{A}(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_s)\} = \left(\sum_{\mathbf{A}}{}' + \sum_{\mathbf{A}}{}''\right) P\{\mathbf{A}(\Gamma_1, \cdots$$

$$\cdots, \Gamma_s)\} \frac{1}{|V|} \sum_{i:\, i_p + i \in V} P\{i_1 + i, \cdots, i_k + i, x_1, \cdots, x_k | \mathbf{A}(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_s)\}, \tag{3.12}$$

где сумма с одним штрихом означает суммирование по всем наборам внешних контуров, для которых выполнено условие (3.11), а сумма с двумя штрихами — по всем остальным наборам внешних контуров.

Из формулы (3.10) вытекает, что $\sum_{\mathbf{A}}{}'' P\{\mathbf{A}(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_s)\} \leqslant \exp\{-\alpha|\Gamma|\}$.

Далее из того, что $P\{i_1 + i, \cdots, i_k + i, x_1, \cdots, x_k | \mathbf{A}(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_s)\} \leqslant 1$, следует

$$\sum{}'' P\{\mathbf{A}(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_s)\} \frac{1}{|V|} \sum_{\substack{i:\, i_p + i \in V \\ p = 1, \cdots, k}} P\{i_1 + i, \cdots, i_k + i, x_1, \cdots, x_k | \mathbf{A}(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_s)\} \leqslant \exp\{-\alpha|\Gamma|\}. \tag{3.13}$$

Оценим теперь

$$\sum_{A}' P\{A(\Gamma_1,\cdots,\Gamma_s)\}\frac{1}{|V|}\sum_{\substack{i: i_p+i\in V\\ p=1,\cdots,k}} P\{i_1+i,\cdots,i_k+i,x_1,\cdots$$

$$\cdots,x_k|A(\Gamma_1,\cdots,\Gamma_s)\}. \tag{3.14}$$

Выберем ε так, чтобы $0<\varepsilon<\frac{1}{\nu-1}$, где ν — размерность решетки Z^ν.

Для каждого набора внешних контуров $A(\Gamma_1,\cdots,\Gamma_s)$, удовлетворяющих условиям (3.11), через $V_m(\Gamma_1,\cdots,\Gamma_s)$ обозначим множество тех $i\in Z^\nu$, для которых i_1+i попадает в m-внутренность одного из контуров $\Gamma_1,\cdots,\Gamma_s$, где $m\neq r$, и отстоит от всех носителей контуров $\Gamma_1,\cdots,\Gamma_s$ и от границы объема V на расстоянии, большем $2|\Gamma|^\varepsilon$. Пусть d — диаметр множества $\{i_1,\cdots,i_k\}$. Если $|\Gamma|^\varepsilon>2d$ и $i\in V_m(\Gamma_1,\cdots,\Gamma_s)$, то и весь набор $\{i_1+i,\cdots,i_k+i\}$ попадает в m-внутренность того же контура, в m-внутренности которого лежит точка i_1+i, и отстоит от всех носителей контуров $\Gamma_1,\cdots,\Gamma_s$ и от границы объема V на расстоянии, большем $|\Gamma|^\varepsilon$. Так как $m\neq r$, то в $V_m(\Gamma_1,\cdots,\Gamma_s)$ распределение вероятностей описывается контурной моделью. Отсюда и из свойства 2 корреляционных функций вытекает, что если $i\in V_m(\Gamma_1,\cdots,\Gamma_s)$, то

$$|P\{i_1+i,\cdots,i_k+i,\ x_1,\cdots,x_k|A(\Gamma_1,\cdots,\Gamma_s)\}-r^m(i_1,\cdots,i_k,x_1,\cdots,x_k)|\leqslant$$

$$\leqslant|r^m(i_1,\cdots,i_k,x_1,\cdots,x_k)|\exp\{-|\Gamma|^\varepsilon\} \tag{3.15}$$

при $|\Gamma|^\varepsilon>2d$. Далее, так как $\sum|\Gamma_i|<A|\Gamma|$, то очевидно

$$\left||V|-\sum_m|V_m(\Gamma_1,\cdots,\Gamma_s)|\right|\leqslant 2A|\Gamma||\Gamma|^\varepsilon\leqslant 2A|\Gamma|^{1+\varepsilon}. \tag{3.16}$$

В следующих трех неравенствах (3.17), (3.18), (3.19) предполагается, что фиксирован набор внешних контуров $\Gamma_1,\cdots,\Gamma_s$, удовлетворяющий условиям (3.11), поэтому мы для удобства записи всюду в этих неравенствах вместо $V_m(\Gamma_1,\cdots,\Gamma_s)$ и $A(\Gamma_1,\cdots,\Gamma_s)$ будем писать V_m и A соответственно. Имеем

$$\Bigg|\frac{1}{|V|}\sum_{\substack{i: i_p+i\in V\\ p=1,\cdots,k}} P\{i_1+i,\cdots,i_k+i,x_1,\cdots,x_k|A\}-$$

$$-\frac{1}{|V|}\sum_{i\in\cup V_m} P\{i_1+i,\cdots,i_k+i,\ x_1,\cdots,x_k|A\}\Bigg|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{|V|}\left||V|-\sum_m|V_m|\right|\leqslant\frac{2A|\Gamma|^{1+\varepsilon}}{|V|}, \tag{3.17}$$

$$\left|\frac{1}{|V|}\sum_{i\in\cup V_m} P\{\cdot|A\}-\frac{1}{\sum|V_m|}\sum_{i\in\cup V_m} P\{\cdot|A\}\right|\leqslant\frac{2A|\Gamma|^{1+\varepsilon}}{|V|}, \tag{3.18}$$

и наконец, в силу (3.15) получаем

$$\left| \frac{1}{\sum |V_m|} \sum_{i \in \cup V_m} P\{i_1+i, \cdots, i_k+i, x_1, \cdots, x_k \mid \mathbf{A}\} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sum |V_m|} \sum_m |V_m| \, r^m (i_1, \cdots, i_k, x_1, \cdots, x_k) \right| < \exp\{-|\Gamma|^{\varepsilon}\}. \qquad (3.19)$$

Если V—куб решетки Z^{ν}, т. е. $V = \{(i_1, \cdots, i_{\nu}) \in Z^{\nu}: |i_k| \leqslant R$ для некоторого $R\}$, то $|V| = |\Gamma|^{\frac{\nu}{\nu-1}}$, где ν — размерность решетки Z^{ν}. Поскольку ε было выбрано так, что $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{\nu-1}$, то правые части (3.17) и (3.18) стремятся к нулю при $V \to \infty$. В качестве $\alpha_m(V, \overline{x(i)})$, $m = 1, \cdots, r-1$ возьмем числа

$$\alpha_m = \frac{1}{\sum\limits_{\mathbf{A}}' P\{\mathbf{A}(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_s)\}} \sum_{\mathbf{A}}' P\{\mathbf{A}(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_s)\} \frac{|V_m(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_s)|}{\sum\limits_m |V_m(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_s)|}. \qquad (3.20)$$

Легко видеть, что $\sum\limits_{m=1}^{r-1} \alpha_m = 1$, и α_m не зависят от набора $\{i_1, \cdots, i_k\}$. Так как $\sum'' P\{\mathbf{A}(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_s)\}$, как мы видели, меньше $\exp\{-\alpha|\Gamma|\}$, и $1 - \sum' P\{\mathbf{A}(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_s)\} = \sum'' P\{\mathbf{A}(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_s)\}$, то $\sum' P\{\mathbf{A}(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_s)\}$ стремится к единице при $V \to \infty$. Отсюда с использованием неравенств (3.17)—(3.19) и формулы (3.12) получаем представления (3.7) с α_m, определенными формулой (3.20).

б) Пусть $(N J(\beta) h) = r$. Тогда уравнения С. А. Пирогова и Я. Г. Синая примут вид

$$\Xi(\Gamma^q \mid \beta H') = \Xi(\Gamma^q \mid F_q). \qquad (3.21)$$

В этом случае распределение вероятностей внешних контуров в объеме V с граничными условиями s_q описывается контурной моделью при каждом $q = 1, \cdots, r$. В качестве $P_1, \cdots, P_r$ выберем предельные гиббсовские распределения, получаемые предельным переходом при $V \to \infty$ гиббсовских распределений в конечном объеме V с граничными условиями $s_1, \cdots, s_r$ соответственно. Как и в пункте а), для доказательства теоремы достаточно получить представление для усредненной корреляционной функции, аналогичное представлению (3.7), т. е. для любого набора $\{i_1, \cdots, i_k, x_1, \cdots, x_k\}$

$$\overline{F}\{i_1, \cdots, i_k, x_1, \cdots, x_k \mid V, \overline{x(i)}\} = \sum_{q=1}^{r} \alpha_q(V, \overline{x(i)}) \, r^q (i_1, \cdots, i_k, x_1, \cdots, x_k) +$$

$$+ \beta(i_1, \cdots, i_k, x_1, \cdots, x_k \mid V, \overline{x(i)}), \qquad (3.22)$$

где через $r^q(i_1, \cdots, i_k, x_1, \cdots, x_k)$ обозначена предельная корреляционная функция, $\beta(\cdot \mid V, \overline{x(i)})$ стремится к нулю при $V \to \infty$ равномерно по всем $\overline{x(i)}$, и $\alpha_q(V, \overline{x(i)})$, $1 \leqslant q \leqslant r$ зависят только от объема и граничных условий $\overline{x(i)}$, при этом $\alpha_q \geqslant 0$ и $\sum_{q=1}^{r} \alpha_q = 1$. Здесь r равно числу основных состояний относительного потенциала H_0.

Событие, состоящее в том, что фиксированы приграничные кристаллические компоненты $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_s$, отвечающие объему V и основному состоянию s_1 относительного потенциала H_0, обозначим через $\mathbf{A}(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_s)$, и запишем усредненную корреляционную функцию в виде

$$\overline{P}\{i_1, \cdots, i_n, x_1, \cdots, x_n | V, \overline{x(i)}\} =$$

$$= \frac{1}{|V|} \sum_{\substack{i: i_k + i \in V \\ k=1, \cdots, n}} P\{i_1 + i, \cdots, i_n + i, x_1, \cdots, x_n | V, \overline{x(i)}\} =$$

$$= \frac{1}{|V|} \sum_{\substack{i: i_k + i \in V \\ k=1, \cdots, n}} \sum_{\mathbf{A}} P\{i_1 + i, \cdots, i_n + i, x_1, \cdots, x_n | \mathbf{A}(\Gamma_1, \cdots$$

$$\cdots, \Gamma_s)\} P\{\mathbf{A}(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_s)\}. \tag{3.23}$$

Меняя порядок суммирования в формуле (3.23), будем иметь

$$\overline{P}\{i_1, \cdots, i_n, x_1, \cdots, x_n | V, \overline{x(i)}\} =$$

$$= \left(\sum_{\mathbf{A}}' + \sum_{\mathbf{A}}''\right) \frac{1}{|V|} \sum_{\substack{i: i_k + i \in V \\ k=1, \cdots, n}} P\{i_1 + i, \cdots, i_n + i, x_1, \cdots, x_n | \mathbf{A}(\Gamma_1, \cdots$$

$$\cdots, \Gamma_s)\} P\{\mathbf{A}(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_s)\}, \tag{3.24}$$

где сумма с одним штрихом означает суммирование по всем тем наборам приграничных кристаллических компонент $\{\Gamma_1, \cdots, \Gamma_s\}$, для которых $\sum |\Gamma_i| < A |\Gamma|$, а сумма с двумя штрихами — по всем остальным наборам приграничных кристаллических компонент. Число A выбрано в соответствии с леммой 3.1 таким образом, чтобы вероятность неравенства $\sum |\Gamma_i| > A |\Gamma|$ была бы меньше $\exp\{-\tau |\Gamma|\}$ для некоторого $\tau > 0$. Таким образом, $\sum'' P\{\mathbf{A}(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_s)\} \leqslant \exp\{-\tau |\Gamma|\}$, откуда вытекает, что второе слагаемое в правой части (3.24) не превосходит $\exp\{-\tau |\Gamma|\}$. Сумму с одним штрихом в (3.23) можно вычислить при помощи тех же рассуждений, что и в пункте а), откуда получим представления (3.22), что и доказывает теорему.

В заключение выражаю благодарность Я. Г. Синаю, под руководством которого выполнена эта работа, а также С. А Пирогову за ценные замечания.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
Институт математики АН Армянской ССР

Поступила 5.IX.1976

ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ Դ. Հ. Գիբսի սահմանային պարբերական բաշխումներ ամբողջաթիվ ցանցի վրա որոշված մոդելների համար. *(ամփոփում)*

Հոդվածում ուսումնասիրվում են Գիբսի սահմանային պարբերական բաշխումները ամբողջաթիվ ցանցի վրա որոշված մոդելների համար։

Որոշակի ձևով ընտրված պարամետրների արժեքների համար ապացուցվում է, որ վերջավոր թվով գիբսյան սահմանային բաշխումների միջոցով (այսպես կոչված մաքուր թերմոդինամիկական ֆազաներով) ծնված ուռուցիկ գծային թաղանթը համընկնում է Գիբսի սահմանային պարբերական բաշխումների բազմության հետ։

D. H. MARTIROSIAN. *Equilibrium states for classical lattice models*
(summary)

Periodic equilibrium states for some lattice models are studied.

It is proved that under certain conditions on the parameters of models every periodic equilibrium states is a superposition of a finite number equilibrium states (the so called pure thermodynamic phases).

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. А. Пирогов, Я. Г. Синай.* Фазовые диаграммы классических решетчатых систем, Теор. и матем. физика, 25, № 3, 1975, 358–369.
2. *С. А. Пирогов, Я. Г. Синай.* Фазовые диаграммы классических решетчатых систем, Теор. и матем. физика, 26, № 1, 1976, 61–76.
3. *Р. Л. Добрушин.* Гиббсовские случайные поля для решетчатых систем с попарным взаимодействием, Функ. анализ и его прил., 2, вып. 4, 1968, 31–43.
4. *G. Gallavotti, S. Miracle-Sole.* Equilibrium States of the Ising Model in the two-phase region, Physical Review, B, v. 5, № 7, 1972, 2555–2559.
5. *R. Griffiths.* Peierls proof of spontaneous magnetization in two-dimensional Ising ferromagnet, Physical Review, A, 136, 1964, 437–438.
6. *Р. Л. Добрушин.* Существование фазового перехода в двумерной и трехмерной моделях Изинга, Теор. вероятн. и ее прим., 10, вып. 2, 1965, 209–230.
7. *С. А. Пирогов.* Существование фаз для решетчатых моделей с несколькими типами частиц, Изв. АН СССР, серия матем., 39, № 6, 1975, 1404–1433.
8. *Р. А. Минлос, Я. Г. Синай.* Явление „разделения фаз" при низких температурах в некоторых решетчатых моделях газа, I, Матем. сб., 73, (115), № 3, 1967, 375–448.
9. *Р. А. Минлос, Я. Г. Синай.* Явление „разделения фаз" при низких температурах в некоторых решетчатых моделях газа, II, Труды ММО, 19, 1968.
10. *H.–O. Georgii.* Two Remarks on Extremal Equilibrium States, Commun. math. Phys., v. 32, 107–108, 1973.