ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIV, № 1, 1979 Математика

Ю. А. КУТОЯНЦ

ЛОКАЛЬНАЯ АСИМПТОТИЧЕСКАЯ НОРМАЛЬНОСТЬ ДЛЯ ПРОЦЕССОВ ПУАССОНОВСКОГО ТИПА

§ 1. Введение

Локальная асимптотическая нормальность (ЛАН) [1] семейства мер, отвечающих наблюдениям, позволяет строить асимптотически локально наиболее мощные критерии проверки гипотез [2], устанавливать минимаксную границу на риск произвольных оценок [3] и помогает исследовать асимптотические свойства оценок [4]. Поэтому определенный интерес представляет задача получения условий ЛАН для различных схем наблюдений в возможно минимальных предположениях. В случае независимых одинаково распределенных случайных величин весьма слабые условия ЛАН получил Я. Гаек [3]. Когда случайные величины независимы и неодинаково распределены условия ЛАН сформулированы И. А. Ибрагимовым, Р. З. Хасьминским [5]. Кроме того, в [5] приведены условия ЛАН для наблюдений диффузионного процесса с неслучайным коэффициентом сноса. В работе автора [6] установлена ЛАН для наблюдений процесса диффузионного типа. В случае наблюдений неоднородного процесса Пуассона в работе [7] использована ЛАН семейства мер для описания асимптотических свойств оценок.

В настоящей работе даны условия ЛАН для наблюдений процесса пуассоновского типа. Процесс пуассоновского типа—это, грубо говоря, процесс Пуассона, интенсивность которого сама является случайным процессом. Его называют также процессом Кокса или дважды случайным (doubly stochastic) процессом Пуассона [8] и используют как вполне удовлетворительную модель ряда явлений в физике, технике, биологии и т. д. [9]. В частности, неоднородный процесс Пуассона также является процессом пуассоновского типа. Мы будем придерживаться терминологии статьи Ю. М. Кабанова, Р. Ш. Липцера, А. Н. Ширяева [10], откуда заимствуем формулу отношения правдоподобия.

В § 2 устанавливается теорема об асимптотической нормальности стохастического интеграла, которая затем используется в § 3 для доказательства ЛАН семейства мер процесса пуассоновского типа, распределение которого зависит от одномерного параметра θ. Этот результат распространяется в § 4 на случай многомерного θ. В § 5 приводятся два примера ЛАН семейств мер. § 6 и § 7 посвящены приме-

нениям ЛАН к задачам статистики: проверки гипотез и оценки параметров соответственно.

§ 2. Асимптотическая нормальность стохастического интеграла

Пусть $\{\Omega, F, P\}$ — полное вероятностное пространство; $\{F_t, t \geqslant 0\}$ — неубывающее семейство непрерывных справа пополненных σ-алгебр $F_t \subset F$; $\mathbf{X}$ — пространство непрерывных справа кусочно-постоянных функций $x = \{x(t), t \geqslant 0\}$ таких, что

$$x(0) = 0, \quad x(t) = x(t-) + (1 \text{ или } 0)$$

для всех $t < \infty$. Подпространство функций из $\mathbf{X}$, заданных на $[0, T]$, обозначим $\mathbf{X}_T$. На пространстве $\mathbf{X}$ определим семейство σ-алгебр $\{\mathbf{B}_t, t \geqslant 0\}$, полагая $\mathbf{B}_t = \sigma\{x(s), 0 \leqslant s \leqslant t\}$.

Определение 2.1. Заданный на вероятностном пространстве $\{\Omega, F, P\}$ случайный процесс $X = \{X(t), F_t; t \geqslant 0\}$ с траекториями, принадлежащими $\mathbf{X}$, называется *точечным процессом*.

Согласно обобщенному разложению Дуба-Мейера точечный процесс X допускает представление

$$X(t) = A(t) + m(t), \quad t \geqslant 0,$$

где $m = \{m(t), F_t; t \geqslant 0\}$ — локальный мартингал с непрерывными справа траекториями, $A = \{A(t), F_t; t \geqslant 0\}$ — натуральный возрастающий процесс, называемый *компенсатором*.

Определение 2.2. Точечный процесс X с компенсатором A называется *процессом пуассоновского типа*, если при всех $T > 0$

$$A(T) = \int_0^T S(t)\, dt,$$

где $S = \{S(t), F_t; t \geqslant 0\}$ — некоторый предсказуемый процесс, называемый *интенсивностью* процесса X.

Для процесса пуассоновского типа X справедливо следующее (минимальное) представление

$$X(T) = \int_0^T S(t)\, dt + n(t), \quad T > 0$$

с локальным мартингалом $n = \{n(t), F_t^X; t \geqslant 0\}$ и интенсивностью $\tilde{S}(t) = E\{S(t) \mid F_t^X\}$, $t \geqslant 0$, где σ-алгебра $F_t^X = \sigma\{X(s), 0 \leqslant s \leqslant t\}$ ([10], теорема 5). В соответствии с этим представлением всюду далее сразу считаем $F_t = F_t^X$ и следовательно $\tilde{S}(t) = S(t)$, $m(t) = n(t)$, $t \geqslant 0$.

Пусть $f = \{f(t), F_t;\ t \geqslant 0\}$ — предсказуемый процесс и

$$E\int_0^T |f(t)|^2 S(t)\,dt < \infty. \tag{2.1}$$

Тогда можно определить интеграл Лебега—Стильтьеса

$$\int_0^T f(t)\,dY(t) = \int_0^T f(t)\,dX(t) - \int_0^T f(t)\,S(t)\,dt \tag{2.2}$$

со следующим свойством:

$$E\int_0^T f(t)\,dY(t) = 0. \tag{2.3}$$

Если, кроме того, и

$$E\int_0^T f(t)^2\,S(t)\,dt < \infty, \tag{2.4}$$

то

$$E\left|\int_0^T f(t)\,dY(t)\right|^2 = E\int_0^T f(t)^2\,S(t)\,dt.$$

Центральную предельную теорему для стохастического интеграла докажем в так называемой схеме серий. При каждом $T < \infty$ считаем заданным предсказуемый процесс $f_T = \{f_T(t), F_t;\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$, удовлетворяющий условию (2.4). Введем стохастический интеграл

$$F_T = \int_0^T f_T(t)\,dY(t).$$

Асимптотическую нормальность случайной величины g_T с параметрами (a, b) обозначим $L\{g_T\} = N(a, b)$.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия*

A — I. $$P - \lim_{T\to\infty}\int_0^T f_T(t)^2\,S(t)\,dt = s^2,\quad s^2 < \infty.$$

A — II. *При некотором* $\delta > 0$

$$\lim_{T\to\infty} E\int_0^T |f_T(t)|^{2+\delta}\,S(t)\,dt = 0.$$

Тогда

$$L\left\{\int_0^T f_T(t)\,dY(t)\right\} = N(0, s^2).$$

Доказательство. При каждом $T<\infty$ введем следующие объекты:

1) процесс Пуассона $(N(t), F_T;\ T\leqslant t\leqslant T+1)$ интенсивности T и процесс пуассоновского типа

$$X^*(t)=\begin{cases}X(t),\ 0\leqslant t\leqslant T\\ N(t),\ T<t\leqslant T+1,\end{cases}$$

2) функции

$$f_T^*(t)=\begin{cases}f_T(t),\ 0\leqslant t\leqslant T\\ \dfrac{\sigma}{\sqrt{T}},\ T<t\leqslant T+1,\end{cases}\qquad S^*(t)=\begin{cases}S(t),\ 0\leqslant t\leqslant T\\ T,\ \ T<t\leqslant T+1,\end{cases}$$

3) марковский момент

$$\tau_T=\inf\left\{\tau:\int_0^\tau f_T^*(t)^2\,S^*(t)\,dt=\tau^2\right\},$$

4) остановленный стохастический интеграл

$$\eta_T=\int_0^{\tau_T} f_T^*(t)\,dY^*(t),$$

где $Y^*(\cdot)$ определяется по $X^*(\cdot)$.

Сначала условие А—II позволит нам доказать асимптотическую нормальность η_T, а затем с помощью А—I установим сходимость разности $F_T-\eta_T$ по вероятности к нулю, откуда и будет следовать асимптотическая нормальность F_T.

Введем случайный процесс

$$\zeta_T(t)=\exp\left\{i\lambda\int_0^t f_T^*(\tau)\,dY^*(\tau)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\lambda^2\int_0^t f_T^*(\tau)^2\,S^*(\tau)\,d\tau\right\},\ 0\leqslant t\leqslant T+1,\ \lambda\in R^1,$$

для которого по обобщенной формуле Ито справедливо представление

$$\zeta_T(t)=1+\int_0^t\zeta_T(t-)\left[\exp\{i\lambda f_T^*(\tau)\}-1\right]dY^*(\tau)+$$

$$+\int_0^t\zeta_T(\tau-)\left[\exp\{i\lambda f_T^*(\tau)\}-1-i\lambda f_T^*(\tau)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\lambda^2 f_T^*(\tau)^2\right]S^*(\tau)\,d\tau. \qquad (2.5)$$

Возьмем математическое ожидание полученного равенства при $t = \tau_T$ и придем к

$$E\zeta_T(\tau_T) = 1 + E\int_0^{\tau_T} \zeta_T(\tau-)\Big[\exp\{i\lambda f_T^*(\tau)\} -$$

$$-1 - i\lambda f_T^*(\tau) + \frac{1}{2}\lambda^2 f_T^*(\tau)^2\Big] S^*(\tau)\,d\tau, \qquad (2.6)$$

так как для второго слагаемого в (2.5) выполнено условие (2 4):

$$E\int_0^{\tau_T} |\zeta_T(t-)|^2 \,[\exp\{i\lambda f_T^*(t)\} - 1|^2 \,S^*(t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \lambda^2 \exp(\lambda^2\sigma^2)\, E\int_0^{\tau_T} f_T^*(t)^2\, S^*(t)\,dt < \infty,$$

где мы воспользовались известным неравенством

$$|e^{i\varphi} - 1| \leqslant |\varphi|$$

и определением τ_T.

С помощью другого известного неравенства

$$\left| e^{i\varphi} - 1 - i\varphi + \frac{1}{2}\varphi^2 \right| \leqslant C(\delta)|\varphi|^{2+\delta},\ \delta > 0$$

равенства (2.6) и условия A—II получаем сходимость

$$|E\zeta_T(\tau_T) - 1| \leqslant C(\delta)\exp\left\{\frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2\right\} \times$$

$$\times E\int_0^{\tau_T} |f_T^*(t)|^{2+\delta} S^*(t)\,dt \to 0,$$

Следовательно $\lim_{T\to\infty} E\zeta_T(\tau_T) = 1$. По определению $\zeta_T(\tau_T)$ имеет место равенство $E\zeta_T(\tau_T) = \Psi_T(\lambda)\exp\left\{\frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2\right\}$, где $\Psi_T(\lambda)$—характеристическая функция интеграла η_T, откуда получаем сходимость $\Psi_T(\lambda) \to \exp\left\{-\frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2\right\}$, а так как сходимость характеристических функций эквивалентна сходимости функций распределения—асимптотическая нормальность η_T доказана.

Далее, для любых положительных a, b справедливо неравенство

$$P\{|F_T - \eta_T| > a\} = P\left\{\left|\int_0^{T+1} f_T^*(t)\,[\chi_{\{t<\tau\}} - \chi_{\{t<\tau_T\}}]\,dY^*(t)\right| >\right.$$

$$> a \Big\} \leqslant \frac{b}{a^2} + P\Big\{\int_0^{T+1} f_T^*(t)^2 \,|\, \chi_{\{t<T\}} -$$

$$- \chi_{\{t<\tau_T\}} \,|\, S^*(t)\, dt > b\Big\}, \tag{2.7}$$

где $\chi_{\{B\}}$ — индикатор события B. Вероятность события в правой части (2.7) обозначим $P\,|A|$. По формуле полной вероятности

$$P\,|A| = P\,|A,\ \tau_T < T| + P\,|A,\ \tau_T = T| + P\,|A,\ \tau_T > T|.$$

Очевидно $P\,|A,\ \tau_T = T| = 0$. По определению марковских моментов

$$P\,|A,\ \tau_T < T| = P\Big\{\int_0^T f_T(t)^2\, S(t)\, dt - \sigma^2 > b,\ \tau_T < T\Big\},$$

$$P\,|A,\ \tau_T > T| = P\Big\{\sigma^2 - \int_0^T f_T(t)^2\, S(t)\, dt,\ \tau_T > T\Big\}.$$

Следовательно

$$P\,|A| \leqslant 2\,P\Big\{\Big|\int_0^T f_T(t)^2\, S(t)\, dt - \sigma^2\Big| > b\Big\}.$$

Но последняя вероятность по условию A–I при $T \to \infty$ стремится к нулю. Теперь сходимость $P\,\{|F_T - \eta_T| > a\} \to 0$ вытекает из произвольности a и b.

§ 3. ЛАН для одномерного параметра

Пусть задано открытое множество $\Theta \subset R^k$ и семейство мер $\mathbf{P}^{(T)} = \{P_\vartheta^{(T)},\ \vartheta \in \Theta\}$ в $(\mathbf{X}_T, \mathbf{B}_T)$. Будем говорить, что семейство $\mathbf{P}^{(T)}$ ЛАН в Θ, если существует такая невырожденная матрица $\varphi_T(\vartheta) = \varphi_T(0)_{k\times k}$, что отношение правдоподобия

$$Z_T(u) = \frac{dP^{(T)}_{\vartheta + \varphi_T(\vartheta)\,u}}{dP^{(T)}_\vartheta}(X_T),\quad u \in U_{\vartheta,T} = \{u:\ \vartheta + \varphi_T(\vartheta)\,u \in \Theta\}$$

допускает представление [5]

$$Z_T(u) = \exp\Big\{(u,\ \Delta_T(\vartheta, X_T)) - \frac{1}{2}\,|u|^2 + \psi_T(\vartheta,\ u,\ X_T)\Big\}, \tag{3.1}$$

где $(\cdot,\ *\ )$ — скалярное произведение и $|\cdot|$ — норма в R^k и при $T \to \infty$

$$L\,|\Delta_T(\vartheta, X_T)\,|P_\vartheta^{(T)}| = N(0,\ J), \tag{3.2}$$

J — единичная матрица размерности $k \times k$,

$$P_\vartheta - \lim_{T\to\infty} \varphi_T(\vartheta, u, X_T) = 0. \tag{3.3}$$

В настоящем параграфе устанавливается ЛАН семейства мер $|P_\vartheta^{(T)}, \vartheta\in\Theta|$, наведенных в $(\mathbf{X}_T, \mathbf{B}_T)$ реализациями процессов пуассоновского типа интенсивностей $S_T(\vartheta) = |S(\vartheta, t), F_t;\ 0\leqslant t\leqslant T|$ в случае одномерного множества $\Theta = (\alpha, \beta)\subset R^1$.

Обозначим $E_\vartheta(\cdot)$ математическое ожидание по мере $P_\vartheta^{(T)}$, $\dot S(\vartheta, t) = \frac{\partial}{\partial\vartheta} S(\vartheta, t)$,

$$\varphi_T(\vartheta) = \left\{ E_\vartheta \int_0^T \frac{\dot S(\vartheta, t)^2}{S(\vartheta, t)}\, dt \right\}^{-1/2}$$

и всюду далее считаем интенсивность $S(\vartheta, t)$ при п.в. $t\geqslant 0$ положительным с вероятностью 1 случайным процессом.

Введем условия на семейство интенсивностей $|S_T(\vartheta), \vartheta\in\Theta|$.

B–1. *При всех* $\vartheta, \bar\vartheta\in\Theta$ *и* $T<\infty$

$$P_\vartheta^{(T)}\left\{ \int_0^T \frac{S(\bar\vartheta, t)}{S(\vartheta, t)}\, dt < \infty \right\} = 1.$$

B–II. *Случайная функция* $|S(\vartheta, t), \vartheta\in\Theta|$ *при почти всех* $t\geqslant 0$ *абсолютно непрерывная по* ϑ, *т. е. с вероятностью* 1

$$S(\bar\vartheta, t) - S(\vartheta, t) = \int_\vartheta^{\bar\vartheta} \dot S(y, t)\, dy$$

и при всех $\vartheta\in\Theta$ *имеет место*

$$0 < E_\vartheta \int_0^T \frac{\dot S(\vartheta, t)^2}{S(\vartheta, t)}\, dt < \infty.$$

B–III. *При всех* $\vartheta\in\Theta$

$$P_\vartheta - \lim_{T\to\infty} \varphi_T(\vartheta)^2 \int_0^T \frac{\dot S(\vartheta, t)^2}{S(\vartheta, t)}\, dt = 1.$$

B–IV. *Найдется такое* $\delta>0$, *что при всех* $\vartheta\in\Theta$

$$\lim_{T\to\infty} \varphi_T(\vartheta)^{2+\delta} E_\vartheta \int_0^T \left| \frac{\dot S(\vartheta, t)}{S(\vartheta, t)} \right|^{2+\delta} S(\vartheta, t)\, dt = 0.$$

B–V. *Для любого* $C>0$ *и* $\vartheta\in\Theta$

$$\lim_{T\to\infty} \sup_{|\vartheta-y|\vee|\vartheta-z|\leqslant C\varphi_T(\vartheta)} \varphi_T(\vartheta)^2 E_\vartheta \int_0^T \left| \frac{\dot S(z, t)}{S(y, t)} - \frac{\dot S(\vartheta, t)}{S(\vartheta, t)} \right|^2 S(\vartheta, t)\, dt = 0.$$

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия* B—I—B—V, *тогда семейство мер* $\{P_\vartheta^{(T)},\ \vartheta\in\Theta\}$ *при* $T\to\infty$ *локально асимптотически нормальное в* Θ *с правильной нормирующей функцией* $\varphi_T(\vartheta)$ *и*

$$\Delta_T(\vartheta,\ X_T)=\varphi_T(\vartheta)\int_0^T\frac{\dot S(\vartheta,\ t)}{S(\vartheta,\ t)}\,[dX(t)-S(\vartheta,\ t)\,dt].$$

Доказательство. По условию B—I все меры $P_\vartheta^{(T)}$, $\vartheta\in\Theta$ эквивалентны ([10], теорема 1.4) и отношение правдоподобия $Z_T(u)$ имеет вид

$$Z_T(u)=\exp\left\{\int_0^T\ln\frac{S(\vartheta+\varphi_T(\vartheta)\,u,\ t)}{S(\vartheta,\ t)}\,dY(t)-\right.$$

$$\left.-\int_0^T\left|\,S(\vartheta+\varphi_T(\vartheta)\,u,\ t)-S(\vartheta,\ t)-S(\vartheta,\ t)\ln\frac{S(\vartheta+\varphi_T(\vartheta)\,u,t)}{S(\vartheta,\ t)}\right|dt\right\},\quad(3.4)$$

Для разности

$$\int_0^T\ln\frac{S(\vartheta+\varphi_T(\vartheta)\,u,t)}{S(\vartheta,\ t)}\,dY(t)-u\,\Delta_T(\vartheta,\ X_T)\equiv G(T)$$

по свойству стохастических интегралов и условиям B—II, B—III имеем (считаем $u>0$)

$$P_\vartheta^{(T)}\{|G(T)|>\gamma\}\leqslant\frac{1}{\gamma^2}\,E_\vartheta\,G(T)^2=$$

$$=\frac{1}{\gamma^2}\,E_\vartheta\int_0^T\left|\ln\frac{S(\vartheta+\varphi_T(\vartheta)\,u,t)}{S(\vartheta,\ t)}-u\varphi_T(\vartheta)\frac{\dot S(\vartheta,\ t)}{S(\vartheta,\ t)}\right|^2S(\vartheta,\ t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\gamma^2}\,E_\vartheta\int_0^T\left|\int_\vartheta^{\vartheta+\varphi_T(\vartheta)\,u}\int_\vartheta^y\left[\frac{\dot S(z,\ t)}{S(z,\ t)}-\frac{\dot S(\vartheta,\ t)}{S(\vartheta,\ t)}\right]dz\right|^2S(\vartheta,\ t)\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\varphi_T(\vartheta)\,u}{\gamma^2}\int_\vartheta^{\vartheta+\varphi_T(\vartheta)\,u}E_\vartheta\int_0^T\left|\frac{\dot S(y,\ t)}{S(y,\ t)}-\frac{\dot S(\vartheta,\ t)}{S(\vartheta,\ t)}\right|^2S(\vartheta,\ t)\,dt\,dy\to0\quad(3.5)$$

для любого фиксированного u при $T\to\infty$.

Далее, справедливо равенство

$$\frac{1}{2}\,u^2\varphi_T(\vartheta)^2\int_0^T\frac{\dot S(\vartheta,\ t)^2}{S(\vartheta,\ t)}\,dt=\int_0^T\int_\vartheta^{\vartheta+\varphi_T(\vartheta)\,u}\int_\vartheta^y\frac{\dot S(\vartheta,\ t)^2}{S(\vartheta,\ t)^2}\,dz\,dy\,S(\vartheta,\ t)\,dt.$$

Поэтому можно записать

$$\int_0^T \left| S(\theta + \varphi_T(\delta)u, t) - S(\theta, t) - S(\delta, t) \ln \frac{S(\theta + \varphi_T(\delta)u, t)}{S(\theta, t)} \right| dt -$$

$$- \frac{1}{2} u^2 \varphi_T(\delta)^2 \int_0^T \frac{\dot{S}(\theta, t)^2}{S(\delta, t)} dt = \int_0^{T^{\theta+\varphi_T(\delta)u}} \int_0^y \int_0^y \left| \frac{\ddot{S}(z, t)\dot{S}(y, t)}{S(y, t)S(\theta, t)} - \right.$$

$$\left. - \frac{\dot{S}(\delta, t)^2}{S(\delta, t)^2} \right| dz\, dy\, S(\delta, t)\, dt, \tag{3.6}$$

откуда получаем

$$E_\theta \int_0^T \left| \frac{\ddot{S}(z, t)\dot{S}(y, t)}{S(\delta, t)S(y, t)} - \frac{\dot{S}(\delta, t)^2}{S(\delta, t)^2} \right| S(\theta, t)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant E_\theta \int_0^T \left| \frac{\dot{S}(y, t)^2}{S(y, t)^2} - \frac{\dot{S}(\delta, t)^2}{S(\delta, t)^2} \right| S(\theta, t)\, dt +$$

$$+ E_\theta \int_0^T \left| \frac{\ddot{S}(z, t)}{S(\delta, t)} - \frac{\dot{S}(y, t)}{S(y, t)} \right| \left| \frac{\dot{S}(y, t)}{S(y, t)} \right| S(\theta, t)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ E_\theta \int_0^T \left| \frac{\dot{S}(y, t)}{S(y, t)} - \frac{\dot{S}(\delta, t)}{S(\delta, t)} \right|^2 S(\delta, t)\, dt \times \right.$$

$$\left. \times E_\theta \int_0^T \left| \frac{\dot{S}(y, t)}{S(y, t)} + \frac{\dot{S}(\theta, t)}{S(\theta, t)} \right|^2 S(\theta, t)\, dt \right\}^{1/2} +$$

$$+ \left\{ E_\theta \int_0^T \left| \frac{\dot{S}(y, t)}{S(y, t)} - \frac{\ddot{S}(z, t)}{S(\delta, t)} \right|^2 S(\theta, t)\, dt \times \right.$$

$$\left. \times E_\theta \int_0^T \frac{\dot{S}(y, t)^2}{S(y, t)^2} S(\theta, t)\, dt \right\}^{1/2}. \tag{3.7}$$

По условию B—V

$$E_\theta \int_0^T \frac{\dot{S}(y, t)^2}{S(y, t)^2} S(\theta, t)\, dt \leqslant 2E_\theta \int_0^T \frac{\dot{S}(\theta, t)^2}{S(\theta, t)} dt +$$

$$+ 2 \cdot E_\theta \int_0^T \left| \frac{\dot{S}(y, t)}{S(y, t)} - \frac{\dot{S}(\delta, t)}{S(\delta, t)} \right|^2 S(\delta, t)\, dt = 2\varphi_T(\delta)^{-2}(1 + o(1)),$$

поэтому правая часть неравенства (3.7) равна $\varepsilon_T(\vartheta)^{-2} o(1)$, что вместе с (3.6) и условием B—III позволяет записать

$$P_\vartheta - \lim_{T\to\infty} \int_0^T \Big| S(\vartheta + \varepsilon_T(\vartheta)\, u,\ t) - S(\vartheta,\ t) -$$

$$- S(\vartheta,\ t) \ln \frac{S(\vartheta + \varepsilon_T(\vartheta)\, u,\ t)}{S(\vartheta,\ t)} \Big| \, dt = \frac{1}{2} u^2. \tag{3.8}$$

Условия B—III, B—IV обеспечивают по теореме 2.1 асимптотическую нормальность с параметрами $(0,1)$ случайной величины $\Delta_T(\vartheta, X_T)$ (следует положить $f_T(t) = \varepsilon_T(\vartheta)\, S(\vartheta,\ t)\, S(\vartheta,\ t)^{-1}$).

Теперь утверждение теоремы 3.1 вытекает из соотношений (3.5)—(3.8) и представления (3.4).

§ 4. ЛАН для многомерного параметра

Пусть Θ — открытое подмножество R^k, при каждом $\vartheta \in \Theta$ на пространстве (Ω, F, P) задан процесс пуассоновского типа $X = (X(t),\ F_t,\ t \geqslant 0)$ интенсивности $S(\vartheta) = (S(\vartheta,\ t),\ F_t;\ t \geqslant 0)$ и $\mathbf{P}^{(T)} = (P_\vartheta^{(T)},\ \vartheta \in \Theta)$ — семейство мер, наведенных в $(\mathbf{X}_T,\ \mathbf{B}_T)$ процессами X_T, $\vartheta \in \Theta$. Кроме того, введем обозначения: $\dot{S}_j(\vartheta,\ t) = \dfrac{\partial}{\partial \vartheta_j} S(\vartheta,\ t)$, вектор $\dot{S}(\vartheta,\ t) = (\dot{S}_1(\vartheta, t),\ \cdots,\ \dot{S}_k(\vartheta,\ t))$, матрица

$$I_T(\vartheta)_{ij} = E_\vartheta \int_0^T \dot{S}_i(\vartheta,\ t)\, \dot{S}_j(\vartheta,\ t)\, S(\vartheta,\ t)^{-1}\, dt \quad i,\ j = 1, \cdots, k.$$

Следующие условия позволят доказать многомерный аналог теоремы 3.1.

C—I. *При всех* $\vartheta, \tilde{\vartheta} \in \Theta$ *и* $T < \infty$

$$P_\vartheta^{(T)} \left\{ \int_0^T \frac{\dot{S}(\tilde{\vartheta},\ t)}{S(\vartheta,\ t)}\, dt < \infty \right\} = 1.$$

C—II. *Случайная функция* $(S(\vartheta,\ t),\ \vartheta \in \Theta)$ *при всех* $t > 0$ *непрерывно дифференцируема с вер. 1 по каждой составляющей* ϑ, *причем*

$$E_\vartheta \int_0^T \dot{S}_j(\vartheta,\ t)^2\, S(\vartheta,\ t)^{-1}\, dt < \infty,$$

при всех $\vartheta \in \Theta$ *и* $j = 1, \cdots, k$. *Информационная матрица Фишера* $I_T(\vartheta)$ *положительно определена.*

По этому условию существует положительно определенная, симметричная матрица $\varphi_T(\theta)$ такая, что $I_T(\theta)^{-1} = \varphi_T(\theta)\,\varphi_T(\theta)'$ (штрих обозначает транспонирование).

C—III. *Для любого* $\lambda \in R^k$ *и* $\theta \in H$

$$P_\theta - \lim_{T\to\infty} \int_0^T |\lambda'\varphi_T(\theta) S(\theta, t)|^2\, S(\theta, t)^{-1}\, dt = |\lambda|^2.$$

C—IV. *Найдется такое* $\delta > 0$, *что при всех* $\lambda \in R^k$ *и* $\theta \in H$

$$\lim_{T\to\infty} E_\theta \int_0^T |\lambda'\varphi_T(\theta) S(\theta, t)|^2 \cdot S(\theta, t)^{-1}\, dt = 0.$$

C—V. *Для любых* $C > 0$, $\lambda \in R^k$ *и* $\theta \in H$

$$\lim_{T\to\infty} \sup_{|u|+|v|<C} E_\theta \int_0^T \left(\frac{S(\theta+\varphi_T(\theta)\,u, t)}{S(\theta+\varphi_T(\theta)\,v, t)} - \frac{S(\theta, t)}{S(\theta, t)} + \varphi_T(\theta)\,\lambda \right)^2 S(\theta, t)^{-1}\, dt = 0.$$

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия* C—I—C—V, *тогда семейство мер* $\{P_\theta^{(T)}, \theta \in H\}$ *при* $T \to \infty$ *локально асимптотически нормальное в* H *с правильной нормирующей матрицей* $\varphi_T(\theta)$ *и вектором*

$$\Delta_T(\theta, X_T) = \varphi_T(\theta) \int_0^T S(\theta, t)\, S(\theta, t)^{-1} [dX(t) - S(\theta, t)\, dt].$$

Доказательство этой теоремы можно вывести из теоремы 3.1, воспользовавшись следующим приемом [5]: для любого вектора $u \in R^k$ обозначим $l = u/|u|$, $|u| = s$. Тогда

$$Z_T(u) = \frac{dP_{\theta+s\varphi_T(\theta)\,l}^{(T)}}{dP_\theta^{(T)}}(X_T) = \bar{Z}_T(s).$$

Процесс $\bar{Z}_T(s)$ по теореме 3.1 допускает представление (3.1) (в случае одномерного параметра s), откуда легко получаем и утверждение теоремы 4.1.

§ 5. Примеры

Рассмотрим два примера наблюдений процессов пуассоновского типа, имеющих ЛАН семейства мер. Первый, когда интенсивность обладает эргодическим свойством, и второй — с неслучайной интенсивностью, меняющейся по гармоническому закону.

Пример 5.1. Пусть интенсивность процесса пуассоновского типа $X = \{X(t), F_t;\ t > 0\}$ есть случайная функция

$$S(\vartheta, t) = \vartheta\xi(t), \quad t \geqslant 0, \tag{5.1}$$

где $|\xi(t), F_t; t \geqslant 0|$ — неотрицательный с вероятностью 1 случайный процесс, $\vartheta \in \Theta = (0, \infty)$. Обозначим $P_\vartheta^{(T)}$ меру, наведенную в $(\mathbf{X}_T, \mathbf{B}_T)$ процессом $X_T = |X(t), 0 \leqslant t \leqslant T|$.

Утверждение 5.1. *Пусть процесс $\xi(\cdot)$ имеет постоянное среднее $E\xi(t) = a < \infty$ и справедлив закон больших чисел*

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \xi(t)\,dt = a > 0,$$

тогда семейство мер $|P_\vartheta^{(T)}, \vartheta \in \Theta|$ локально асимптотически нормальное в Θ с правильной нормирующей функцией $\varphi_T(\vartheta) = |\sqrt{\vartheta/a}\cdot T^{-1/2}|$.

Доказательство заключается в прямой проверке условий B—I—B—V теоремы 3.1.

Замечание 5.1. Пусть по наблюдениям процесса X_T интенсивности (5.1) требуется оценить неизвестный параметр $\vartheta \in \Theta$. Нетрудно показать, что оценка максимального правдоподобия имеет вид

$$\hat{\vartheta}_T = X(T)\Big/\int_0^T \xi(t)\,dt,$$

и при $T \to \infty$ в предположениях утверждения 5.1

$$L\,|(\hat{\vartheta}_T - \vartheta)\sqrt{T}\,|P_\vartheta^{(T)}| \Rightarrow N(0, \vartheta/a).$$

Пример 5.2. Пусть интенсивность наблюдаемого процесса Пуассона $X_T = |X(t), 0 \leqslant t \leqslant T|$ меняется по гармоническому закону

$$S(\vartheta, t) = \frac{1}{2}A\,[1 + \cos(\omega t + \varphi)] + \lambda, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{5.2}$$

где $\vartheta = (\omega, \varphi) \in \Theta = (0, \infty) \times (0, 2\pi)$, $\lambda > 0$. К такой схеме наблюдений приходят, например, в задачах оптической связи, когда происходит передача значений (ω, φ) модуляцией интенсивности слабого оптического источника, наблюдаемого на фоне однородного шума интенсивности λ, при этом A — амплитуда (максимальное значение), ω — частота и φ — фаза интенсивности сигнального процесса Пуассона.

Утверждение 5.2. *Семейство мер $|P_\vartheta^{(T)}, \vartheta \in \Theta|$, наведенных процессами Пуассона X_T интенсивностей (5.2) в $(\mathbf{X}_T, \mathbf{B}_T)$ при $T \to \infty$ локально асимптотически нормальное в Θ с правильной нормирующей матрицей*

$$\varphi_T(\vartheta) = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2}A - \sqrt{\lambda A + \lambda^2} \end{bmatrix}^{-1/2} \begin{pmatrix} \sqrt{3}\,T^{-3/2} & -3T^{-3/2} \\ -3T^{-3/2} & 2T^{-1/2} \end{pmatrix}.$$

Доказательство заключается в прямой проверке условий теоремы 4.1. В частности, матрицу $\varphi_T(\vartheta)$ получаем, извлекая квадратный корень из матрицы, обратной к информационной матрице Фишера

$$I_T(\theta)=\begin{pmatrix} \frac{\sigma}{3}T^3(1+(o(1)) & \frac{\sigma}{2}T^2(1+o(1)) \\ \frac{\sigma}{2}T^2(1+o(1)) & \sigma T(1+o(1)) \end{pmatrix},$$

где

$$\sigma=1+\frac{1}{2}A-\sqrt{\frac{1}{4}A+A^2}.$$

Отметим, что асимптотическое поведение оценок максимального правдоподобия и байесовских оценок (одномерных) параметров A, ω и τ для схемы (5.1) описано в [7]. В доказательстве в [7] центральное место занимало установление ЛАН семейства мер, отвечающих наблюдениям, поэтому утверждение 5.1 также поможет исследовать асимптотические свойства оценок двумерного параметра $\theta=(\omega, \tau)$ при $T\to\infty$.

§ 6. Асимптотически локально наиболее мощный критерий

Пусть наблюдается процесс пуассоновского типа $X_T=\{X(t), F_t;\ 0\leqslant t\leqslant T\}$ интенсивности $S_T(\theta)=\{S(\theta, t), F_t;\ 0\leqslant t\leqslant T\}$, $\theta\in\Theta$ и множество $\Theta=[\theta_0, \infty)$. Требуется по наблюдениям X_T проверить простую гипотезу $H: \theta=\theta_0$ против односторонней сложной альтернативы $K: \theta>\theta_0$. Как и ранее $P_\theta^{(T)}$ — мера, отвечающая X_T в $(\mathbf{X}_T, \mathbf{B}_T)$.

Считаем выполненным условие

$$P_{\theta_0}^{(T)}\left\{\int_0^T \frac{S(\theta, t)}{S(\theta_0, t)}\,dt<\infty\right\}=1,\quad \theta>\theta_0,$$

гарантирующее абсолютную непрерывность мер $P_\theta^{(T)}$, $\theta>\theta_0$ относительно меры $P_{\theta_0}^{(T)}$, а также условие B—II с $\theta=\theta_0$ и $\theta>\theta_0$. Кроме того, пусть выполнены условия B—III, B—IV в точке θ_0 и условие B—V, в котором следует положить $\theta=\theta_0$ и $y>\theta_0$, $z>\theta_0$.

Фиксируем уровень значимости α и обозначим $\bar\beta_T(\theta, \Phi)$ вероятность правильного принятия решения при использовании критерия Φ и истинном значении θ. Сделаем замену переменных $u=(\theta-\theta_0)\varphi_T(\theta_0)^{-1}$ и назовем критерий Φ^* *асимптотически локально наиболее мощным*, если для любого другого критерия Φ (также уровня α) и любой постоянной $C>0$

$$\lim_{T\to\infty}\inf_{0<u<C}[\beta_T(u, \Phi^*)-\beta_T(u, \Phi)]\geqslant 0,$$

где

$$\beta_T(u, \Phi)=\bar\beta_T(\theta_0+\varphi_T(\theta_0)u, \Phi).$$

В предположении, что выполнены сформулированные выше условия справедливо

Утверждение 6.1. *Критерий* Φ, *задаваемый соотношениями*

$$\text{принимать } H, \text{ если } \Delta_T(\vartheta_0, X_T) \leqslant C_{\varepsilon, T},$$

$$\text{принимать } K, \text{ если } \Delta_T(\vartheta_0, X_T) > C_{\varepsilon, T},$$

где $C_{\varepsilon, T}$ *является решением уравнения*

$$P_{\vartheta_0}^{(T)}\{\Delta_T(\vartheta_0, X_T) > C_{\varepsilon, T}\} = \varepsilon,$$

асимптотически локально наиболее мощный.

Доказательство. Анализ доказательства теоремы 3.1 показывает, что на самом деле в ней установлено несколько больше, чем ЛАН. А именно, остаточный член $\psi_T(\cdot)$ в представлении (3.1) стремится к нулю по вероятности не только при каждом $u \in R^1$, но и равномерно на компактах по u, т. е.

$$\lim_{T \to \infty} \sup_{u \in C} P_{\vartheta_0}^{(T)}\{|\psi_T(\vartheta_0, u, X_T)| > \gamma\} = 0 \tag{6.1}$$

для любых $C > 0$ и $\gamma > 0$. А тогда доказательство утверждения 6.1 по существу не отличается от доказательства соответствующего утверждения в случае наблюдений последовательности случайных величин, отношение правдоподобия которых допускает представление (3.1) со свойствами (3.2), (6.1) ([2], гл. 4, следствие 3.1).

Представление (3.1) и теоремы 3.1, 4.1, кроме того, позволяют описать асимптотически наилучшие критерии и для некоторых других задач проверки гипотез (подробнее см. [2], гл. 4).

§ 7. Нижние границы на риск оценок

Пусть наблюдается реализация процесса пуассоновского типа $X_T = \{X(t), F_t;\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ интенсивности $S_T(\vartheta) = \{S(\vartheta, t), F_t;\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ и требуется параметр $\vartheta \in \Theta \subset R^1$ оценить. Ниже приводятся неравенство Крамера-Рао и граница Гаека для этой схемы наблюдений на среднеквадратическое отклонение произвольной оценки $\vartheta_T^* = \vartheta_T^*(X_T)$.

Сначала сформулируем и докажем неравенство Крамера-Рао в одномерном ($\Theta \subset R^1$) случае, для чего нам понадобятся

Условия:

Д—1. При всех $\vartheta, \tilde{\vartheta} \in \Theta$

$$P_{\vartheta}^{(T)}\left\{\int_0^T \frac{S(\tilde{\vartheta}, t)}{S(\vartheta, t)}\, dt < \infty\right\} = 1.$$

Д—II. Функция $S(\vartheta, t)$ *абсолютно непрерывная по* ϑ *с вероятностью* 1 *при п.в.* $t \in [0, T]$ *и функция*

$$I(\vartheta_1, \vartheta_2) = E_{\vartheta_1} \int_0^T \frac{\dot{S}(\vartheta_1, t)^2}{S(\vartheta_2, t)}\, dt$$

непрерывна на прямой $\vartheta_1 = \vartheta_2$.

Д—III. При всех $\vartheta \in \Theta$

$$I(\vartheta) \equiv I(\vartheta, \vartheta) > 0.$$

Теорема 7.1. (Неравенство Крамера-Рао). *Пусть выполнены условия Д—I—Д—III, тогда для любой оценки* ϑ_T^* *параметра* ϑ *такой, что величина* $Q(\vartheta)$ *ограничена на компактах в* Θ, *справедливы утверждения:*

1) *смещение* $b(\vartheta) = E_\vartheta \vartheta_T^* - \vartheta$ *абсолютно непрерывно в* Θ;

2) *при п.в.* $\vartheta \in \Theta$ *имеет место неривенство*

$$E_\vartheta (\vartheta_T^* - \vartheta)^2 \geqslant \frac{\left[1 + \frac{db(\vartheta)}{d\vartheta}\right]^2}{I(\vartheta)} + b(\vartheta)^2. \tag{7.1}$$

Доказательство. Повторяя выкладки (2.2)--(2.4) работы [11] в наших обозначениях придем к нераненству

$$(E_{\vartheta_2}\vartheta_T^* - E_{\vartheta_1}\vartheta_T^*)^2 \leqslant [2Q(\vartheta_1) + 2Q(\vartheta_2) - 2b(\vartheta_1)^2 - 2b(\vartheta_2)^2 +$$

$$+ (E_{\vartheta_2}\vartheta_T^* - E_{\vartheta_1}\vartheta_T^*)^2]\, 2\left\{1 - E_\vartheta\left(\frac{dP_{\vartheta_1}^{(T)}}{dP_\vartheta}\,\frac{dP_{\vartheta_2}^{(T)}}{dP_\vartheta}\right)^{1/2}\right\}. \tag{7.2}$$

По условию Д—I меры $P_\vartheta^{(T)}$, $\vartheta \in \Theta$ эквивалентны и можно записать

$$E_\vartheta \left(\frac{dP_{\vartheta_1}^{(T)}}{dP_\vartheta^{(T)}}\,\frac{dP_{\vartheta_2}^{(T)}}{dP_\vartheta^{(T)}}\right)^{1/2} = E_{\vartheta_1}\left(\frac{dP_{\vartheta_2}^{(T)}}{dP_{\vartheta_1}^{(T)}}\right)^{1/2}.$$

Введем обозначения: $S_i = S(\vartheta_i, t)$, $i = 1, 2$

$$V(T) = \exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^T \ln\left(\frac{S_2}{S_1}\right) dX(t) - \frac{1}{2}\int_0^T [S_2 - S_1]\, dt\right\} = \left(\frac{dP_{\vartheta_2}^{(T)}}{dP_{\vartheta_1}^{(T)}}\right)^{1/2}.$$

По обобщенной формуле Ито процесс $[V(t), F_t;\ 0 \leqslant t \leqslant T]$ допускает представление

$$V(T) = 1 + \int_0^T V(t-)\left(\sqrt{\frac{S_2}{S_1}} - 1\right)[dX(t) - S(\vartheta_1, t)\, dt] -$$

$$- \frac{1}{2}\int_0^T V(t-)\,[\sqrt{S_2} - \sqrt{S_1}]^2\, dt.$$

ՀԱՅԿ.ԱՍՏՂ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ՁՈՒՆԿՄԱՍՆԱՅԻՆ ԳՐԱԴԱՐԱՆ

По условию $Д$—II функция $\sqrt{S(\vartheta, t)}$ также абсолютно непрерывная и

$$E_{\vartheta_1} \int_0^T V(t-)^2 (\sqrt{S_2} - \sqrt{S_1})^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4} (\vartheta_2 - \vartheta_1) \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} E_{\vartheta_1} \left(\int_0^T \frac{S(y, t)^2}{S(y, t)} dt \right) dy =$$

$$= \frac{1}{4} (\vartheta_2 - \vartheta_1) \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} I(\vartheta_1, y)\, dy < \infty,$$

если разность $|\vartheta_2 - \vartheta_1|$ достаточно мала. Поэтому

$$1 - E_{\vartheta_1} V(T) = \frac{1}{2} E_{\vartheta_1} \int_0^T V(t-)(\sqrt{S(\vartheta_2, t)} - \sqrt{S(\vartheta_1, t)})^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4} E_{\vartheta_1} \int_0^T (\sqrt{S(\vartheta_2, t)} - \sqrt{S(\vartheta_1, t)})^2 dt +$$

$$+ \frac{1}{4} E_{\vartheta_1} \int_0^T (\sqrt{S(\vartheta_2, t)} - \sqrt{S(\vartheta_1, t)})^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{8} (\vartheta_2 - \vartheta_1) \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} [I(\vartheta_1, y) + I(\vartheta_2, y)]\, dy. \tag{7.3}$$

Следовательно, для достаточно малых $|\vartheta_2 - \vartheta_1|$ получаем неравенство

$$|E_{\vartheta_2} \vartheta_T^* - E_{\vartheta_1} \vartheta_T^*| \leqslant C |\vartheta_2 - \vartheta_1|,$$

откуда вытекает первое утверждение теоремы. Из неравенств (7.2) и (7.3) после деления на $|\vartheta_2 - \vartheta_1|^2$ и перехода к пределу $\vartheta_2 \to \vartheta$, $\vartheta_1 \to \vartheta$ получаем (7.1).

Известно, что неравенство Крамера-Рао в случае многомерного пространства параметров $\Theta \subset R^k$ прямо выводится из неравенства (7.1) (см., например, [12]), поэтому мы сформулируем его без доказательства.

Теорема 7.2. *Пусть выполнено условия* $Д$—I *и условия:*

$\tilde{Д}$—II. *Функция* $S(\vartheta, t)$ *непрерывно дифференцируема с вероятностью* 1 *по каждой компоненте вектора* $\vartheta = (\vartheta_1, \cdots, \vartheta_k)$ *при п.в.* $t \in [0, T]$ *и элементы матрицы* $I(\vartheta_1, \vartheta_2)$ *равные*

$$I(\vartheta_1, \vartheta_2)_{ij} = E_{\vartheta_1} \int_0^T \frac{\partial S}{\partial \vartheta_i}(\vartheta_2, t) \frac{\partial S}{\partial \vartheta_j}(\vartheta_2, t)\, S(\vartheta_2, t)^{-1} dt$$

непрерывны на множестве $\vartheta_1 = \vartheta_2$.

Д—III. Матрица $I(\theta) \equiv I(\theta, \theta)$ *положительно определена при всех* $\theta \in \Theta$.

Тогда для любой оценки δ_T^* *вектора* θ *такой, что величина* $Q(\theta) = E_\theta |\delta_T^* - \theta|^2$ *ограничена на компактах в* Θ *справедливы утверждения*

1) *вектор* $b(\theta) = E_\theta \delta_T^* - \theta$ *дифференцируем по составляющим вектора* θ *при п.в.* $\theta \in \Theta$,

2) *при п.в.* $\theta \in \Theta$ *имеет место неравенство*

$$E_\theta (\delta_T^* - \theta)(\delta_T^* - \theta)' \geqslant \frac{\partial b(\theta)}{\partial \theta} I(\theta)^{-1} \frac{\partial b(\theta)'}{\partial \theta} + b(\theta)\, b(\theta)'.$$

Неравенство $A \geqslant B$ для матриц A и B понимается как обычно, т. е. матрица $A - B$ неотрицательно определена.

Минимаксную границу Гаека [3] рисков оценок параметра θ мы сформулируем сразу в многомерном случае ($\theta \in \Theta \subset R^k$), следуя работе [5] (теорема 5.1).

Введем функцию $l(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} \in R^k$ со свойствами:

1) $l(\mathbf{u}) \geqslant 0$, $l(0) = 0$, $l(\mathbf{u}) = l(-\mathbf{u})$.

2) множество $\{\mathbf{u}: l(\mathbf{u}) < C\}$ выпукло при любом $C > 0$,

3) для любого $\gamma > 0$ конечен интеграл

$$\int_{R^k} l(\mathbf{u}) \exp\{-\gamma |\mathbf{u}|^2\}\, d\mathbf{u}.$$

Теорема 7.3. *Пусть выполнены условия* C—1—C—V *и* $\lim_{T\to\infty} \mathrm{Sp}\, \varphi_T(\theta) \varphi_T(\theta) = 0$, *тогда справедливо неравенство*

$$\varliminf_{T\to\infty} \inf_{\delta_T} \sup_{|\theta-\theta_0|<\delta} E_\theta\, l\left(\varphi_T(\theta)^{-1} (\delta_T^* - \theta)\right) \geqslant$$

$$\geqslant (2\pi)^{-k/2} \int_{R^k} l(\mathbf{u}) \exp\left\{-\frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2\right\} d\mathbf{u}, \qquad (7.4)$$

где нижняя грань берется по всевозможным оценкам δ_T^* *параметра* θ.

Полагая $l(\mathbf{u}) = (\mathbf{u}, \lambda)^2$, из (7.4) получаем *асимптотический вариант неравенства Крамера-Рао* в случае наблюдений процесса пуассоновского типа: для любого $\lambda \in R^k$

$$\varliminf_{T\to\infty} \sup_{|\theta-\theta_0|<\delta} (\varphi_T(\theta)^{-1} E_\theta (\delta_T^* - \theta)(\delta_T^* - \theta)' \varphi_T(\theta)^{-1} \lambda, \lambda) \geqslant (\lambda, \lambda).$$

Институт радиофизики и электроники
АН Армянской ССР

Поступила 19.11.1976

Յու. Ա. ԿՈՒՏՈՅԱՆՑ. Լոկալ ասիմպտոտիկ նորմալություն Պուասոնի տիպի պրոցեսների համար (*ամփոփում*)

Բերվում են լոկալ ասիմպտոտիկ նորմալության (ԼԱՆ) պայմանները հավանականային չափերի ընտանիքի համար, որոնք առաջացնում են ստոխաստիկ Պուասոնի տիպի պրոցես։ Դիտարկվում են Պուասոնի տիպի պրոցեսների չափերի ընտանիքի ԼԱՆ-ն երկու օրինակ։

Yu. A. KUTOYANTS. *Local asymptotical normality for the Poisson type processes* (summary)

Conditions of local asymptotical normality (LAN) for the family of measures induced by the realizations of stochastic Poisson type point processes are presented. Asymptotical normality of the stochastic integral on centered Poisson type point process is established. Two examples of LAN families and asymptotically local most powerful test are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *L. Le Cam*. Locally asymptotically normal families of distributions, Univ. Calif. Publ. Statist., 3, 1960, 37—98.
2. *Дж. Русас*. Контигуальность вероятностных мер, пер. с англ., изд. „Мир", М., 1975.
3. J. *Hajek*. Local asymptotic minimax and admissibility in estimation, Proc. 6th Berkeley Sympos. Math. Statist. and Prob., Univ. Calif. Press, 1972, 175—194.
4. *И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский*. Свойства оценок максимального правдоподобия и байесовских для неодинаково распределенных наблюдений, Теория вероят. и ее примен., XX, 4, 1975, 703—711.
5. *И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский*. Локальная асимптотическая нормальность для неодинаково распределенных наблюдений, Теория вероят. и ее примен., XX, 2, 1975, 251—266.
6. *Ю. А. Кутоянц*. Об одной задаче проверки гипотез и асимптотической нормальности стохастических интегралов, Теория вероят. и ее примен., XX, 2, 1975, 385—393.
7. *Ю. А. Кутоянц*. Оценка параметра интенсивности неоднородного процесса Пуассона, Problems of control and information theory, 8, 2, 1979, 32—42.
8. *J. Grandell*. Doubly stochastic Poisson processes, Lecture notes in mathematics, v. 529, Springer, Berlin, 1976.
9. Stochastic point processes, ed P. A. W. Lewis, Wiley, New York, 1972.
10. *Ю. М. Кабанов, Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев*. Мартингальные методы в теории точечных процессов, Труды школы-семинара по теории случайных процессов, Друскининкай, 1975, часть II, 269—354.
11. *И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский*. Об информационных неравенствах и суперэффективных оценках, Проблемы передачи информации, IX, 3, 1973, 53—67.
12. *V. Fabian, J. Hannan*. On the Cramer-Rao inequality, Annals of statistics, 5, 1, 1977, 197—205.